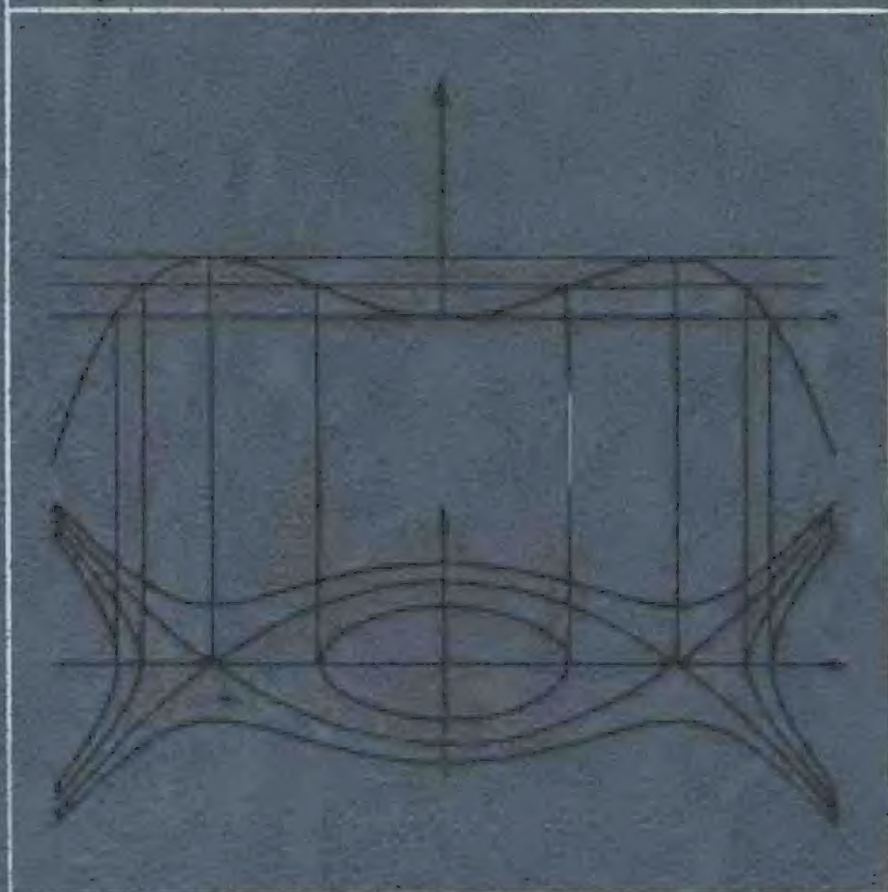


ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ
А. Найфэ

А. Найфэ



ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ
ВОЗМУЩЕНИЙ



Introduction to Perturbation Techniques

ALI HASAN NAYFEH

*University Distinguished Professor
Virginia Polytechnic Institute and State University
Blacksburg, Virginia
and
Yarmouk University, Irbid, Jordan*

A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION

JOHN WILEY & SONS

New York Chichester Brisbane Toronto 1981

А. Найфэ

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

Перевод с английского
И. Е. ЗИНО и Э. А. ТРОППА

под редакцией
Р. Г. БАРАНЦЕВА

МОСКВА «МИР» 1984

ББК 22.161.6

Н20

УДК 517.94

Найфэ А.

Н20 Введение в методы возмущений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984, 535 с., ил.

Книга американского математика А. Найфэ, известного советскому читателю по книге «Методы возмущений» (М.: Мир, 1976), представляет собой учебник по асимптотическому анализу, в котором систематически излагаются современные асимптотические методы решения дифференциальных уравнений и, в частности, методы сингулярных возмущений, реализуемые в тех случаях, когда прямые разложения по малому параметру не являются равномерно пригодными во всей области решения задачи.

Для математиков-прикладников, инженеров, студентов и аспирантов технических специальностей, а также для всех лиц, приступающих к изучению асимптотического анализа.

Н $\frac{1702070000-318}{041(01)-84}$ 38—84, ч. 1

ББК 22.161.6

517.2

Редакция литературы по математическим наукам

Copyright © 1981 by John Wiley & Sons, Inc.
All Right Reserved. Authorized translation
from English language edition published by
John Wiley & Sons, Inc.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Асимптотические методы, эффективность которых в самых разных областях прикладной математики всеми признана, начинают проникать в массовую учебную литературу. Предлагаемая книга — один из первых учебников, предназначенных для студентов и аспирантов не только университетов, но и технических вузов разных профилей.

Суть асимптотических методов заключается в том, что при их применении достигается синтез простоты и точности за счет локализации: в окрестности некоторого предельного состояния находится упрощенное решение задачи, которое тем точнее, чем меньше эта окрестность.

Аналитические методы обычно делятся на эвристические и точные. Совмещая в себе простоту эвристических представлений с точностью аналитических оценок, асимптотические методы не ограничиваются ролью «золотой середины». В математике они занимают особое место. Главное отличие от классической математики состоит в том, что уровень точности конкурирует с размерами области действия; в заданной области точность асимптотического разложения всегда ограничена. Такая плата за эффективность оказывается вполне приемлемой не только на практике, но и в теории, если этот «принцип неопределенности» допустить хотя бы в ту область математики, которая занимается асимптотическими методами. Жизненность и перспективность асимптотических методов подтверждается также тем фактом, что активное взаимодействие численных методов с аналитическими происходит как раз через асимптотику.

Учебник Али Хасана Найфэ появился на основе многолетнего опыта преподавания и обладает рядом достоинств: простой уровень изложения, богатый набор упражнений, сравнительный метод демонстрации различных алгоритмов. Однако, естественно, автору пришлось пойти и на некоторые жертвы. Так, в книге совсем не обсуждается вопрос о строгой оценке остатков асимптотических разложений. Но этот аспект не вполне освоен еще и в научной литературе.

Проникновение асимптотических методов в массовую учебную литературу — важный этап закономерного процесса освоения этого самостоятельного раздела математической методологии.

Научная литература наполнилась книгами по асимптотике в течение двух-трех десятилетий. Если учесть, что темпы их освоения в современном мире заметно возрастают, то можно ожидать, что лет через десять асимптотические методы проникнут и в школьные программы.

Библиография автора дополнена в основном книгами, изданными на русском языке, тематическими сборниками и несколькими статьями методологического характера. Замеченные опечатки исправлены при переводе без специальных оговорок.

Предисловие, гл. 1—6, 12, 13 и приложения перевел И. Е. Зино, гл. 7—11, 14, 15 — Э. А. Тропп.

Р. Г. Баранцев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие задачи, с которыми сталкиваются сегодня физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты. Настоящая книга посвящена описанию этих методов.

Большинство используемых методов возмущений с учетом их сходства и различия, а также преимуществ и ограничений было систематически рассмотрено в моей предыдущей книге¹. Хотя для их описания поначалу использовались примеры с простыми обыкновенными уравнениями, допускавшими точное решение, и лишь потом, по мере усложнения, исследовались уравнения в частных производных, тем не менее изложение носило довольно сжатый характер и было рассчитано в основном на специалистов. Цель настоящей книги заключается в том, чтобы изложить этот материал наиболее простым образом, что позволило бы освоить его хорошо успевающим студентам и аспирантам самых различных научных и технических специальностей. Основываясь на восьмилетнем опыте преподавания методов возмущений для аспирантов Политехнического института и Университета штата Виргиния, я отобрал лишь несколько определенных методов и существенно упростил их описание. Кроме того, я попытался ответить здесь на вопросы, которые чаще всего задавали мне мои слушатели. Все предлагаемые методы иллюстрируются с помощью простых примеров — главным образом посредством алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений.

Материал, изложенный в гл. 3 и 15, а также в приложениях А и В, в предыдущей нашей книге отсутствует. В гл. 3 рассматриваются асимптотические разложения интегралов. Глава 15 посвя-

¹ А. Х. Найфэ. Методы возмущений. Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

щена построению сопряженных линейных однородных уравнений (алгебраических, дифференциальных — обыкновенных и в частных производных, а также интегральных) и нахождению условий разрешимости соответствующих неоднородных задач. В приложении А представлены некоторые тригонометрические тождества, в приложении В описываются свойства обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а также символический метод решения однородных и неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

От читателя требуется лишь знакомство с основами анализа и знание элементарных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений.

В каждой главе содержится большое число упражнений. За дальнейшими задачами отсылаю читателя к моей предыдущей книге, а также к монографии «Нелинейные колебания», написанной мною совместно с Д. Муком¹. Ввиду учебного характера этой книги в библиографию включен перечень лишь самых необходимых работ, без каких бы то ни было ссылок на них в основном тексте.

Я глубоко благодарен К. Р. Асфару и Д. Т. Муку за чтение всей рукописи, а также Л. Уотсону, М. Уильямсу, К. Пратеру, С. А. Рагабу, И. Уикмену, А. Йену, Й. Лю, Г. Риду, Дж. Дедереру, Й. Ма и У. С. Сарикку за чтение отдельных ее частей. Большинство рисунков были выполнены Т. Х. Найфэ, К. Р. Асфаром, И. Уикменом, Т. Дуньяком и Т. Макколи — всем им я хочу выразить свою признательность. Наконец, мне хотелось бы поблагодарить Патти Белчер, Джанет Брайант и Шарон Ларкинс за перепечатку рукописи.

Али Хасан Найфэ

Блэксберг, штат Виргиния.
Апрель 1980 г.

¹ A. H. Nayfeh, D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*, — N. Y.: Wiley, 1979.

1.1. Анализ размерностей

В большинстве задач гидромеханики, динамики твердого тела и других разделов физики крайне редко оказывается возможным получить точные решения — причиной этого служат обычно различного рода нелинейности, неоднородности или сложные граничные условия. Поэтому инженеры, физики и специалисты по прикладной математике вынуждены обращаться к приближенным решениям, которые могут строиться либо численными методами, либо аналитическими, либо путем комбинации численных и аналитических подходов. В этой книге мы будем рассматривать лишь чисто аналитические процедуры, которые в сочетании с методами численного анализа, например такими, как метод конечных разностей или метод конечных элементов, позволяют создать весьма мощный и гибкий аппарат решения современных физических задач.

Ключом к решению той или иной задачи является, как известно, построение ее математической модели. В процессе создания такой модели мы стараемся принять во внимание одни особенности задачи, полностью пренебрегаем другими и лишь в определенной степени учитываем третьи. Для осуществления этих важных шагов нам прежде всего нужно определить порядок величин различных элементов системы (т. е. насколько они велики или малы), сравнивая их друг с другом и с заранее выбранными характерными элементами. Этот процесс называется приведением переменных к безразмерному виду. Прежде чем пытаться проделать какие-либо аппроксимации, всегда нужно ввести безразмерные переменные. Например, если некоторый элемент системы имеет длину один сантиметр, является ли этот элемент большим или малым? Ответить на такой вопрос можно лишь обратившись к исходной постановке задачи. Ясно, что если мы, к примеру, исследуем движение спутника на околоземной орбите, то один сантиметр будет пренебрежимо малым расстоянием. С другой стороны, если в какой-либо предложенной нам задаче нужно учитывать расстояния между молекулами, то при этом один сантиметр оказывается уже гигантской длиной. Точно так же масса в один грамм представляет собой ничтожно малую величину по сравнению с массой спутника, но в то же время оказывается невообразимо огромной по отношению к массе электрона. Итак, представление уравнений в безразмерной

форме выявляет наличие важных безразмерных параметров, которые определяют поведение исследуемой системы. Даже если мы не собираемся обращаться к тем или иным аппроксимациям, тем не менее, прежде чем приступить к анализу конкретной задачи или к обработке экспериментальных данных, рекомендуется обязательно выполнить эту весьма существенную и важную операцию. Разберем теперь несколько примеров, иллюстрирующих процесс приведения к безразмерному виду различных физических задач.

Пример 1. Рассмотрим движение частицы массы m , закрепленной на линейной пружине с коэффициентом жесткости k и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен μ (рис. 1.1). Используя второй закон Ньютона, имеем

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku = 0, \quad (1.1)$$

где u — смещение частицы и t — время. Предположим далее, что частица начинает движение без начальной скорости из состояния покоя, описываемого координатой u_0 ; начальные условия при этом запишутся как

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (1.2)$$

Итак, в данном случае зависимой переменной является смещение u , а независимой — время t . Их необходимо привести к безразмерному виду, используя характерный размер и характерный масштаб времени системы. Смещение u можно сделать безразмерным, принимая в качестве характерной длины начальное смещение u_0 в качестве же характерного масштаба времени выберем величину обратную собственной частоте системы $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Таким образом, положив

$$u^* = u/u_0, \quad t^* = \omega_0 t,$$

где звездочкой обозначены безразмерные величины, получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d(u_0 u^*)}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = \omega_0 u_0 \frac{du^*}{dt^*}, \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= \omega_0^2 u_0 \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}}; \end{aligned}$$

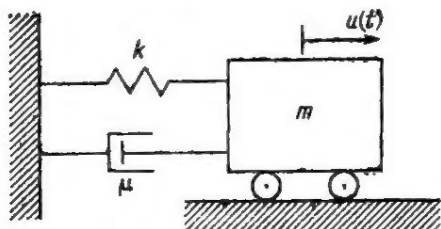


Рис. 1.1 Масса, связанная с пружиной и вязкостным демпфером.

при этом (1.1) представится в виде

$$m\omega_0^2\mu_0 \frac{d^2u^*}{dt^{*2}} + \mu\omega_0\mu_0 \frac{du^*}{dt^*} + k\mu_0 u^* = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d^2u^*}{dt^{*2}} + \mu^* \frac{du^*}{dt^*} + \frac{k}{m\omega_0^2} u^* = 0,$$

или

$$\frac{d^2u^*}{dt^{*2}} + \mu^* \frac{du^*}{dt^*} + u^* = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\mu^* = \frac{\mu}{m\omega_0}. \quad (1.4)$$

Начальные условия (1.2) в безразмерных переменных записываются как

$$u^*(0) = 1, \quad \frac{du^*}{dt^*}(0) = 0. \quad (1.5)$$

Таким образом, решение данной задачи зависит от единственного параметра μ^* , представляющего собой отношение силы сопротивления к силе инерции, или возвращающей силе пружины. Если это отношение мало, то при построении приближенного решения задачи безразмерную величину μ^* можно рассматривать в качестве малого параметра. В этом случае мы говорим о системе со слабым затуханием. Следует отметить, что малость величины μ вовсе не означает, что данная система будет представлять собой систему с малым затуханием; для этого необходимо, чтобы было мало $\mu^* = \mu/m\omega_0 = \mu/\sqrt{km}$.

Пример 2. Предположим теперь, что упругая сила пружины описывается нелинейной функцией вида

$$f_{\text{упр}} = ku + k_2 u^2, \quad (1.6)$$

где k и k_2 суть постоянные. Тогда (1.1) переходит в уравнение

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku + k_2 u^2 = 0. \quad (1.7)$$

Используя те же самые безразмерные переменные, что и в предыдущем примере, получаем

$$m\mu_0\omega_0^2 \frac{d^2u^*}{dt^{*2}} + \mu\mu_0\omega_0 \frac{du^*}{dt^*} + k\mu_0 u^* + k_2\mu_0^2 u^{*2} = 0,$$

или

$$\frac{d^2u^*}{dt^{*2}} + \mu^* \frac{du^*}{dt^*} + u^* + \varepsilon u^{*2} = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\mu^* = \frac{\mu}{m\omega_0} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{k_2\mu_0}{k}. \quad (1.9)$$

При этом начальные условия вновь преобразуются к виду (1.5). Таким образом, данная задача будет зависеть уже от двух безраз-

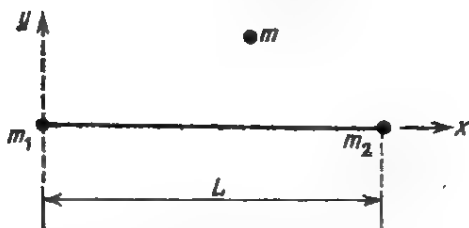


Рис. 1.2. Космический корабль в гравитационном поле двух фиксированных масс.

мерных параметров μ^* и ε . Как и выше, μ^* представляет собой отношение силы сопротивления к силе инерции, или линейной возвращающей силе. Параметр же ε представляет собой отношение нелинейной и линейной составляющих упругой силы пружины.

В тех случаях, когда мы говорим о слабо нелинейной системе, подразумевается, что величина $k_2 u_0/k$ мала. Вместе с тем даже при малости постоянной k_2 по сравнению с k нелинейность может оказаться весьма значительной, если u_0 будет велико по сравнению с отношением k/k_2 . Таким образом, степень нелинейности системы в целом характеризуется именно параметром ε .

Пример 3. В качестве третьего примера рассмотрим задачу о движении космического корабля с массой m в гравитационном поле двух фиксированных притягивающих центров, массы которых m_1 и m_2 много больше массы m . В декартовой прямоугольной системе координат, показанной на рис. 1.2, уравнения движения имеют вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{mm_1 G x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{mm_2 G (x - L)}{[(x - L)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad (1.10)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{mm_1 G y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{mm_2 G y}{[(x - L)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad (1.11)$$

где t — время, G — гравитационная постоянная и L — расстояние между массами m_1 и m_2 .

В данном случае зависимыми переменными являются координаты x и y , а независимой переменной — время t . Ясно, что в качестве характерной длины для этой задачи следует выбрать расстояние L между притягивающими центрами. Выбор же характерного масштаба времени далеко не так очевиден. Поскольку мы предполагаем, что перемещения масс m_1 и m_2 не зависят от характера движения космического корабля, то m_1 и m_2 будут двигаться по эллипсам вокруг общего центра масс. При этом период их обращения будет равен

$$T = \frac{2\pi L^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}},$$

так что частота обращения оказывается равной

$$\omega_0 = L^{-3/2} \sqrt{G(m_1 + m_2)}. \quad (1.12)$$

Величину, обратную ω_0 , мы и используем в качестве характерного масштаба времени задачи. Далее, вводя безразмерные переменные

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \omega_0 t, \quad (1.13)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d(x^*L)}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = L\omega_0 \frac{dx^*}{dt^*}, & \frac{d^2x}{dt^2} &= L\omega_0^2 \frac{d^2x^*}{dt^{*2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d(y^*L)}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = L\omega_0 \frac{dy^*}{dt^*}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= L\omega_0^2 \frac{d^2y^*}{dt^{*2}}. \end{aligned}$$

При этом (1.10) и (1.11) переписываются в виде

$$\begin{aligned} mL\omega_0^2 \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} &= - \frac{mm_1GLx^*}{[L^2(x^{*2} + y^{*2})]^{3/2}} - \frac{mm_2GL(x^* - 1)}{[L^2(x^* - 1)^2 + L^2y^{*2}]^{3/2}}, \\ mL\omega_0^2 \frac{d^2y^*}{dt^{*2}} &= - \frac{mm_1GLy^*}{[L^2(x^{*2} + y^{*2})]^{3/2}} - \frac{mm_2GLy^*}{[L^2(x^* - 1)^2 + L^2y^{*2}]^{3/2}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = - \frac{m_1G}{L^3\omega_0^2} \frac{x^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{3/2}} - \frac{m_2G}{L^3\omega_0^2} \frac{(x^* - 1)}{[(x^* - 1)^2 + y^{*2}]^{3/2}}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2y^*}{dt^{*2}} = - \frac{m_1G}{L^3\omega_0^2} \frac{y^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{3/2}} - \frac{m_2G}{L^3\omega_0^2} \frac{y^*}{[(x^* - 1)^2 + y^{*2}]^{3/2}}. \quad (1.15)$$

Используя (1.12), находим

$$\frac{m_1G}{L^3\omega_0^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \frac{m_2G}{L^3\omega_0^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому, если положить

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \varepsilon, \quad \text{то} \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \varepsilon, \quad (1.16)$$

и уравнения (1.14)–(1.15) принимают вид

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = - \frac{(1 - \varepsilon)x^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{3/2}} - \frac{\varepsilon(x^* - 1)}{[(x^* - 1)^2 + y^{*2}]^{3/2}}, \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2y^*}{dt^{*2}} = - \frac{(1 - \varepsilon)y^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{3/2}} - \frac{\varepsilon y^*}{[(x^* - 1)^2 + y^{*2}]^{3/2}}. \quad (1.18)$$

Таким образом, наша задача определяется только одним параметром ε , который обычно называют приведенной массой. Если m_1 представляет собой массу Земли, а m_2 — массу Луны, то

$$\varepsilon \approx \frac{\frac{1}{80}}{1 + \frac{1}{80}} = \frac{1}{81},$$

т. е. действительно является малой величиной. Она и может рассматриваться в качестве параметра возмущения при построении приближенного решения задачи о движении космического корабля в гравитационном поле Земли и Луны.

Пример 4. В качестве следующего примера рассмотрим колебания круглой пластины радиуса a с закрепленным краем, находящейся под действием равномерно распределенной радиальной нагрузки. Если обозначить через w поперечное смещение произвольной точки пластины, то линейные колебания пластины будут описываться уравнением

$$D\nabla^4 w - P\nabla^2 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.19)$$

где t — время, D — жесткость пластины, P — равномерно распределенная радиальная нагрузка и ρ — плотность материала пластины на единицу площади. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \\ w < \infty \quad \text{при} \quad r = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В данном случае w представляет собой зависимую переменную, а t и r — независимые переменные. Ясно также, что характерной длиной для этой задачи является радиус пластины a ; характерный же масштаб времени T мы определим ниже. Вводя безразмерные переменные

$$w^* = \frac{w}{a}, \quad r^* = \frac{r}{a}, \quad t^* = \frac{t}{T},$$

получаем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial (aw^*)}{\partial r^*} \frac{dr^*}{dr} = \frac{\partial w^*}{\partial r^*},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial (aw^*)}{\partial \theta} = a \frac{\partial w^*}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial (aw^*)}{\partial t^*} \frac{dt^*}{dt} = \frac{a}{T} \frac{\partial w^*}{\partial t^*}.$$

Так как

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

то (1.19) дает

$$\begin{aligned} \frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w^* - \\ - \frac{P}{a} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w^* + \frac{\rho a}{T^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{D}{a^2 P} \nabla^{*4} w^* - \nabla^{*2} w^* + \frac{\rho a^2}{P T^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0. \quad (1.21)$$

Теперь мы можем выбрать T из условия, чтобы коэффициент при $\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}$ оказался равным 1, т. е. полагая $T = a \sqrt{\rho/P}$. В этом случае уравнение (1.21) приобретает вид

$$\varepsilon \nabla^{*2} w^* - \nabla^{*2} w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0, \quad (1.22)$$

где

$$\varepsilon = \frac{D}{a^2 P}, \quad (1.23)$$

а граничные условия (1.20) в безразмерных переменных переписываются как

$$\begin{aligned} w^* = \frac{\partial w^*}{\partial r^*} &= 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \\ w^* < \infty \quad &\text{при} \quad r^* = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Итак, наша задача вновь зависит от одного безразмерного параметра ε . При этом, если величина нагрузки P велика по сравнению с D/a^2 , ε оказывается малым и может рассматриваться в качестве параметра возмущения задачи.

Пример 5. В качестве последнего примера рассмотрим установившееся обтекание плоской пластины потоком несжимаемой жидкости. Задача описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.25)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.26)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.27)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u = v &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u \rightarrow U_\infty, \quad v &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где u и v — составляющие вектора скорости вдоль осей x и y соответственно, p — давление, ρ — плотность и μ — коэффициент вязкости жидкости.

В данном случае зависимыми переменными являются величины u , v и p , а независимыми переменными — координаты x и y . Для

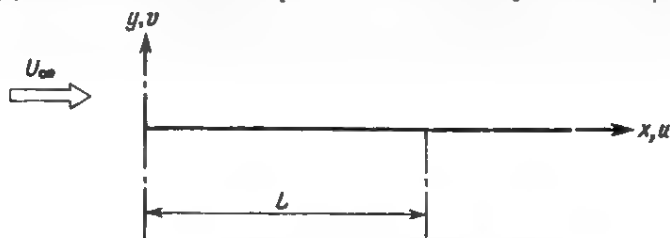


Рис. 1.3. Обтекание бесконечной пластины.

того чтобы привести уравнения (1.25)—(1.27) к безразмерному виду, выберем в качестве характерной длины L расстояние от передней кромки пластины до некоторой заданной ее точки (рис. 1.3), а в качестве характерного масштаба скорости — скорость набегающего потока U_∞ . Вводя безразмерные переменные по формулам

$$u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L},$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (U_\infty u^*)}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dx} = \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial v^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*}.$$

При этом из (1.25)—(1.28) получаем

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\rho U_\infty^2}{L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (1.30)$$

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\rho U_\infty^2}{L} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (1.31)$$

$$u^* = v^* = 0 \text{ при } y^* = 0,$$

$$U_\infty u^* \rightarrow U_\infty, \quad v^* \rightarrow 0 \text{ при } x^* \rightarrow -\infty. \quad (1.32)$$

Соотношения (1.29)—(1.32) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (1.33)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (1.34)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (1.35)$$

$$u^* = v^* = 0 \text{ при } y^* = 0, \quad (1.36)$$

$$u^* \rightarrow 1, \quad v^* \rightarrow 0 \text{ при } x^* \rightarrow -\infty, \quad (1.37)$$

где параметр

$$\text{Re} = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} \quad (1.38)$$

называется числом Рейнольдса.

Уравнения (1.33)—(1.35) с граничными условиями (1.36)—(1.37) показывают, что наша задача зависит лишь от одного безразмерного параметра Re . В случае малой вязкости, т. е. когда μ мало по сравнению с произведением $\rho U_{\infty} L$, параметр Re оказывается большим, и обратная ему величина может быть использована в качестве параметра возмущения при построении приближенного решения данной задачи. Этот процесс приводит нас к широко известным в механике жидкости уравнениям пограничного слоя. Если же поток обтекает пластину с малой скоростью, т. е. в случае, когда $\rho U_{\infty} L$ невелико по сравнению с μ , параметр Re становится малым и сам может служить в качестве параметра возмущения при построении приближенного решения. В этом случае мы получаем так называемое течение Стокса—Озеена.

1.2. Разложения

При построении приближенных решений алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений, а также при оценке различных интегралов нам приходится иметь дело с рядами по степеням параметра или независимой переменной. Такие разложения в степенные ряды строятся обычно либо с помощью формулы бинома Ньютона, либо путем использования рядов Тейлора. О них и пойдет речь ниже.

Биномиальная формула

Простым перемножением находим

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Обобщением этого правила на случай произвольных целых n служит формула

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots, \quad (1.39a)$$

которую можно переписать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} a^{n-m} b^m, \quad (1.39b)$$

или

$$(\tilde{a} + b)^n = \sum_{m=0}^n C_m^n \tilde{a}^{n-m} b^m, \quad \text{где } C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.39b)$$

Разложение (1.39а) справедливо для любых положительных или отрицательных n , при условии если $|b/a| < 1$; в противном случае ряд расходится, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\text{-й член}}{(m-1)\text{-й член}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-1)! n (n-1) (n-2) \dots (n-m+1) a^{n-m} b^m}{m! n(n-1) (n-2) \dots (n-m+2) a^{n-m+1} b^{m-1}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1) b}{m a} = -\frac{b}{a}. \quad (1.40) \end{aligned}$$

Так, например, мы имеем

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= \sum_{m=0}^5 \frac{5!}{m! (5-m)!} a^{5-m} b^m = \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^6 &= \sum_{m=0}^6 \frac{6!}{m! (6-m)!} a^{6-m} b^m = \\ &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{1/2} &= a^{1/2} + \frac{1}{2} a^{-1/2} b + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} a^{-3/2} b^2 + \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} a^{-5/2} b^3 + \dots = \\ &= a^{1/2} + \frac{1}{2} a^{-1/2} b - \frac{1}{8} a^{-3/2} b^2 + \frac{1}{16} a^{-5/2} b^3 + \dots, \\ (a+b)^{-1} &= a^{-1} - a^{-2} b + \frac{(-1)(-2)}{2!} a^{-3} b^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} a^{-4} b^3 + \dots = \\ &= a^{-1} - a^{-2} b + a^{-3} b^2 - a^{-4} b^3 + \dots \end{aligned}$$

Отметим, что два первых разложения, соответствующие $n = 5$ и $n = 6$, содержат конечное число членов. В последние два разложения, соответствующие $n = \frac{1}{2}$ и $n = -1$, входит бесконечное число членов; тем самым их справедливость имеет место лишь при $|b| < |a|$.

Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = x_0$, то ее можно разложить в ряд по степеням $(x - x_0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где a_n — постоянные, определяемые значениями функции $f(x)$ и ее производных в точке $x = x_0$. Действительно, полагая в (1.41) $x = x_0$, находим, что $a_0 = f(x_0)$. Дифференцируя разложение (1.41) по x , получаем

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots, \quad (1.42)$$

откуда, если положить $x = x_0$, имеем $a_1 = f'(x_0)$. Далее, дифференцируя (1.42) по x , получаем

$$f''(x) = 2!a_2 + 3!a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.43)$$

Полагая $x = x_0$, находим $a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0)$. Дифференцирование (1.43) по x дает

$$f'''(x) = 3!a_3 + 4!a_4(x - x_0) + \dots, \quad (1.44)$$

откуда, полагая $x = x_0$, имеем $a_3 = \frac{1}{3!} f'''(x_0)$. Неограниченно продолжая этот процесс, можно определить все остальные коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad (1.45)$$

где $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ и $f^{(0)} = f(x_0)$. Таким образом, разложение (1.41) можно представить в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (1.46)$$

который называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$.

Так как

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$$

то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (1.47)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (1.48)$$

Аналогично, с помощью формулы

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

получаем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.49)$$

а из соотношений

$$\frac{d}{dx} [\ln_x^*(1+x)] = (1+x)^{-1}, \quad \frac{d}{dx} (1+x)^{-n} = -n(1+x)^{-n-1}$$

имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}. \quad (1.50)$$

Вышеприведенные тейлоровские разложения мы будем часто использовать в последующих главах.

1.3. Калибровочные функции

В этой книге мы будем заниматься исследованием пределов различных функций, в частности предела функции $f(\varepsilon)$ при ε , стремящемся к нулю, что будем обозначать как $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел может зависеть от того, стремится ли ε к нулю справа (этот факт мы будем записывать как $\varepsilon \rightarrow +0$) или слева (такое стремление обозначим как $\varepsilon \rightarrow -0$). Например,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{-1/\varepsilon} = 0, \quad \text{но} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} e^{-1/\varepsilon} = \infty.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что все параметры выбираются таким образом, что $\varepsilon \geq 0$. Если предел функции $f(\varepsilon)$ существует (т. е. у нее нет существенных особенностей при $\varepsilon = 0$, таких, как у функции $\sin \varepsilon^{-1}$), то имеет место одна из трех возможностей

$$\left. \begin{array}{l} f(\varepsilon) \rightarrow 0 \\ f(\varepsilon) \rightarrow A \\ f(\varepsilon) \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < |A| < \infty. \quad (1.51)$$

Чаще всего такая классификация оказывается не слишком удобной, поскольку существует бесчисленное множество функций, стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \cos \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon - \sin \varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(1 + \varepsilon)]^4 = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-1/\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Точно так же имеется бесконечно много функций, которые стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, например

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \varepsilon} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \cos \varepsilon} = \infty, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{1/\varepsilon} = \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} = \infty. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Поэтому, для того чтобы уточнить вышеприведенную классификацию, мы будем подразделять каждый из указанных классов функций в соответствии со скоростью, с которой они стремятся к нулю или к бесконечности. Иначе говоря, мы будем сравнивать скорость соответствующего убывания или возрастания этих функций со скоростью стремления к нулю или бесконечности некоторых известных функций. Эти функции сравнения называются *калибровочными функциями*. Простейшими и наиболее употребительными из них являются целые положительные степени параметра ε

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots,$$

а также его обратные степени

$$\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-4}, \dots;$$

при этом известно, что для малых ε

$$1 > \varepsilon > \varepsilon^2 > \varepsilon^3 > \varepsilon^4 > \dots \text{ и } \varepsilon^{-1} < \varepsilon^{-2} < \varepsilon^{-3} < \varepsilon^{-4} < \dots$$

Определим теперь скорость, с которой рассмотренные нами ранее функции стремятся к нулю или бесконечности. Используя тейлоровское разложение (1.47), имеем

$$\sin \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \dots$$

и, следовательно, $\sin \varepsilon \rightarrow 0$ как ε , поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{5!} + \dots \right) = 1.$$

Далее, с помощью (1.48) получаем

$$1 - \cos \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2!} - \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots,$$

откуда $1 - \cos \varepsilon \rightarrow 0$ как ε^2 , поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{\varepsilon^2}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2!}.$$

Точно так же $\varepsilon - \sin \varepsilon \rightarrow 0$ как ε^3 , поскольку из разложения (1.47) следует

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = \frac{\varepsilon^3}{3!} - \frac{\varepsilon^5}{5!} + \dots$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{\varepsilon^2}{5!} + \dots \right) = \frac{1}{3!}.$$

Аналогично, используя (1.50), получаем

$$[\ln(1 + \varepsilon)]^4 = \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \dots \right)^4,$$

откуда $[\ln(1 + \varepsilon)]^4 \rightarrow 0$ как ε^4 , поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\ln(1 + \varepsilon)]^4}{\varepsilon^4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \dots \right)^4 = 1.$$

Для того чтобы определить скорость, с которой стремится к нулю $\exp(-1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, попытаемся разложить эту функцию в ряд Тейлора при малых ε . Для этого нам необходимо знать ее производные при $\varepsilon = 0$. Но

$$f'(\varepsilon) = \frac{d(e^{-1/\varepsilon})}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-1/\varepsilon}, \quad (1.54a)$$

что при $\varepsilon = 0$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x},$$

то, используя правило Лопиталья и дважды дифференцируя по x числитель и знаменатель, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

откуда

$$f'(0) = 0. \quad (1.54b)$$

Далее, дифференцируя по ε соотношение (1.54a), находим

$$f''(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon^4} - \frac{2}{\varepsilon^3} \right) e^{-1/\varepsilon}, \quad (1.55a)$$

откуда $f''(0) = 0$, поскольку, согласно правилу Лопиталья,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^4} - \frac{2}{\varepsilon^3} \right) e^{-1/\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{e^x} = 0.$$

Наконец, дифференцирование (1.55a) дает

$$f'''(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon^6} - \frac{6}{\varepsilon^5} + \frac{6}{\varepsilon^4} \right) e^{-1/\varepsilon}, \quad (1.56a)$$

откуда $f'''(0) = 0$, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^6} - \frac{6}{\varepsilon^5} + \frac{6}{\varepsilon^4} \right) e^{-1/\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 6x^5 + 6x^4}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3}{e^x} = 0.$$

Продолжая этот процесс, получаем, что

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (1.57)$$

для всех n . При этом из (1.46) следует $e^{-1/\varepsilon} = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$, что, конечно, неверно. Таким образом, функция $\exp(-1/\varepsilon)$ не может быть представлена рядом по степеням ε . Происходит это потому, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ она стремится к нулю быстрее, чем любая степень ε . Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

— этот результат легко получается с помощью последовательного применения правила Лопиталья. Итак, одних лишь степенных калибровочных функций нам оказывается недостаточно, и к ним нужно добавить функцию $\exp(-1/\varepsilon)$.

Исследуем теперь, с какой скоростью стремятся к бесконечности функции, представленные в соотношениях (1.53). Используя (1.47), получаем

$$\frac{1}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \dots\right)},$$

откуда $(\sin \varepsilon)^{-1} \rightarrow \infty$ как ε^{-1} , поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\sin \varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \dots} = 1.$$

Далее из разложения (1.48) находим

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \cos \varepsilon} = \frac{1}{-\frac{\varepsilon^4}{4!} + \frac{\varepsilon^6}{6!} + \dots},$$

так что $\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \cos \varepsilon\right)^{-1} \rightarrow -\infty$ как $-\varepsilon^{-4}$, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \cos \varepsilon} : \frac{1}{\varepsilon^4} \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^4}{-\frac{\varepsilon^4}{4!} + \frac{\varepsilon^6}{6!} + \dots} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-4!}{1 - \frac{\varepsilon^2}{30} + \dots} = -4!. \end{aligned}$$

Так как $\exp(-1/\varepsilon)$ стремится к нулю быстрее, чем любая положительная степень ε , то функция $\exp(1/\varepsilon)$ стремится к бесконечности быстрее, чем любая обратная степень ε ; в самом деле, согласно правилу Лопиталья, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{1/\varepsilon}}{1/\varepsilon^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

Таким образом, мы должны пополнить совокупность калибровочных функций еще одной функцией, $-\exp(1/\varepsilon)$. Далее, функция $\ln(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к бесконечности медленнее, чем $\varepsilon^{-\alpha}$, где α — сколь угодно малое положительное число, так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Следовательно, к набору калибровочных функций необходимо добавить еще функцию $\ln(1/\varepsilon)$. Точно так же в этот набор нужно включить и функцию $[\ln(1/\varepsilon)]^{-1}$, с тем чтобы иметь возможность описывать поведение функций, которые стремятся к нулю медленнее, чем любая степень ε , в частности ε^α , где α — сколь угодно малое положительное число.

Итак, приведенные рассуждения показывают, что для получения полного набора калибровочных функций кроме различных

степеней ε мы должны включать в него логарифмы, экспоненты, а также функции вида

$$e^{\varepsilon^{1/\varepsilon}}, e^{-\varepsilon^{1/\varepsilon}}, \ln \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right), \ln \ln \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right), \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^n, \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-n} \text{ и т. д.}$$

1.4. Символы порядка

Вместо утверждения о том, что $\sin \varepsilon$ стремится к нулю с той же скоростью, что и ε , обычно говорят, что « $\sin \varepsilon$ имеет порядок ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ », или « $\sin \varepsilon$ есть « O большое» от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ », и записывают это как

$$\sin \varepsilon = O(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Вообще мы полагаем ¹⁾

$$f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.58)$$

если существует такое число A , что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A, \quad 0 < |A| < \infty. \quad (1.59)$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\cos \varepsilon = O(1), \quad \cos \varepsilon - 1 = O(\varepsilon^2),$$

$$\operatorname{sh} \varepsilon = O(\varepsilon), \quad \operatorname{tg} \varepsilon = O(\varepsilon),$$

$$\operatorname{cosec} \varepsilon = O(\varepsilon^{-1}), \quad \sec \varepsilon = O(1),$$

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = O(\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sin \varepsilon} = O(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon} = O(e^{1/\varepsilon}), \quad \operatorname{sch} \frac{1}{\varepsilon} = O(e^{-1/\varepsilon}).$$

Необходимо отметить, что введенное с помощью символа O математическое понятие порядка формально отличается от физического понятия порядка величины, поскольку численное значение постоянной A , т. е. выбранного коэффициента пропорциональности, при этом совершенно не учитывается. Так, $A\varepsilon = O(\varepsilon)$, даже если A равно ста тысячам. Вместе с тем всегда существует тайная надежда, что эти две оценки в значительной степени связаны между собой. Иными словами, обычно принимается, что соответствующие коэффициенты пропорциональности порядка единицы и значение, определяемое символом порядка, оказывается достаточно близким к фактическому численному значению физической величины.

¹⁾ В существующей литературе по асимптотическим методам символ O обычно вводится несколько иначе. А именно, $f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $|f(\varepsilon)| \leq A|g(\varepsilon)|$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $A = \text{const}$; при этом символ O фактически означает оценку порядка сверху. Ограничиваясь, согласно (1.59), точной оценкой порядка, автор отходит от традиционного определения и восстанавливает соответствие между звучанием и смыслом соотношения (1.58). Вопрос о новом символе для верхних оценок у автора не возникает, поскольку такие оценки в книге не используются. — Прим. ред.

Во многих случаях имеющаяся у нас информация о заданной функции оказывается недостаточной для определения скорости, в которой эта функция стремится к пределу, однако с ее помощью вполне можно установить, будет ли эта скорость больше или меньше скорости изменения соответствующей калибровочной функции. При этом мы используем символ порядка «о» (о малое), определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} &f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \text{если} \quad &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Так, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= o(1), & \sin \varepsilon &= o(\varepsilon^{1/2}), \\ \cos \varepsilon &= o(\varepsilon^{-1}), & \cos \varepsilon &= o(\varepsilon^{-1/3}), \\ e^{-1/\varepsilon} &= o(e^{-10^{-3}}), & e^{-10^{10}} &= o(e^{1/\varepsilon}), \\ \ln \frac{1}{\varepsilon} &= o(\varepsilon^{-0.00001}), & \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} &= o\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ e^{2/\varepsilon} &= o(e^{e^{1/\varepsilon}}), & \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 &= o(\varepsilon^{-0.00001}). \end{aligned} \quad (1.61)$$

1.5. Асимптотические ряды

Рассмотрим теперь вопрос об оценке интеграла

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{\omega + x} dx \quad (1.62)$$

при больших положительных ω . Одним из способов построения соответствующей аппроксимации для функции $f(\omega)$ является метод Лапласа, описываемый в § 3.3. Он заключается в разложении множителя, стоящего в подынтегральном выражении при $\exp(-x)$, в ряд по степеням x и последующем почленном интегрировании полученного ряда. Действительно, используя биномиальную формулу, получаем ряд

$$\frac{\omega}{\omega + x} = \frac{1}{1 + \omega^{-1}x} = 1 - \frac{x}{\omega} + \frac{x^2}{\omega^2} - \frac{x^3}{\omega^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\omega^n}, \quad (1.63)$$

который сходится при $x < \omega$. Основная идея, лежащая в основе метода Лапласа, состоит в том, что при больших x $\exp(-x)$ стремится к нулю быстрее, чем растет к бесконечности любая степень x . Отсюда следует, что величина нашего интеграла при больших ω определяется в основном лишь поведением подынтегральной

функции вблизи начала координат. Подставляя (1.63) в (1.62), находим

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-x}}{\omega^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^n} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Но поскольку для целых n

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!,$$

то

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\omega^n}. \quad (1.64)$$

Применяя признак сходимости Даламбера, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n! \omega^{n-1}}{\omega^n (-1)^{n-1} (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\omega} = -\infty,$$

и, следовательно, ряд (1.64) расходится для всех значений ω . Для того чтобы выяснить, можно ли все-таки каким-либо образом использовать формулу (1.64) для вычисления $f(\omega)$, вычислим остаток, получающийся при усечении этого ряда на N -м члене. Заметим при этом, что отрезок ряда

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{\omega^n}$$

представляет собой геометрическую прогрессию с суммой

$$\frac{1 - \left(-\frac{x}{\omega}\right)^{N+1}}{1 + \frac{x}{\omega}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\omega}{\omega + x} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{\omega^n} + \hat{R}_N(x, \omega),$$

$$\text{где } \hat{R}_N = \frac{\omega}{\omega + x} - \frac{1 - \left(-\frac{x}{\omega}\right)^{N+1}}{1 + \frac{x}{\omega}} = \frac{\left(-\frac{x}{\omega}\right)^{N+1}}{1 + \frac{x}{\omega}} = \frac{(-x)^{N+1}}{\omega^N (\omega + x)},$$

или, окончательно,

$$\frac{\omega}{\omega + x} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{\omega^n} + \frac{(-x)^{N+1}}{\omega^N (\omega + x)}. \quad (1.65)$$

Умножая (1.65) на $\exp(-x)$ и интегрируя полученный результат от $x = 0$ до $x = \infty$, получаем

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\omega e^{-x}}{\omega + x} dx = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\omega^n} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx + R_N(\omega),$$

или

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n n!}{\omega^n} + R_N(\omega). \quad (1.66)$$

где остаток

$$R_N(\omega) = \frac{(-1)^{N+1}}{\omega^N} \int_0^{\infty} \frac{x^{N+1} e^{-x}}{\omega + x} dx \quad (1.67)$$

является, очевидно, функцией ω и N .

Теперь вместо того, чтобы применять признак Даламбера, мы можем заняться исследованием поведения $R_N(\omega)$ при фиксированном ω и $N \rightarrow \infty$. При этом для сходимости ряда необходимо, чтобы $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. В нашем примере это не так: на самом деле

$R_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, так что ряд расходится для всех значений ω , в полном соответствии с результатом, полученным по признаку Даламбера. Следовательно, для того чтобы можно было воспользоваться рядом (1.66), нужно зафиксировать число N и исследовать поведение $R_N(\omega)$ при фиксированном N . Для этого попытаемся оценить величину $R_N(\omega)$.

Так как ω и x положительны, то

$$\frac{1}{\omega + x} < \frac{1}{x}$$

и значит

$$|R_N(\omega)| = \frac{1}{\omega^N} \int_0^{\infty} \frac{x^{N+1} e^{-x}}{\omega + x} dx < \frac{1}{\omega^N} \int_0^{\infty} x^N e^{-x} dx = \frac{N!}{\omega^N}. \quad (1.68)$$

Итак, ошибка, обусловленная усечением исходного ряда на N -м члене, численно не превосходит первого отброшенного члена, а именно $(N+1)$ -го. Более того, при фиксированном N и $\omega \rightarrow \infty$ имеем $R_N \rightarrow 0$. Поэтому хотя ряд (1.64) и расходится, но для фиксированного N первые N членов этого ряда могут представлять функцию $f(\omega)$ с ошибкой, которая может быть сделана произвольно малой с помощью выбора достаточно большого значения ω . Такой ряд называется асимптотическим рядом типа Пуанкаре и обозначается как

$$f(\omega) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\omega^n}. \quad (1.69)$$

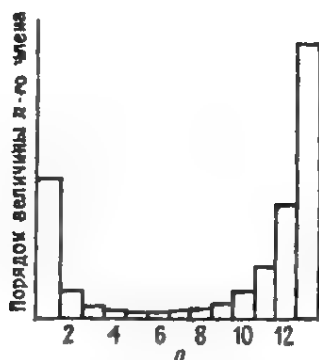


Рис. 1.4. Поведение членов расходящегося асимптотического ряда.

Вообще для заданного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n/\omega^n)$, где a_n не зависит от ω , мы говорим, что он является *асимптотическим рядом*, и пишем

$$f(\omega) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty \quad (1.70)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\omega^n} + o\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (1.71)$$

При этом из (1.71) следует, что

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\omega^n} + \frac{a_N}{\omega^N} + o\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty,$$

так что условие (1.71) можно переписать в виде

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\omega^n} + O\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (1.72)$$

Необходимо отметить, что полезность асимптотических рядов основана на том факте, что ошибка, совершаемая при усечении ряда, по определению имеет порядок величины первого отброшенного члена и, следовательно, быстро стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. В приложениях обычно фиксируют достаточно большое значение ω и пытаются минимизировать ошибку увеличением числа членов ряда. Однако если ряд расходится, то в конце концов достигается точка, за которой добавление новых членов лишь увеличивает ошибку (рис. 1.4). Таким образом, для каждого заданного значения ω существует оптимальное значение N , при котором ошибка

будет наименьшей. На практике только в редких случаях вычисляют более одного-двух членов разложения, и поэтому нет необходимости заботиться о сходимости получающегося ряда. В тех же случаях, когда требуется подсчитать достаточно много членов ряда, их обычно получают посредством тех или иных алгебраических операций, проводимых на ЭВМ. Затем ряд исследуется на аналитичность, после чего он соответствующим образом преобразуется с целью улучшения его свойств — например, с помощью подстановок типа рациональных дробей, использования естественных координат или преобразования Эйлера. Вопросы преобразования расходящихся рядов в этой книге не рассматриваются, а читателей, интересующихся этой проблемой, мы отсылаем к монографии Ван-Дайка (1975) и содержащейся в ней библиографии.

1.6. Асимптотические разложения и последовательности

Как указывалось в § 1.3, существует множество функций, чье поведение не может быть описано рядами по степеням малого параметра. Более того, мы установили, что степени ε следует дополнить другими калибровочными функциями — логарифмом, экспонентой, логарифмом логарифма и т. д. Вместе с тем для асимптотического представления заданной функции вовсе не обязательно ограничиваться перечисленными функциями сравнения. Вместо них можно воспользоваться произвольной последовательностью функций общего вида $\delta_n(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию

$$\delta_n(\varepsilon) = o[\delta_{n-1}(\varepsilon)] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.73)$$

Такая последовательность называется *асимптотической последовательностью*. Примерами асимптотических последовательностей являются

$$\varepsilon^n, \quad \varepsilon^{n/3}, \quad (\ln \varepsilon)^{-n}, \quad (\sin \varepsilon)^n, \quad (\operatorname{ctg} \varepsilon)^{-n}. \quad (1.74)$$

В терминах асимптотических последовательностей мы можем определить и асимптотические разложения. Так, сумму вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon)$, где a_n не зависит от ε , а $\delta_n(\varepsilon)$ представляет собой асимптотическую последовательность, мы будем называть *асимптотическим разложением* функции $f(\varepsilon)$, если при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon)), \quad (1.75)$$

или, что то же самое,

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta_n(\varepsilon) + O(\delta_N(\varepsilon)), \quad (1.76)$$

записывая это соотношением

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.77)$$

Очевидно, что асимптотический ряд есть частный случай асимптотического разложения.

Отметим также, что асимптотическое представление заданной функции $f(\varepsilon)$ не единственно. В самом деле, функция $f(\varepsilon)$ может быть представлена бесконечным числом асимптотических разложений, поскольку существует бесконечное число асимптотических последовательностей, которые могут быть использованы для такого представления. Однако при задании последовательности функций $\delta_n(\varepsilon)$ асимптотическое представление функции $f(\varepsilon)$ с ее помощью оказывается уже единственным. Действительно, положим

$$f(\varepsilon) \sim a_0 \delta_0(\varepsilon) + a_1 \delta_1(\varepsilon) + a_2 \delta_2(\varepsilon) + \dots \quad (1.78)$$

Разделив (1.78) на $\delta_0(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{f(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} \sim a_0 + a_1 \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)} + \dots,$$

откуда, если устремить ε к нулю,

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\delta_0(\varepsilon)},$$

поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\delta_n(\varepsilon)/\delta_0(\varepsilon)] = 0$ для $n \geq 1$. Переносим член $a_0 \delta_0(\varepsilon)$ в левую часть и делим полученное соотношение на $\delta_1(\varepsilon)$, находим

$$\frac{f(\varepsilon) - a_0 \delta_0(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} \sim a_1 + a_2 \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} + \dots,$$

откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$a_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - a_0 \delta_0(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}.$$

Продолжая этот процесс, легко получить общую формулу

$$a_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}. \quad (1.79)$$

1.7. Сравнение сходящихся и асимптотических рядов

В гл. 13 мы получим два различных представления для функции Бесселя нулевого порядка $J_0(x)$, а именно

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (1.80)$$

II

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + v \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (1.81)$$

где

$$u(x) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots, \quad (1.82)$$

$$v(x) = \frac{1}{4 \cdot 2x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} + \dots. \quad (1.83)$$

Ряд (1.80) сходится абсолютно и равномерно для всех значений x , в то время как ряды для $u(x)$ и $v(x)$, а следовательно, и правая часть (1.81) расходятся для всех значений x . Однако при $x \rightarrow \infty$ слагаемые в u и v быстро убывают с ростом номера, так что представление (1.81) действительно будет асимптотическим, поскольку ошибка, совершаемая при обрывании рядов, имеет порядок первого отброшенного члена.

Для малых x первые несколько членов разложения (1.80) дают вполне приемлемую точность. В самом деле, первые девять членов дают значение $J_0(2)$ с точностью до 11 значащих цифр. Однако по мере возрастания x число членов, необходимых для обеспечения той же точности, быстро растет. При $x = 4$ восемь членов ряда дают точность до третьей значащей цифры, в то время как такую точность обеспечивает уже первый член асимптотического разложения (1.81). При дальнейшем росте x хорошую точность можно получать с гораздо меньшей затратой труда, именно используя расходящийся асимптотический ряд (1.81). Действительно, в случае очень больших x сходящийся ряд (1.80) оказывается совершенно бесполезным с вычислительной точки зрения из-за ограниченности разрядной сетки современных ЭВМ. Таким образом, любая попытка вычисления функции $J_0(x)$ при больших x с помощью ряда (1.80) потерпит неудачу, как только x окажется больше некоторого определенного значения; правда, это значение x во многом определяется искусством программиста.

1.8. Простейшие действия над асимптотическими разложениями

При построении приближенных решений алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений, а также при оценке интегралов мы предполагаем, что асимптотические разложения можно подставлять в уравнения и выполнять над ними простейшие действия, такие, как сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, интегрирование и дифференцирование. Иногда применение некоторых из этих операций оказывается необоснованным; в этом случае они приводят к *сингулярностям* или *неравномерностям*.

Например, равенство

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\varepsilon} &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{x} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2 + \dots\right] = \\ &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \dots\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.84)\end{aligned}$$

не обосновано при $\varepsilon/x = O(1)$, поскольку при этом второй, третий и последующие члены разложения становятся сравнимыми по порядку с первым его членом. Следовательно, ошибка, совершаемая в результате усечения ряда после N членов при $x = O(\varepsilon)$, уже не будет иметь порядок $O(\varepsilon^N)$, т. е. не будет порядка первого отброшенного члена, и мы говорим о *неравномерном разложении*. Аналогично, равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + \dots \quad (1.85)$$

не обосновано при $\varepsilon x = O(1)$, поскольку, по той же причине, правая часть его будет неравномерна при больших x . Таким образом, необходимо всегда проверять, являются ли полученные разложения равномерными или нет, — в этом, собственно говоря, и заключается одна из главных целей методов возмущений.

Упражнения

1.1. Найти первые три члена разложений следующих функций при малом ε :

а) $\left(1 - \frac{3}{8} a^2 \varepsilon + \frac{51}{256} a^4 \varepsilon^2\right)^{-1}$,

б) $\cos \sqrt{1 - \varepsilon t}$,

в) $\sqrt{1 - \frac{1}{2} \varepsilon + 2\varepsilon^2}$,

г) $\sin(1 + \varepsilon - \varepsilon^2)$.

1.2. Разложить каждое из следующих выражений при малом ε , сохранив три члена:

а) $\sqrt{1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t - \frac{1}{8} \varepsilon^4 t}$,

б) $(1 + \varepsilon \cos f)^{-1}$,

в) $(1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2)^{-2}$,

г) $\sin(s + \varepsilon \omega_1 s + \varepsilon^2 \omega_2 s)$,

д) $\sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon}}\right)$,

е) $\ln \frac{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt[3]{1 + 2\varepsilon}}$.

1.3. Пусть $\mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2$ и $h = \frac{3}{2} [1 - \sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}]$.

Разложить функцию h при малом ε , сохранив три члена.

1.4. Определить порядок функций при малых ε :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \ln(1 + \sin \varepsilon), \quad \ln(2 + \sin \varepsilon), \quad e^{\ln(1-\varepsilon)}.$$

1.5. Определить порядок следующих выражений при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad 4\pi^2\varepsilon, \quad 1000\varepsilon^{1/2}, \quad \ln(1+\varepsilon), \quad \frac{1-\cos \varepsilon}{1+\cos \varepsilon}, \quad \frac{\varepsilon^{3/2}}{1-\cos \varepsilon},$$

$$\operatorname{sech}^{-1} \varepsilon, \quad e^{\lg \varepsilon}, \quad \ln\left[1 + \frac{\ln(1+2\varepsilon)}{\varepsilon(1-2\varepsilon)}\right], \quad \ln\left[1 + \frac{\ln \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon}\right],$$

$$e^{-\operatorname{ch}(1/\varepsilon)}, \quad \int_0^\varepsilon e^{-s^2} ds.$$

1.6. Определить порядок следующих выражений при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\ln(1+5\varepsilon), \quad \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sin \varepsilon}, \quad 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \cos \varepsilon, \quad \ln\left(\operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

1.7. Определить порядок следующих функций при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\ln(\operatorname{ctg} \varepsilon), \quad \operatorname{cth}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\varepsilon^{3/4}}{1-\cos \varepsilon}, \quad \ln\left[1 + \ln \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\right].$$

1.8. Расположить следующие выражения в ряд по порядку убывания при малых ε :

$$\varepsilon^2, \quad \varepsilon^{1/2}, \quad \ln(\ln \varepsilon^{-1}), \quad 1, \quad \varepsilon^{1/2} \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ln \varepsilon^{-1},$$

$$\varepsilon^{-1/\varepsilon}, \quad \ln \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^{3/2}, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1}.$$

1.9. Расположить следующие выражения в ряд по порядку убывания при малых ε :

$$\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon^{-1/100}, \quad \operatorname{ctg} \varepsilon, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

1.10. Расположить следующие выражения в ряд по порядку убывания при малых ε :

$$\ln(1+\varepsilon), \quad \operatorname{ctg} \varepsilon, \quad \operatorname{th}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon^{3/4}},$$

$$\varepsilon \ln \varepsilon, \quad \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \ln^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

1.11. Расположить следующие функции в порядке убывания при малых ε :

$$\varepsilon^{-1/\varepsilon}, \quad \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon^{1/2}, \quad \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2, \quad \varepsilon^{1/2} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon^{1/\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}, \quad 1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^{3/2}, \quad \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}, \quad \varepsilon^{1/\varepsilon}, \quad \varepsilon^{-1/\varepsilon}, \quad \ln\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\varepsilon^{0.0001}, \quad \varepsilon^{-0.0001}, \quad \varepsilon^{0.0001} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad 5^{1/\varepsilon}, \quad 5^{-1/\varepsilon}.$$

1.12. Расположить следующие функции в ряд по порядку убывания при малых ε :

$$\varepsilon^\nu, \quad \varepsilon^{-\nu}, \quad \varepsilon^\mu, \quad \varepsilon^{-\mu}, \quad 1, \quad \varepsilon^{3/2}, \quad \varepsilon^{-3/2}, \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right], \quad \left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^2, \quad \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon/\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon,$$

где $\nu = 10^{-100}$ и $\mu = 10^{100}$.

1.13. Расположить следующие выражения в порядке убывания при малых ε :

$$\ln(1 + \varepsilon), \quad \operatorname{sech}^{-1} \varepsilon, \quad \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon}, \quad \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \quad e^{-\operatorname{ch}(1/\varepsilon)},$$

$$\ln\left[1 + \frac{\ln \frac{1 + 2\varepsilon}{\varepsilon}}{1 - 2\varepsilon}\right], \quad \ln\left[1 + \frac{\ln(1 + 2\varepsilon)}{\varepsilon(1 - 2\varepsilon)}\right], \quad \frac{\varepsilon^{1/2}}{1 - \cos \varepsilon}.$$

1.14. Какие из следующих разложений по параметру не являются равномерно пригодными для всех значений аргумента? Каковы области их неравномерности?

$$a) \sqrt{2} \, t(x, \varepsilon) = \frac{2}{3} x^{3/2} + \varepsilon \left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) +$$

$$+ O\left(\frac{\varepsilon^3}{1 - x}\right);$$

$$б) \eta(x, \varepsilon) = \varepsilon \cos x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{1 + \gamma^2}{1 - 2\gamma^2} \cos 2x +$$

$$+ \frac{3}{16} \varepsilon^3 \frac{2\gamma^4 + 7\gamma^2 + 2}{(1 - 2\gamma^2)(1 - 3\gamma^2)} \cos 3x + O(\varepsilon^4);$$

$$в) \sigma(k, \varepsilon) = \sqrt{k^2 - 1} - \frac{\varepsilon^2 k^2}{\sqrt{k^2 - 1}} + O(\varepsilon^3);$$

$$г) f(x, \varepsilon) = 1 - \varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^3 + O(\varepsilon^4);$$

$$д) u(t, \varepsilon) = a \cos\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2\right) t + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2\right) t + O(\varepsilon^2);$$

$$е) u(t, \varepsilon) = a \cos t + \frac{\varepsilon a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \cos 3t - 3t \sin t \right) + O(\varepsilon^2);$$

$$ж) c(\tau, \varepsilon) = 1 + \frac{2\varepsilon}{\tau - 1} + \frac{3\varepsilon^2}{(\tau - 1)^2} + O(\varepsilon^3);$$

$$з) y(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{x^2(1-x)}} \cos \left[\lambda \int_0^x \sqrt{x(1-x)} \, dx \right] + O(1) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty;$$

$$и) f(x, \varepsilon) = \sin x + \varepsilon \cos x - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin x - \frac{1}{6} \varepsilon^3 \cos x + O(\varepsilon^4).$$

АЛГЕБРАНЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы займемся исследованием алгебранных уравнений, зависящих от малого параметра. Их приближенные решения будут строиться в виде некоторых разложений, которые в этом случае называются возмущениями по параметру. Сначала разберем этот метод для уравнений второго порядка, поскольку для них в целях сравнения можно легко воспользоваться точными решениями. Далее, в § 2.2 мы исследуем кубические уравнения, в § 2.3 — уравнения высших порядков и, наконец, в § 2.4 — некоторые трансцендентные уравнения.

2.1. Квадратные уравнения

Начнем с анализа квадратных уравнений и рассмотрим несколько простых примеров, сравнивая полученные разложения с точными решениями.

Пример 1

Будем искать корни уравнения

$$x^2 - (3 + 2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0 \quad (2.1)$$

при малом ε . В случае $\varepsilon = 0$ имеем уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) = 0 \quad (2.2)$$

с корнями $x = 1$ и $x = 2$. Уравнение (2.1) называется *возмущенным уравнением*, а (2.2) — *невозмущенным* или *вырожденным уравнением*. При малом, но конечном ε естественно ожидать, что корни уравнения (2.1) будут лишь немного отличаться от значений 1 и 2.

Первый шаг при нахождении приближенного решения заключается в выборе формы разложения. В нашем случае предположим, что искомые корни можно представить в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (2.3)$$

где многоточие заменяет слагаемые со степенями ε , для которых показатель степени $n \geq 3$. В большинстве приложений определяют только один или два члена разложения, поскольку вычисление членов высших порядков оказывается весьма громоздким; по

возможности подобные расчеты стараются проводить с помощью ЭВМ. Однако следует отметить, что во многих физических задачах, особенно нелинейных, нахождение членов высших порядков оказывается достаточно сложной процедурой даже при использовании ЭВМ. В этой книге мы будем ограничиваться рассмотрением лишь нескольких первых членов соответствующих разложений. Обычно первый член разложения x_0 называют членом нулевого порядка, второй, т. е. ϵx_1 , — членом первого порядка и т. д. Иными словами, порядок соответствующего члена определяется видом функции сравнения, а не его порядковым номером в асимптотическом разложении.

Второй шаг заключается в подстановке выбранного разложения (2.3) в исходное уравнение (2.1), что дает

$$(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^3 - (3 + 2\epsilon)(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) + 2 + \epsilon = 0. \quad (2.4)$$

Третий шаг представляет собой выполнение элементарных операций типа сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и т. д. и, наконец, группировку коэффициентов при одинаковых степенях ϵ . Используя для разложения первого члена биномиальную формулу, получаем

$$\begin{aligned} (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 &= x_0^2 + 2x_0(\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) + \\ &+ (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 = x_0^2 + 2\epsilon x_0 x_1 + 2\epsilon^2 x_0 x_2 + \\ &+ \epsilon^2 x_1^2 + 2\epsilon^3 x_1 x_2 + \epsilon^4 x_2^2 + \dots = x_0^2 + 2\epsilon x_0 x_1 + \epsilon^2 (2x_0 x_2 + x_1^2) + \dots; \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь в соответствии с выбранной формой разложения (2.3) сохранены лишь члены порядка ϵ^2 . Если бы мы искали разложение с точностью до членов порядка ϵ^n , где $n \geq 3$, то в выражении (2.5) следовало бы сохранить члены того же порядка. Выполнив умножение во втором члене в (2.4), находим

$$\begin{aligned} (3 + 2\epsilon)(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) &= 3x_0 + 3\epsilon x_1 + 3\epsilon^2 x_2 + 2\epsilon x_0 + \\ &+ 2\epsilon^2 x_1 + 2\epsilon^3 x_2 + \dots = 3x_0 + \epsilon(3x_1 + 2x_0) + \\ &+ \epsilon^2(3x_2 + 2x_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь также в соответствии с выбранной формой исходного разложения сохранены лишь члены порядка ϵ^2 . Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), имеем

$$\begin{aligned} x_0^2 + 2\epsilon x_0 x_1 + \epsilon^2 (2x_0 x_2 + x_1^2) - 3x_0 - \epsilon(3x_1 + 2x_0) - \\ - \epsilon^2 (3x_2 + 2x_1) + 2 + \epsilon + \dots = 0. \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , получаем

$$\begin{aligned} (x_0^2 - 3x_0 + 2) + \epsilon(2x_0 x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1) + \\ + \epsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Четвертый шаг состоит в приравнивании нулю коэффициентов при последовательных степенях ε . Для оправдания этого шага устремим ε к нулю в выражении (2.7). В результате получим уравнение

$$x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0, \quad (2.8)$$

а (2.7) примет вид

$$\varepsilon(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1) + \varepsilon^2(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1) + \dots = 0.$$

Разделив на ε , приходим к равенству

$$(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1) + \varepsilon(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1) + \dots = 0, \quad (2.9)$$

которое при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0. \quad (2.10)$$

При этом (2.9) переходит в равенство

$$\varepsilon(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1) + \dots = 0,$$

или после деления на ε

$$2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 + O(\varepsilon) = 0. \quad (2.11)$$

Устремив в (2.11) ε к нулю, получаем

$$2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 = 0. \quad (2.12)$$

Отметим, что соотношения (2.8), (2.10) и (2.12) можно получить непосредственно из формулы (2.7), приравняв нулю коэффициенты при последовательных степенях ε .

Пятый шаг состоит в последовательном решении упрощенных уравнений (2.8), (2.10) и (2.12). Уравнение (2.8) совпадает с вырожденным уравнением (2.2), и, следовательно, его решениями будут

$$x_0 = 1, 2.$$

Зная x_0 , из уравнения (2.10) мы можем найти x_1 . Отметим, что (2.10) линейно относительно x_1 . Практически в большинстве задач уравнения каждого приближения также оказываются линейными, за исключением, быть может, первого. В случае $x_0 = 1$ уравнение (2.10) дает

$$x_1 + 1 = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = -1.$$

Зная x_0 и x_1 , можно разрешить уравнение (2.12) относительно x_2 . При $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ из уравнения (2.12) получаем

$$x_2 - 3 = 0, \quad \text{или} \quad x_2 = 3.$$

В случае $x_0 = 2$ из (2.10) находим

$$x_1 - 3 = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = 3,$$

а из (2.12)

$$x_2 + 3 = 0, \quad \text{или} \quad x_2 = -3.$$

Последний шаг заключается в подстановке полученных значений x_0 , x_1 и x_2 в исходное разложение (2.3). При $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ это разложение приобретает вид

$$x = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots, \quad (2.13)$$

а при $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$ разложение (2.3) можно представить как

$$x = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \dots \quad (2.14)$$

Формулы (2.13) и (2.14) дают нам приближенные выражения для обоих корней уравнения (2.1). Для того чтобы выяснить, насколько удачны эти приближения, сравним их с точным решением

$$x = \frac{1}{2} [3 + 2\varepsilon \mp \sqrt{(3 + 2\varepsilon)^2 - 4(2 + \varepsilon)}],$$

или

$$x = \frac{1}{2} [3 + 2\varepsilon \mp \sqrt{1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2}]. \quad (2.15)$$

Используя биномиальную формулу, получаем

$$\begin{aligned} (1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}(8\varepsilon + 4\varepsilon^2) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(8\varepsilon + 4\varepsilon^2)^2 + \dots = \\ &= 1 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \frac{1}{8}(64\varepsilon^2 + \dots) = 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \dots, \end{aligned}$$

что при подстановке в (2.15) дает

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 + 2\varepsilon + 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \dots), \\ \frac{1}{2}(3 + 2\varepsilon - 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + \dots), \end{cases}$$

или

$$x = \begin{cases} 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \dots, \\ 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots, \end{cases} \quad (2.16)$$

в полном согласии с (2.13) и (2.14)

Пример 2

В качестве второго примера исследуем уравнение, разложения для корней которого могут включать в себя не только целые, но и дробные степени параметра ε . Так, рассмотрим уравнение

$$(x - 1)(x - \tau) = -\varepsilon x. \quad (2.17)$$

При $\varepsilon = 0$ оно сводится к уравнению

$$(x - 1)(x - \tau) = 0,$$

имеющему корни $x = 1$ и $x = \tau$. Исходя из этого, будем искать приближения для корней уравнения (2.17) в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.18)$$

Здесь мы вновь ограничиваемся членами порядка ε^2 , и поэтому разложение (2.18) будем называть разложением второго порядка. Подставляя (2.18) в (2.17), получаем

$$(x_0 - 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)(x_0 - \tau + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = \\ = -\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots),$$

что после перемножения дает

$$(x_0 - 1)(x_0 - \tau) + \varepsilon(x_0 - 1)x_1 + \varepsilon^2(x_0 - 1)x_2 + \varepsilon(x_0 - \tau)x_1 + \\ + \varepsilon^2 x_1^2 + \varepsilon^2(x_0 - \tau)x_2 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots = 0.$$

Объединяя члены с одинаковыми степенями ε , имеем

$$(x_0 - 1)(x_0 - \tau) + \varepsilon[(2x_0 - 1)x_1 + x_0] + \\ + \varepsilon^2[(2x_0 - 1 - \tau)x_2 + x_1^2 + x_1] + \dots = 0. \quad (2.19)$$

Как и ранее в соответствии с выбранной формой разложения, мы сохраняем лишь члены до порядка ε^2 . Приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε в соотношении (2.19), получаем

$$(x_0 - 1)(x_0 - \tau) = 0, \quad (2.20)$$

$$(2x_0 - 1 - \tau)x_1 + x_0 = 0, \quad (2.21)$$

$$(2x_0 - 1 - \tau)x_2 + x_1^2 + x_1 = 0, \quad (2.22)$$

что позволяет последовательно найти значения x_0 , x_1 и x_2 .

Решение уравнения (2.20) дает

$$x_0 = 1 \quad \text{или} \quad x_0 = \tau.$$

При $x_0 = 1$ (2.21) переписывается в виде

$$(1 - \tau)x_1 + 1 = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = -\frac{1}{1 - \tau}.$$

Далее, из (2.22) находим

$$(1 - \tau)x_2 = -\frac{1}{(1 - \tau)^2} + \frac{1}{1 - \tau} = -\frac{\tau}{(1 - \tau)^2}, \\ \text{или} \quad x_2 = -\frac{\tau}{(1 - \tau)^2}.$$

Таким образом, один из корней можно представить разложением

$$x = 1 - \frac{\varepsilon}{1 - \tau} - \frac{\varepsilon^2 \tau}{(1 - \tau)^2} + \dots \quad (2.23)$$

При $x_0 = \tau$ (2.21) переписывается в виде

$$(\tau - 1)x_1 + \tau = 0, \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{\tau}{1 - \tau},$$

а из соотношения (2.22) имеем

$$(\tau - 1)x_2 = -\frac{\tau}{1 - \tau} - \frac{\tau^2}{(1 - \tau)^2} = -\frac{\tau}{(1 - \tau)^2},$$

или

$$x_2 = \frac{\tau}{(1-\tau)^2}.$$

Тем самым второй корень исходного уравнения дается разложением

$$x = \tau + \frac{\varepsilon\tau}{1-\tau} + \frac{\varepsilon^2\tau}{(1-\tau)^2} + \dots \quad (2.24)$$

Выражения (2.23) и (2.24) показывают, что при $\tau \rightarrow 1$ полученные разложения перестают быть *справедливыми* (они оказываются *неравномерными*), поскольку в этом случае «поправки» к решению вырожденного уравнения будут стремиться к бесконечности. Фактически же для того, чтобы построенные разложения действительно оказались *непригодными*, τ не обязательно должно строго равняться единице. Дело в том, что эти разложения нарушаются всякий раз, когда члены первого и последующих порядков становятся сравнимыми по величине с членом нулевого порядка, так как в этом случае поправки к члену нулевого порядка будут уже не малыми, в противоположность предположению, лежащему в основе описываемого метода. Чтобы определить порядок величин $\tau - 1$, для которых разложения (2.23), (2.24) оказываются *непригодными* (т. е. найти *область их неравномерности*), установим условия, при которых последовательные члены разложения имеют *одинаковый* порядок. Так, из формулы (2.23) следует, что нулевой и первый члены этого разложения оказываются одного и того же порядка, когда

$$\frac{\varepsilon}{1-\tau} = O(1), \quad \text{или} \quad 1-\tau = O(\varepsilon),$$

в то время как первый и второй члены будут иметь *одинаковый* порядок, когда

$$\frac{\varepsilon}{1-\tau} = O\left[\frac{\varepsilon^2}{(1-\tau)^2}\right], \quad \text{или} \quad (1-\tau)^2 = O(\varepsilon),$$

или же

$$1-\tau = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Поскольку для малых ε $\varepsilon^{1/2}$ больше, чем ε , то областью *неравномерности* будет наибольшая из указанных двух областей, т. е. она будет даваться соотношением $1-\tau = O(\varepsilon^{1/2})$.

Как отмечалось в гл. 1, *неравномерности* в разложениях возникают тогда, когда при построении этих разложений необоснованно используется та или иная элементарная операция. Для того чтобы выяснить, какая это операция, обратимся к точному решению. С этой целью перепишем (2.17) в виде

$$x^2 - x - \tau x + \tau + \varepsilon x = 0,$$

или

$$x^2 - (1 + \tau - \varepsilon)x + \tau = 0.$$

Корни этого уравнения даются формулой

$$x = \frac{1}{2} [1 + \tau - \varepsilon \pm \sqrt{(1 + \tau - \varepsilon)^2 - 4\tau}],$$

или

$$x = \frac{1}{2} [1 + \tau - \varepsilon \pm \sqrt{(1 - \tau)^2 - 2\varepsilon(1 + \tau) + \varepsilon^2}]. \quad (2.25)$$

Далее, разложим (2.25) в случае малых ε и сравним результат с (2.23) и (2.24). Используя биномиальную формулу, получаем

$$\begin{aligned} [(1 - \tau)^2 - 2\varepsilon(1 + \tau) + \varepsilon^2]^{1/2} &= (1 - \tau) \left[1 - \frac{2\varepsilon(1 + \tau) - \varepsilon^2}{(1 - \tau)^2} \right]^{1/2} = \\ &= (1 - \tau) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon(1 + \tau) - \varepsilon^2}{(1 - \tau)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \frac{[2\varepsilon(1 + \tau) - \varepsilon^2]^2}{(1 - \tau)^4} + \dots \right\} = \\ &= (1 - \tau) \left[1 - \frac{\varepsilon(1 + \tau)}{(1 - \tau)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2(1 - \tau)^3} - \frac{1}{8} \frac{4\varepsilon^3(1 + \tau)^2}{(1 - \tau)^4} + \dots \right] = \\ &= (1 - \tau) \left[1 - \frac{\varepsilon(1 + \tau)}{(1 - \tau)^2} - \frac{2\varepsilon^2\tau}{(1 - \tau)^3} + \dots \right], \quad (2.26) \end{aligned}$$

где вновь в соответствии с видом искомого разложения сохранены лишь члены порядка ε^3 . Подставляя (2.26) в (2.25), с учетом положительного знака перед радикалом для одного из корней получаем

$$x = \frac{1}{2} \left[1 + \tau - \varepsilon + 1 - \frac{\varepsilon(1 + \tau)}{1 - \tau} - \frac{2\varepsilon^2\tau}{(1 - \tau)^3} + \dots \right],$$

или

$$x = 1 - \frac{\varepsilon}{1 - \tau} - \frac{\varepsilon^2\tau}{(1 - \tau)^3} + \dots, \quad (2.27)$$

в полном соответствии с (2.23). Подставляя (2.26) в (2.25), с учетом отрицательного знака перед радикалом для второго корня имеем

$$x = \frac{1}{2} \left[1 + \tau - \varepsilon - 1 + \tau + \frac{\varepsilon(1 + \tau)}{1 - \tau} + \frac{2\varepsilon^2\tau}{(1 - \tau)^3} + \dots \right],$$

или

$$x = \tau + \frac{\varepsilon\tau}{1 - \tau} + \frac{\varepsilon^2\tau}{(1 - \tau)^3} + \dots, \quad (2.28)$$

в полном соответствии с (2.24).

При выводе формул (2.27) и (2.28) из точного решения мы выполнили возведение в степень в (2.26), а также сложение и вычитание в (2.27) и (2.28). Сложение и вычитание являются обычно обоснованными операциями, так что «подозрительной» представляется операция возведения в степень. Действительно, при аппрокси-

мации $(1 - u)^{1/2}$ разложением вида $1 - \frac{1}{2}u + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}u^2 + \dots$ мы неявно предположили, что $|u| < 1$. В нашем примере величина

$$u = \frac{2\varepsilon(1 + \tau) - \varepsilon^2}{(1 - \tau)^2} \quad (2.29)$$

мала по сравнению с единицей, только если τ не слишком близко к единице. В случае же $\tau = 1$ u обращается в бесконечность независимо от того, насколько мало ε , лишь бы оно было отличным от нуля. Поэтому из (2.29) следует, что биномиальное разложение становится непригодным, когда $u = O(1)$, или $(1 - \tau)^2 = O(\varepsilon)$, или же $1 - \tau = O(\varepsilon^{1/2})$.

Следовательно, для получения равномерно пригодного разложения в случае, когда $1 - \tau = O(\varepsilon^{1/2})$, нам необходимо видоизменить описанную выше методику с учетом этого обстоятельства. Это можно осуществить, если ввести так называемый «параметр расстройки», определяемый соотношением

$$1 - \tau = \varepsilon^{1/2}\sigma, \quad (2.30)$$

где σ не зависит от ε . Подставляя (2.30) в (2.17), имеем

$$(x - 1)(x - 1 + \varepsilon^{1/2}\sigma) = -\varepsilon x. \quad (2.31)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2.31) сводится к уравнению $(x - 1)^2 = 0$, имеющему двукратный корень $x = 1$. Этот факт, а также наличие в уравнении (2.31) множителя $\varepsilon^{1/2}$ дают возможность предположить, что искомое разложение следует искать в виде

$$x = 1 + \varepsilon^{1/2}x_1 + \varepsilon x_2 + \dots \quad (2.32)$$

Мы ограничимся вычислением лишь члена порядка $\varepsilon^{1/2}$, поскольку построение высших приближений представляется очевидным. Подстановка первых двух членов разложения (2.32) в (2.31) дает

$$(\varepsilon^{1/2}x_1 + \dots)(\varepsilon^{1/2}x_1 + \varepsilon^{1/2}\sigma + \dots) = -\varepsilon(1 + \varepsilon^{1/2}x_1 + \dots),$$

или

$$\varepsilon x_1 + \varepsilon \sigma x_1 + \varepsilon + \dots = 0,$$

что приводит к уравнению

$$x_1^2 + \sigma x_1 + 1 = 0,$$

корни которого записываются как

$$x_1 = \frac{1}{2}(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4}).$$

Таким образом, корни уравнения (2.17) в этом случае даются разложениями

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4}) + \dots, \\ x &= 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4}) + \dots, \end{aligned} \quad (2.33)$$

равномерными при $\sigma = 0$ или $\tau = 1$.

Пример 3.

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x^2 + x + 1 = 0, \quad (2.34)$$

в котором малый параметр стоит множителем при наибольшей степени x . Когда $\varepsilon \rightarrow 0$, уравнение (2.34) вырождается в уравнение первого порядка

$$x + 1 = 0, \quad (2.35)$$

имеющее только один корень. Таким образом, величина x претерпевает разрыв при $\varepsilon = 0$. Такую задачу принято называть *задачей сингулярных возмущений*.

Уравнение (2.35) дает возможность предположить, что один из его корней следует искать в виде разложения

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \quad (2.36)$$

Для упрощения вычислений мы ограничимся нахождением только членов первого порядка. Подставляя (2.36) в (2.34), имеем

$$\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + 1 = 0,$$

или

$$\varepsilon (x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1) + x_0 + \varepsilon x_1 + 1 + \dots = 0,$$

или же

$$x_0 + 1 + \varepsilon (x_1 + x_0^2) + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 0, \\ x_1 + x_0^2 = 0, \end{cases}$$

из которой можно последовательно найти x_0 и x_1 . В частности, $x_0 = -1$ и $x_1 = -x_0^2 = -1$, что дает для одного из корней

$$x = -1 - \varepsilon + \dots \quad (2.37)$$

Как и следовало ожидать, описанная выше методика позволяет найти только один корень уравнения (2.34). В целях разработки модифицированной процедуры, позволяющей определить второй корень этого уравнения, обратимся к его точному решению:

$$x = \frac{1}{2\varepsilon} (-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}). \quad (2.38)$$

Используя биномиальную формулу, получаем

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon} = 1 - 2\varepsilon + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (-4\varepsilon)^2 + \dots = 1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (2.38) с положительным знаком перед радикалом, имеем для одного из корней уравнения

$$x = \frac{-1 + 1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots}{2\varepsilon} = -1 - \varepsilon + \dots, \quad (2.40)$$

в полном соответствии с (2.37). Подставляя (2.39) в (2.38) с отрицательным знаком перед радикалом, для второго корня исходного уравнения находим

$$x = \frac{-1 - 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + \dots}{2\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon + \dots. \quad (2.41)$$

Таким образом, оба корня описываются разложениями по степеням ε , но одно из них начинается с члена порядка ε^{-1} . Не удивительно поэтому, что выбранная форма искомого разложения не позволяет найти корень (2.41). Очевидно, что без знания особенностей структуры второго корня оказывается невозможным определить его с помощью традиционной техники возмущений. Однако в общем случае, когда точное решение не известно, характер корней также заранее не известен и должен определяться в процессе нахождения решения. Вместе с тем ясно, что при сохранении порядка исходного уравнения второй корень становится неограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$, и поэтому старший член разложения следует искать в виде

$$x = \frac{y}{\varepsilon^v} + \dots \quad (2.42)$$

с положительным v , определяемым в процессе дальнейшего решения. Подставляя теперь (2.42) в (2.34), имеем

$$\varepsilon^{1-2v}y^2 + \varepsilon^{-v}y + 1 + \dots = 0. \quad (2.43)$$

Далее, выделим в (2.43) члены, играющие определяющую роль. Для восстановления структуры второго корня мы должны сохранить первый член $\varepsilon^{1-2v}y^2$; в противном случае мы будем вынуждены сразу же остановиться. Так как $v > 0$, то второй член много больше 1 и, следовательно, главная часть (2.43) будет

$$\varepsilon^{1-2v}y^2 + \varepsilon^{-v}y = 0. \quad (2.44)$$

При этом степени ε в обоих слагаемых соотношения (2.44) должны быть одинаковы, т. е.

$$1 - 2v = -v, \quad \text{или} \quad v = 1,$$

для y , отличных от нуля. Затем из (2.44) получаем

$$y = 0 \quad \text{или} \quad y = -1.$$

Значение $y = 0$ соответствует первому корню (2.37), поскольку в области O (ε^{-1}) он оказывается равным нулю; значение $y = -1$ соответствует второму корню исходного уравнения. Тем самым из

(2.42) следует, что первое приближение для второго корня можно записать как

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + \dots,$$

в полном соответствии с (2.41). Для определения следующих членов в разложении для второго корня попытаемся искать его в виде

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots \quad (2.45)$$

Подстановка (2.45) в (2.34) дает

$$\varepsilon \left(-\frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} + x_0 + \dots + 1 = 0,$$

или

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2x_0}{\varepsilon} + x_0^2 + \dots \right) - \frac{1}{\varepsilon} + x_0 + 1 + \dots = 0,$$

или же

$$-2x_0 + x_0^2 + 1 + O(\varepsilon) = 0.$$

Отсюда $x_0 = 1$, и разложение (2.45) приобретает вид

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \dots,$$

в полном соответствии с (2.41).

С другой стороны, как только величина ν определена, можно рассматривать (2.42) как преобразование переменной x к переменной y . Тогда, полагая в (2.34) $x = y/\varepsilon$, получаем уравнение

$$y^2 + y + \varepsilon = 0, \quad (2.46)$$

из которого могут быть найдены оба корня, поскольку параметр ε уже не входит множителем в член высшего порядка.

2.2. Кубические уравнения

В этом параграфе мы также рассмотрим три примера. В первом примере корни уравнения представляются в виде ряда по целым степеням малого параметра ε , корни второго уравнения выражаются в виде ряда по дробным степеням ε , а часть корней в третьем примере включает в себя обратные степени параметра.

Пример 1

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - (6 + \varepsilon)x^2 + (11 + 2\varepsilon)x - 6 + \varepsilon^3 = 0 \quad (2.47)$$

и попытаемся воспользоваться разложением по целым степеням ε

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \quad (2.48)$$

Подстановка (2.48) в (2.47) дает

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3 - (6 + \varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 + \\ + (11 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) - 6 + \varepsilon^2 = 0,$$

или

$$x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 - (6 + \varepsilon)(x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1) + \\ + (11 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1) - 6 + \varepsilon^2 + \dots = 0,$$

или же

$$x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 - 6x_0^2 - 12\varepsilon x_0 x_1 - \varepsilon x_0^2 + \\ + 11x_0 + 11\varepsilon x_1 + 2\varepsilon x_0 - 6 + \dots = 0.$$

Группируя члены с одинаковыми степенями ε , получаем

$$x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6 + \varepsilon(3x_0^2 x_1 - 12x_0 x_1 + \\ + 11x_1 - x_0^2 + 2x_0) + \dots = 0,$$

где в соответствии с видом выбранного разложения сохранены лишь члены порядка ε . Приравняв нулю коэффициенты при ε^0 и ε^1 , имеем

$$x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6 = 0, \quad (2.49)$$

$$3x_0^2 x_1 - 12x_0 x_1 + 11x_1 - x_0^2 + 2x_0 = 0. \quad (2.50)$$

Уравнение (2.49) можно представить в виде произведения

$$(x_0 - 1)(x_0 - 2)(x_0 - 3) = 0,$$

что дает

$$x_0 = 1, \quad x_0 = 2, \quad x_0 = 3.$$

Из (2.50) следует, что

$$(3x_0^2 - 12x_0 + 11)x_1 = x_0^2 - 2x_0,$$

откуда

$$x_1 = (x_0^2 - 2x_0)/(3x_0^2 - 12x_0 + 11). \quad (2.51)$$

При $x_0 = 1$ из (2.51) получаем, что $x_1 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, один из корней исходного уравнения дается разложением

$$x = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$$

При $x_0 = 2$ из (2.51) получаем, что $x_1 = 0$. Следовательно, разложение для второго корня можно записать как

$$x = 2 + 0 \cdot \varepsilon + \dots$$

При $x_0 = 3$ из (2.51) получаем, что $x_1 = \frac{3}{2}$. Исходя из этого, третий корень представляется в виде разложения

$$x = 3 + \frac{3}{2}\varepsilon + \dots$$

Таким образом, в данном случае разложения для всех корней содержат лишь целые степени ε .

Пример 2

В качестве второго примера исследуем уравнение

$$x^3 - (4 + \varepsilon)x^2 + (5 - 2\varepsilon)x - 2 + \varepsilon^2 = 0. \quad (2.52)$$

Как и в предыдущем случае, попытаемся воспользоваться разложением вида

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \quad (2.53)$$

Подстановка (2.53) в (2.52) дает

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3 - (4 + \varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 + (5 - 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) - 2 + \varepsilon^2 = 0$$

или

$$x_0^3 - 4x_0^2 + 5x_0 - 2 + \varepsilon(3x_0^2x_1 - 8x_0x_1 - x_0^2 + 5x_1 - 2x_0) + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$x_0^3 - 4x_0^2 + 5x_0 - 2 = 0, \quad (2.54)$$

$$3x_0^2x_1 - 8x_0x_1 - x_0^2 + 5x_1 - 2x_0 = 0. \quad (2.55)$$

Для того чтобы решить уравнение (2.54), представим его левую часть в виде произведения

$$(x_0 - 1)^2 (x_0 - 2) = 0,$$

откуда получаем

$$x_0 = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2.$$

Для того чтобы найти x_1 из (2.55), перепишем это уравнение в виде

$$(3x_0^2 - 8x_0 + 5)x_1 = x_0^2 + 2x_0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2x_0}{3x_0^2 - 8x_0 + 5}. \quad (2.56)$$

При $x_0 = 2$ из (2.56) следует, что $x_1 = 8$. Таким образом, один из корней исходного уравнения может быть представлен как

$$x = 2 + 8\varepsilon + \dots \quad (2.57)$$

При $x_0 = 1$ из (2.56) получаем $x_1 = \infty$, что указывает на ошибочность выбранной формы разложения.

Для построения разложения, пригодного при $x_0 = 1$, заменим разложение (2.53) на следующее:

$$x = 1 + \varepsilon^v x_1 + \varepsilon^{2v} x_2 + \dots, \quad v > 0 \quad (2.58)$$

и попытаемся найти значение v в ходе вычислений. Подставляя (2.58) в (2.52), имеем

$$(1 + \varepsilon^v x_1 + \varepsilon^{2v} x_2 + \dots)^3 - (4 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^v x_1 + \varepsilon^{2v} x_2 + \dots)^2 + \\ + (5 - 2\varepsilon)(1 + \varepsilon^v x_1 + \varepsilon^{2v} x_2 + \dots) - 2 + \dots = 0$$

или

$$1 + 3\varepsilon^v x_1 + 3\varepsilon^{2v} x_2 + 3\varepsilon^{2v} x_1^2 - 4 - 8\varepsilon^v x_1 - 8\varepsilon^{2v} x_2 - 4\varepsilon^{2v} x_1^2 - \varepsilon - \\ - 2\varepsilon^{1+v} x_1 + 5 + 5\varepsilon^v x_1 + 5\varepsilon^{2v} x_2 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^{1+v} x_1 - 2 + \dots = 0,$$

откуда

$$-x_1^2 \varepsilon^{2v} - 3\varepsilon + \dots = 0. \quad (2.59)$$

Для того чтобы главные члены в (2.59) скомпенсировали друг друга, $2v$ должно быть равно 1, или $v = \frac{1}{2}$, и, следовательно,

$x_1 = \pm \sqrt{3}i$. Тогда из (2.58) получаем, что второй и третий корни исходного уравнения можно представить как

$$x = 1 \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{3} i + \dots$$

Этот пример иллюстрирует трудности, возникающие в случае неверного выбора вида исходного разложения. В то же время правильный выбор разложения позволяет сразу построить соответствующее решение. Отметим, что подобная ситуация оказывается типичной для многих задач теории возмущений.

Пример 3

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x^3 + x + 2 + \varepsilon = 0, \quad (2.60)$$

в котором малый параметр стоит множителем при наибольшей степени x . В случае $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.60) переходит в уравнение

$$x + 2 = 0;$$

исходя из этого, положим, что один из корней (2.60) можно представить в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots \quad (2.61)$$

Подстановка (2.61) в (2.60) дает

$$\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3 + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + 2 + \varepsilon = 0$$

или

$$x_0 + 2 + \varepsilon (x_1 + x_0^3 + 1) + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$x_0 + 2 = 0, \quad x_1 + x_0^3 + 1 = 0,$$

откуда $x_0 = -2$ и $x_1 = 7$. Таким образом, один из корней дается разложением $x = -2 + 7\varepsilon + \dots$. Прежде чем приступить к нахождению остальных корней, отметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ они будут стремиться к бесконечности, поскольку ε входит множителем в член наивысшего порядка. Поэтому при выборе разложений для этих корней примем, что их главные члены имеют вид

$$x = \frac{y}{\varepsilon^v} + \dots, \quad v > 0. \quad (2.62)$$

Подставляя (2.62) в уравнение (2.60), получаем

$$\varepsilon^{1-3v}y^3 + \varepsilon^{-v}y + 2 + \dots = 0. \quad (2.63)$$

Для того чтобы определяющие члены в (2.63) скомпенсировали друг друга, необходимо, чтобы

$$1 - 3v = -v \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y^3 + y = 0,$$

откуда $y = 0, \quad y = i, \quad y = -i$.

Случай $y = 0$ соответствует первому корню исходного уравнения и поэтому здесь не рассматривается.

При построении уточненных приближений для второго и третьего корней воспользуемся приведенной выше информацией и будем искать эти разложения в виде

$$x = \frac{y}{\varepsilon^{1/2}} + x_0 + \dots, \quad (2.64)$$

где $y = \pm i$. Подстановка (2.64) в (2.60) дает

$$\varepsilon \left(\frac{y^3}{\varepsilon^{3/2}} + \frac{3y^2x_0}{\varepsilon} + \dots \right) + \frac{y}{\varepsilon^{1/2}} + x_0 + \dots + 2 + \varepsilon = 0$$

или

$$\varepsilon^{-1/2}(y^3 + y) + 3y^2x_0 + x_0 + 2 + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$y^3 + y = 0, \quad 3y^2x_0 + x_0 + 2 = 0.$$

Отсюда, как и ранее, $y = \pm i$ и

$$x_0 = -2/(3y^2 + 1) = 1.$$

Таким образом, второй и третий корни уравнения (2.60) представляются разложениями

$$x = \pm \frac{i}{\varepsilon^{1/2}} + 1 + \dots$$

2.3. Уравнения высших порядков

В этом параграфе рассмотрим уравнения высших порядков, уделив особое внимание случаю, когда малый параметр стоит множителем при наибольшей степени неизвестной. В частности, исследуем уравнение

$$\varepsilon x^n = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0, \quad (2.65)$$

где коэффициенты a_s не зависят от ε и x , n и m — целые числа и $n > m$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.65) сводится к уравнению

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (2.66)$$

имеющему корни α_s , где $s = 1, 2, \dots, m$. Для уточнения этих корней положим

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots; \quad (2.67)$$

подставляя в (2.65), имеем

$$\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^n = (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^m + a_{m-1}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^{m-1} + \\ + a_{m-2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^{m-2} + \dots + a_1(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + a_0$$

или

$$x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} + a_{m-2}x_0^{m-2} + \dots + a_1x_0 + a_0 + \\ + \varepsilon [mx_0^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x_0^{m-2} + \\ + (m-2)a_{m-2}x_0^{m-3} + \dots + a_1]x_1 - \varepsilon x_0^n + O(\varepsilon^2) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} + a_{m-2}x_0^{m-2} + \dots + a_1x_0 + a_0 = 0, \quad (2.68)$$

$$[mx_0^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x_0^{m-2} + (m-2)a_{m-2}x_0^{m-3} + \dots + a_1]x_1 = x_0^n. \quad (2.69)$$

Уравнение (2.68) совпадает с (2.66) и, следовательно, имеет те же самые корни $x_0 = \alpha_s$, где $s = 1, 2, 3, \dots, m$. Тогда из (2.69) следует, что

$$x_1 = \alpha_s^m [m\alpha_s^{m-1} + (m-1)a_{m-1}\alpha_s^{m-2} + \dots + a_1]^{-1}.$$

Таким образом,

$$x = \alpha_s + \varepsilon \alpha_s^n [m\alpha_s^{m-1} + (m-1)a_{m-1}\alpha_s^{m-2} + \dots + a_1]^{-1} + \dots \quad (2.70)$$

Следует отметить, что разложение (2.70) становится непригодным всякий раз, когда член в квадратных скобках стремится к нулю. Это соответствует случаю кратного корня уравнения (2.68). При этом разложение должно включать в себя дробные степени ε и строится в соответствии с методикой, используемой в примере 2 предыдущего параграфа.

Прежде чем приступить к определению оставшихся $n - m$ корней, заметим, что они стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку малый параметр ε стоит множителем при наибольшей степени неизвестной x . Поэтому разложения для них будем искать в виде

$$x = \frac{y}{\varepsilon^v} + x_0 + \dots, \quad v > 0. \quad (2.71)$$

Подставляя (2.71) в (2.65), имеем

$$e \left(\frac{y^n}{e^{nv}} + \frac{ny^{n-1}x_0}{e^{(n-1)v}} + \dots \right) = \frac{y^m}{e^{mv}} + \frac{my^{m-1}x_0}{e^{(m-1)v}} + \dots + \\ + \frac{a_{m-1}y^{m-1}}{e^{(m-1)v}} + \frac{(m-1)a_{m-1}y^{m-2}x_0}{e^{(m-2)v}} + \dots \quad (2.72)$$

Выделяя главные члены, получаем

$$e^{(1-nv)} y^n = e^{-mv} y^m$$

и, следовательно,

$$1 - nv = -mv, \text{ так что } v = \frac{1}{n-m}, \quad (2.73)$$

$$y^n = y^m. \quad (2.74)$$

Для уравнения (2.74) нуль является корнем кратности m ; кроме того,

$$y^{n-m} = 1 = e^{2\pi i r},$$

где $r = 1, 2, \dots, (n-m)$. Отсюда

$$y = \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-m}; \quad \omega = \exp \left(\frac{2\pi i}{n-m} \right). \quad (2.75)$$

Корень $y = 0$ мы отбрасываем, так как он соответствует первым s корням.

Используя (2.73) и (2.74), перепишем (2.72) в виде

$$ny^{n-1}x_0 e^v = my^{m-1}x_0 e^v + a_{m-1}y^{m-1}e^v + \dots$$

Сравнение коэффициентов при e^v в обеих частях этого равенства дает

$$ny^{n-1}x_0 = my^{m-1}x_0 + a_{m-1}y^{m-1},$$

откуда

$$x_0 = \frac{a_{m-1}y^{m-1}}{ny^{n-1} - my^{m-1}} = \frac{a_{m-1}}{ny^{n-m} - m} = \frac{a_{m-1}}{n-m}. \quad (2.76)$$

Таким образом, оставшиеся $n-m$ корней даются разложениями

$$x = \frac{\omega^r}{e^v} + \frac{a_{m-1}}{n-m} + \dots, \quad r = 1, 2, \dots, n-m, \quad (2.77)$$

где v и ω определяются формулами (2.73) и (2.75).

2.4. Трансцендентные уравнения

Рассмотрим теперь нули функции Бесселя $J_0(x)$ при больших x , т. е. исследуем корни трансцендентного уравнения

$$J_0(x) = 0$$

при $x \rightarrow \infty$. В гл. 13 будет построено разложение для $J_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Из формулы (13.141) следует, что

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + v \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (2.78)$$

где u и v в соответствии с (13.129) и (13.130) даются разложениями

$$u(x) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots, \quad (2.79)$$

$$v(x) = \frac{1}{4 \cdot 2x} - \frac{5 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} + \dots \quad (2.80)$$

Полагая в (2.78) $J_0(x) = 0$, имеем

$$u \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -v \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{v}{u}. \quad (2.81)$$

Из разложений (2.79) и (2.80), с использованием биномиальной формулы, следует, что

$$\begin{aligned} \frac{v}{u} &= \left(\frac{1}{8x} - \frac{75}{1024x^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{9}{128x^2} + \dots\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{8x} - \frac{75}{1024x^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{9}{128x^2} + \dots\right) = \frac{1}{8x} - \frac{33}{512x^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

Подставляя (2.82) в (2.81), находим, что при больших значениях аргумента нули функции $J_0(x)$ описываются уравнением

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8x} + \frac{33}{512x^3} + \dots \quad (2.83)$$

Так как x велико, в первом приближении правой частью уравнения (2.83) можно пренебречь, что дает в результате

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Откуда

$$x - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{или} \quad x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi, \quad (2.84)$$

где n — целое число, которое должно быть достаточно большим для того, чтобы x было велико. Однако, как показано ниже, даже при $n = 0$ мы имеем удивительно хороший результат.

Для уточнения полученных приближенных значений x положим теперь

$$x - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \delta, \quad \text{или} \quad x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi + \delta \quad (2.85)$$

и, подставив в (2.83), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \delta\right] &= -\frac{1}{2\pi(4n+3) + 8\delta} + \\ &+ \frac{33}{[2\pi(4n+3) + 8\delta]^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.86)$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами, перепишем левую часть (2.86) как

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\delta\right] &= \frac{\operatorname{ctg}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \cdot \operatorname{ctg}\delta - 1}{\operatorname{ctg}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \operatorname{ctg}\delta} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{ctg}\delta} = -\operatorname{tg}\delta = -\left(\delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots\right).\end{aligned}$$

Тогда (2.86) приобретает вид

$$\delta + \frac{1}{3}\delta^3 = \frac{1}{2\pi(4n+3) + 8\delta} - \frac{33}{[2\pi(4n+3) + 8\delta]^3} + \dots \quad (2.87)$$

причем это соотношение можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно δ .

Выберем в качестве малого параметра $\varepsilon = [2\pi(4n+3)]^{-1}$ и перепишем (2.87) в виде

$$\delta + \frac{1}{3}\delta^3 = \frac{\varepsilon}{1+8\varepsilon\delta} - \frac{33\varepsilon^3}{(1+8\varepsilon\delta)^3} + \dots$$

или

$$\delta + \frac{1}{3}\delta^3 = \varepsilon(1 - 8\varepsilon\delta) - 33\varepsilon^3 + \dots \quad (2.88)$$

Далее, воспользуемся следующим разложением для δ :

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^3\delta_3 + \varepsilon^5\delta_5 + \dots \quad (2.89)$$

Подставляя (2.89) в (2.88), мы имеем

$$\varepsilon\delta_1 + \varepsilon^3\delta_3 + \varepsilon^5\delta_5 + \dots + \frac{1}{3}\varepsilon^3\delta_1^3 = \varepsilon - 8\varepsilon^3\delta_1 - 33\varepsilon^3 + \dots,$$

где сохранены лишь члены до порядка ε^3 . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\delta_1 = 1, \delta_3 = 0 \quad \text{и} \quad \delta_3 + \frac{1}{3}\delta_1^3 = -8\delta_1 - 33,$$

откуда $\delta_3 = -41\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi + \varepsilon - 41\frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots,$$

или

$$x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi + \frac{1}{2\pi(4n+3)} - \frac{31}{6\pi^3(4n+3)^3} + \dots \quad (2.90)$$

Сравнение приближенных значений нулей функции Бесселя $J_0(x)$, подсчитанных по формуле (2.90), с точными значениями представлено в табл. 2.1. Соответствие оказывается весьма хорошим даже для первого корня, точное значение которого равно 2,40482 ..., т. е. аргумент x при этом не очень велик. Приближенное же значение при этом отличается от точного лишь в четвертой

Таблица 2.1

Сравнение приближенных и точных значений нулей функции Бесселя $J_0(x)$

Порядковый номер нуля n	1	2	3	4	5	6	7
Метод возмущений	2.40308	5.52004	8.65372	11.79153	14.93092	18.07106	21.21164
Точное значение	2.40482	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092	18.07106	21.21164

значащей цифре, а относительная ошибка составляет примерно 0,07 %. По мере увеличения порядкового номера нуля n точность увеличивается; для $n = 4$ значение, полученное по методу возмущений, совпадает с точным табличным значением вплоть до седьмой значащей цифры.

Упражнения

2.1. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε :

а) $x^3 - (2 + \varepsilon)x^2 - (1 - \varepsilon)x + 2 + 3\varepsilon = 0$,

б) $x^3 - (3 + \varepsilon)x - 2 + \varepsilon = 0$,

в) $x^3 + (3 - 2\varepsilon)x^2 + (3 + \varepsilon)x + 1 - 2\varepsilon = 0$,

г) $x^4 + (2 - 3\varepsilon)x^3 - (2 - \varepsilon)x - 1 + 4\varepsilon = 0$,

д) $x^4 + (4 - \varepsilon)x^3 + (6 + 2\varepsilon)x^2 + (4 + \varepsilon)x + 1 - \varepsilon^2 = 0$.

2.2. Определить два члена разложения для каждого корня следующих уравнений при малых ε :

а) $\varepsilon(u^3 + u^2) + 4u^2 - 3u - 1 = 0$,

б) $\varepsilon u^3 + u - 2 = 0$,

в) $\varepsilon u^3 + (u - 2)^3 = 0$,

г) $u^3 - u - 2 + \frac{1}{2}\varepsilon(u^3 + 2u + 3) = 0$,

д) $\varepsilon u^4 + u^3 - 2u^2 - u + 2 = 0$,

е) $\varepsilon u^4 - u^3 + 3u - 2 = 0$,

ж) $\varepsilon u^4 - u^3 + 3u - 2 = 0$,

з) $\varepsilon u^4 + u^3 - 3u + 2 = 0$,

и) $\varepsilon u^4 - u^3 + 2u - 1 = 0$,

к) $\varepsilon u^4 + u^3 - 2u + 1 = 0$,

л) $\varepsilon(u^4 + u^3) - u^2 + 3u - 2 = 0$,

м) $\varepsilon(u^3 + u^4 - 2u^2) + 2u^3 - 3u + 1 = 0$,

н) $\varepsilon(u^5 + u^4 - 2u^3) - 4u^3 + 4u - 1 = 0$,

о) $\varepsilon^2 u^6 - \varepsilon u^4 - u^3 + 2u^2 + u - 2 = 0$.

2.3. Найти двучленные разложения для решений следующих уравнений при малых ε :

$$a) s - \frac{\varepsilon}{3s^3} - \frac{3\varepsilon^2}{10s^4} = 0,$$

$$б) 1 - \frac{\varepsilon}{3\sqrt{s}} - \frac{21\varepsilon^2}{5\sqrt{s}} = 0.$$

2.4. Найти двучленные разложения для корней следующих трансцендентных уравнений при больших значениях аргумента:

$$a) x \operatorname{tg} x = 1,$$

$$б) x \operatorname{ctg} x = 1.$$

2.5. Дифференцируя (2.78) и используя (2.79) и (2.80), показать, что большие нули функции $J'_0(x)$ являются решениями уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{8x} + \dots$$

Показать также, что

$$x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{3}{2\pi(4n+1)} + \dots$$

Сравнить полученный результат с точными табличными значениями для первых семи нулей.

2.6. Асимптотическое разложение функции Неймана нулевого порядка имеет вид

$$Y_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Показать, что нули $Y_0(x)$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{1}{2\pi(4n+1)} + \dots$$

Сравнить этот результат с точными табличными значениями для первых семи нулей.

2.7. Используя асимптотическое разложение $Y_0(x)$ из предыдущего упражнения, показать, что корни уравнения $Y'_0(x) = 0$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi - \frac{3}{2\pi(4n+3)} + \dots$$

Сравнить этот результат с точными табличными значениями для первых семи корней.

2.8. Асимптотическое разложение функции Бесселя $J_\nu(x)$ имеет вид

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

а) Показать, что корни уравнения $J_\nu(x) = 0$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}\right)\pi - \frac{4\nu^2 - 1}{2\pi(4n + 3 + 2\nu)} + \dots$$

б) Показать, что корни уравнения $J'_\nu(x) = 0$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}\right)\pi - \frac{3 + 4\nu^2}{2\pi(4n + 1 + 2\nu)} + \dots$$

в) Сравнить эти результаты с полученными в упр. 2.5 и в п. 2.4 при $\nu = 0$.
 г) Сравнить эти результаты с точными табличными значениями для первых семи корней при $\nu = 1$.

2.9. Асимптотическое разложение функции Неймана $Y_\nu(x)$ имеет вид

$$Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ \text{при } x \rightarrow \infty.$$

а) Показать, что корни уравнения $Y_\nu(x) = 0$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2} \right) \pi - \frac{4\nu^2 - 1}{2\pi(4n + 1 + 2\nu)} + \dots$$

Сравнить этот результат с результатом, полученным для $Y_0(x)$ в упр. 2.6.

б) Показать, что корни уравнения $Y'_\nu(x) = 0$ даются формулой

$$x = \left(n + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} \right) \pi - \frac{3 + 4\nu^2}{2\pi(4n + 3 + 2\nu)} + \dots$$

Сравнить этот результат с результатом, полученным для $Y_0(x)$ в упр. 2.7.

в) Сравнить эти результаты с точными табличными значениями для первых семи корней при $\nu = 1$.

ИНТЕГРАЛЫ

Как известно, решения многих дифференциальных и разностных уравнений не выражаются в элементарных функциях, но могут быть представлены в виде определенных интегралов. Среди многочисленных методов, используемых для получения интегральных представлений решений дифференциальных уравнений, основное место занимают преобразования Лапласа и Фурье. Прежде чем приступить к описанию приближенных методов оценки интегралов, покажем на примере, как можно получить в интегральной форме решение простого дифференциального уравнения. Другие примеры того же рода приведены в § 13.5 и в упражнениях 13.17 и 13.18.

Будем искать общее решение следующего линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + y = \frac{1}{x}. \quad (3.1)$$

Умножая обе части уравнения (3.1) на интегрирующий множитель $e^x(x)$, получаем соотношение

$$y'e^x + ye^x = \frac{e^x}{x}, \quad (3.2)$$

которое может быть переписано как

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = \frac{e^x}{x}. \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнение (3.3), находим

$$ye^x = \int_{x_0}^x \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau + c, \quad (3.4)$$

где τ — переменная интегрирования, x_0 — произвольно выбранный нижний предел и c — произвольная постоянная. Подчиним наше решение начальному условию $y(1) = a$. Это условие определяет постоянную c в виде

$$c = ae - \int_{x_0}^1 \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau.$$

Подставляя выражение для c в (3.4), получаем

$$ye^x = \int_{x_0}^x \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau + ae - \int_{x_0}^1 \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau = ae + \int_1^x \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau.$$

Таким образом, имеем

$$y = ae^{1-x} + e^{-x} \int_1^x \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau. \quad (3.5)$$

Данная глава посвящена методам приближенной оценки интегралов типа (3.5), являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и не выражающихся в элементарных функциях. Мы рассмотрим такие методы, как разложение подынтегральной функции, интегрирование по частям, метод Лапласа, метод стационарной фазы и метод скорейшего спуска. Все эти методы будут продемонстрированы на специальных примерах.

3.1. Разложение подынтегральной функции

В этом параграфе рассмотрим четыре примера.

Пример 1

Оценим величину интеграла

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \sin \varepsilon x^2 dx \quad (3.6)$$

при малых ε . Разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора дает

$$\sin \varepsilon x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\varepsilon x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \varepsilon x^2 - \frac{1}{6} \varepsilon^3 x^6 + \frac{1}{120} \varepsilon^5 x^{10} + O(\varepsilon^7). \quad (3.7)$$

Применяя к полученному ряду (3.7) признак Даламбера, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} (\varepsilon x^2)^{2n-1} (2n-3)!}{(2n-1)! (-1)^n (\varepsilon x^2)^{2n-3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(\varepsilon x^4)^n}{(2n-1)(2n-2)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (3.7) сходится при любых значениях εx^2 . Поскольку $|x| < 1$, а ε мало, то остаточный член в формуле (3.7) есть величина порядка ε^7 для всех значений x из про-

межутка интегрирования. Подставляя теперь ряд (3.7) в исходный интеграл (3.6) и интегрируя почленно, получаем

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^1 x^{4n-2} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)! (4n-1)} = \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{1}{42} \varepsilon^3 + \frac{1}{1320} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^7). \quad (3.8)$$

Пример 2

В качестве второго примера рассмотрим полный эллиптический интеграл первого рода

$$I(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (3.9)$$

при малых m .

Используя биномиальную формулу, можно записать

$$(1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} m \sin^2 \theta + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} (-m \sin^2 \theta)^2 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} (-m \sin^2 \theta)^3 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{4!} (-m \sin^2 \theta)^4 + O(m^5). \quad (3.10)$$

Применение признака Даламбера дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-3}{2}\right) (n-2)! (-m \sin^2 \theta)^{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-5}{2}\right) (n-1)! (-m \sin^2 \theta)^{n-2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3) m \sin^2 \theta}{2(n-1)} = m \sin^2 \theta.$$

Таким образом, ряд (3.10) сходится при всех значениях θ , для которых $m \sin^2 \theta < 1$. Поскольку $\sin^2 \theta \leq 1$, а параметр m с самого начала предполагается малым, то остаточный член в формуле (3.10) представляет собой величину порядка m^5 для любых значений θ .

Таблица 3.1

Зависимость отношения I_a/I_e от величины параметра m

m	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_a/I_e	1	1.0000	0.99917	0.99720	0.99216	0.98043	0.95382

Подставляя ряд (3.10) в формулу (3.9) и интегрируя почленно, получаем

$$I_1(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2} m \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + \frac{3}{8} m^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta + \\ + \frac{5}{16} m^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta + \frac{35}{128} m^4 \int_0^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta + O(m^5). \quad (3.11)$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}, \quad (3.12)$$

можно переписать разложение (3.9) в виде

$$I_1(m) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} m + \frac{9}{64} m^2 + \frac{25}{256} m^3 + \frac{1225}{16384} m^4 + O(m^5) \right]. \quad (3.13)$$

В табл. 3.1 представлена зависимость от параметра m величины отношения I_a/I_e , где I_a — приближенное значение интеграла, подсчитанное по формуле (3.13), а I_e — точное значение интеграла $I(m)$, взятое из книги Абрамовица и Стигана (1979, с. 608). При $m \rightarrow 0$ отношение I_a/I_e стремится к единице. Так, при $m < 0,5$ относительная погрешность, возникающая при замене интеграла I_e приближенным выражением I_a , составляет менее 0,28 %; при $m = 0,7$ эта ошибка не будет превышать 2 %. Таким образом, разложение (3.13) является хорошим приближением к I_e при небольших значениях m .

Пример 3

В качестве третьего примера рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^x t^{-3/4} e^{-t} dt \quad (3.14)$$

при малых x . Разложим экспоненту, входящую в подынтегральное выражение, в ряд Тейлора

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 - t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{24} t^4 + O(t^5). \quad (3.15)$$

Используя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n t^n (n-1)!}{n! (-1)^{n-1} t^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-t}{n} = 0 \quad (3.16)$$

для любых t . Следовательно, ряд (3.15) сходится при всех значениях t . Кроме того, если считать t малым, порядок ошибки в разложении (3.15) будет равномерным по t .

Подставляя теперь ряд (3.15) в интеграл (3.14) и интегрируя почленно, получаем

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{n-(3/4)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+(1/4)}}{n! \left(n + \frac{1}{4}\right)} = \\ &= 4x^{1/4} - \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{2}{9}x^{9/4} - \frac{8}{39}x^{13/4} + O(x^{17/4}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Пример 4

В качестве последнего примера исследуем так называемый интеграл ошибок

$$I(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (3.18)$$

при малых x . Разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора, получаем ряд следующего вида:

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad (3.19)$$

который, как показано в предыдущем примере, сходится при любых значениях t . Заметим, однако, что функцию $\exp(-t^2)$ на всей числовой оси нельзя представить с помощью конечного числа членов ряда (3.19) (см. рис. 5.2). С другой стороны, разложение (3.19) является асимптотическим при $t \rightarrow 0$, поскольку

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + O(t^{2N}). \quad (3.20)$$

Поэтому интеграл (3.18) удобнее представить в следующей форме:

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.21)$$

Для того чтобы вычислить первый из этих интегралов, заметим, что

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv. \quad (3.22)$$

Следовательно,

$$I_1^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv. \quad (3.23)$$

Перейдем в последнем интеграле от декартовых координат u и v к полярным r и θ . При этом элемент площади преобразуется по формуле

$$ds = du dv = r dr d\theta, \quad (3.24)$$

причем r будет меняться от нуля до бесконечности, а θ — от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, интеграл (3.23) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} r e^{-r^2} dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \right) = \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4} \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.25)$$

Подставляя теперь ряд (3.19) во второе слагаемое в формуле (3.21), интегрируя почленно и используя формулу (3.25), получаем

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{42} x^7 + O(x^9). \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.2. Интегрирование по частям

Проиллюстрируем данный подход также с помощью нескольких примеров. При этом последний из них позволит выявить ограничения метода интегрирования по частям и подведет нас к идее метода Лапласа и метода стационарной фазы.

Пример 1

В качестве первого примера исследуем неполную гамма-функцию, которая определяется интегралом вида

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^3} dt \quad (3.27)$$

при больших значениях x .

Метод интегрирования по частям основан, как известно, на использовании тождества

$$d(uv) = u dv + v du, \quad (3.28)$$

или
$$u dv = d(uv) - v du. \quad (3.29)$$

Если u и v являются функциями переменной t , то интегрирование обеих частей равенства (3.29) в пределах от t_1 до t_2 дает

$$\int_{t_1}^{t_2} u dv = uv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v du. \quad (3.30)$$

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться формулой (3.30), нужно представить подынтегральное выражение в (3.27) в форме $u dv$, т. е. положив

$$\frac{e^{-t}}{t^2} dt = u dv. \quad (3.31)$$

Обычно разбиение на множители u и dv осуществляется таким образом, чтобы выражение для dv можно было проинтегрировать. Кроме того, u и dv следует выбирать так, чтобы последовательные члены разложения интеграла $I(x)$, получающиеся при интегрировании по частям, являлись бы величинами все более высокого порядка по малому параметру x^{-1} . Для того чтобы проиллюстрировать оба указанных требования, рассмотрим два варианта. Сначала положим

$$u = e^{-t}, \quad dv = \frac{dt}{t^2}. \quad (3.32)$$

Тогда

$$du = -e^{-t} dt, \quad v = -\frac{1}{t}. \quad (3.33)$$

Подстановка выражений (3.32) и (3.33) в формулу (3.30) дает

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \int_x^\infty u dv = -\frac{e^{-t}}{t} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

или

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (3.34)$$

Продолжая этот процесс, положим

$$u = e^{-t}, \quad dv = \frac{dt}{t}. \quad (3.35)$$

Тогда

$$du = -e^{-t} dt, \quad v = \ln t \quad (3.36)$$

и

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^\infty u dv = e^{-t} \ln t \Big|_x^\infty + \int_x^\infty e^{-t} \ln t dt. \quad (3.37)$$

Поскольку в соответствии с правилом Лопиталья имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \ln t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{te^t} = 0,$$

то соотношение (3.37) принимает вид

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^{-x} \ln x + \int_x^{\infty} e^{-t} \ln t dt. \quad (3.38)$$

Подстановка этого соотношения в формулу (3.34) дает

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x - \int_x^{\infty} e^{-t} \ln t dt. \quad (3.39)$$

Отметим, что второе слагаемое в правой части (3.39) оказывается существенно больше первого при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, использование выражений (3.32) и (3.35) не позволяет получить асимптотическое разложение интеграла $I(x)$ при $x \rightarrow \infty$ ¹.

В качестве второго варианта выберем

$$u = \frac{1}{t^2}, \quad dv = e^{-t} dt. \quad (3.40)$$

Тогда

$$du = -\frac{2}{t^3} dt, \quad v = -e^{-t}. \quad (3.41)$$

Подстановка выражений (3.40) и (3.41) в формулу (3.30) дает

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \int_x^{\infty} u dv = -\frac{e^{-t}}{t^2} \Big|_x^{\infty} - 2 \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt,$$

или

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - 2 \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt. \quad (3.42)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, положим

$$u = \frac{1}{t^3}, \quad dv = e^{-t} dt, \quad (3.43)$$

откуда

$$du = -\frac{3}{t^4} dt, \quad v = -e^{-t}. \quad (3.44)$$

Таким образом, имеем

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt = -\frac{e^{-t}}{t^3} \Big|_x^{\infty} - 3 \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^4} dt,$$

¹ Продолжая этот процесс интегрирования по частям, можно построить (сходящееся) асимптотическое разложение интеграла $I(x)$ при $x \rightarrow 0$. —Прим. перев.

или

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt = \frac{e^{-x}}{x^3} - 3 \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^4} dt. \quad (3.45)$$

Подстановка соотношения (3.45) в формулу (3.42) дает

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3} + 3! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^4} dt. \quad (3.46)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям и полагая на каждом шаге $e^{-t} dt = dv$, находим

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt &= \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2! e^{-x}}{x^3} + \frac{3! e^{-x}}{x^4} - \frac{4! e^{-x}}{x^5} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^{n-1} n! e^{-x}}{x^{n+1}} + (-1)^n (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Поскольку при $x < t < \infty$ имеет место неравенство $t^{n+2} \geq x^{n+2}$, то

$$\frac{1}{t^{n+2}} < \frac{1}{x^{n+2}}.$$

Интегрируя полученное неравенство, имеем

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt < \frac{1}{x^{n+2}} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}.$$

Таким образом, формулу (3.47) можно представить в виде разложения

$$I(x) = e^{-x} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} + e^{-x} O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right), \quad (3.48)$$

которое по определению является асимптотическим. Отметим, что ряд (3.48) расходится, поскольку

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\text{-й член}}{(m-1)\text{-й член}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{m-1} m! x^m}{x^{m+1} (-1)^{m-2} (m-1)!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-m}{x} = -\infty.$$

Однако при фиксированном N остаточный член в разложении (3.48) может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого x .

Пример 2

В качестве второго примера рассмотрим интеграл вида

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \quad (3.49)$$

при больших положительных x . Как и в предыдущем примере, разбиение на множители

$$u = e^{-t}, \quad dv = (x+t)^{-1} dt$$

не приводит к асимптотическому разложению при $x \rightarrow \infty$. Поэтому положим

$$u = (x+t)^{-1}, \quad dv = e^{-t} dt, \quad (3.50)$$

$$\text{откуда} \quad du = -(x+t)^{-2} dt, \quad v = -e^{-t}. \quad (3.51)$$

Подстановка выражений (3.50) и (3.51) в формулу (3.30) дает

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = -\frac{e^{-t}}{x+t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt,$$

или

$$I(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt. \quad (3.52)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, положим

$$u = (x+t)^{-2}, \quad dv = e^{-t} dt, \quad (3.53)$$

$$\text{откуда} \quad du = -2(x+t)^{-3} dt, \quad v = -e^{-t}. \quad (3.54)$$

Подставляя выражения (3.53) и (3.54) в (3.30), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \Big|_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^3} dt = \frac{1}{x^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^3} dt. \quad (3.55)$$

При этом формула (3.52) принимает вид

$$I(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^3} dt. \quad (3.56)$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям n раз, мы приходим к разложению

$$\begin{aligned} I(x) = & \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} + \\ & + (-1)^n n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}} dt. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Для оценки остаточного члена в (3.57) воспользуемся следующим неравенством, справедливым при положительных x и t :

$$\frac{1}{(x+t)^{n+1}} < \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}} dt < \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$I(x) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right), \quad (3.58)$$

и, следовательно, разложение (3.57) является асимптотическим при $x \rightarrow \infty$. Отметим, что ряд (3.58) расходится, поскольку в соответствии с признаком Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\text{-й член}}{(m-1)\text{-й член}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{m-1} (m-1)! x^{m-1}}{x^m (-1)^{m-2} (m-2)!} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-(m-1)}{x} = -\infty. \end{aligned}$$

Однако при фиксированном N остаточный член этого ряда может стать сколь угодно малым при достаточно большом x .

Пример 3

В качестве третьего примера рассмотрим преобразование Лапласа от функции $f(t)$, т. е. интеграл вида

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt. \quad (3.59)$$

Построим асимптотическую оценку этого интеграла при больших положительных x в предположении, что функция $f(t)$ является аналитической (т. е. на рассматриваемом интервале она обладает производными любого порядка) и что исходный интеграл существует. Заметим, что интегралы типа (3.59) возникают при решении дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

Положим

$$u = f(t), \quad dv = e^{-xt} dt, \quad (3.60)$$

так что

$$du = f'(t) dt, \quad v = -\frac{e^{-xt}}{x}. \quad (3.61)$$

Если бы мы выбрали разбиение на множители вида $u = \exp(-xt)$, $dv = f(t) dt$, то получили бы, что возникающее разложение не является асимптотическим при $x \rightarrow \infty$. Подстановка выражений (3.60) и (3.61) в формулу (3.30) дает

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt = -\frac{e^{-xt}}{x} f(t) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-xt} f'(t) dt.$$

или

$$I(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-xt} f'(t) dt. \quad (3.62)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, положим в интеграле в правой части (3.62)

$$u = f'(t), \quad dv = e^{-xt} dt, \quad (3.63)$$

откуда

$$du = f''(t) dt, \quad v = -\frac{e^{-xt}}{x}. \quad (3.64)$$

Подставляя выражения (3.63) и (3.64) в формулу (3.30), а полученный результат в формулу (3.62), находим

$$I(x) = \frac{f(0)}{x} - \frac{e^{-xt}}{x^2} f'(t) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-xt} f''(t) dt,$$

или

$$I(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-xt} f''(t) dt. \quad (3.65)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, имеем

$$I(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{f''(0)}{x^3} + \frac{f'''(0)}{x^4} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{x^{n+1}} + \\ + \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-xt} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (3.66)$$

Следовательно,

$$I(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{x^{n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right) \quad (3.67)$$

и разложение (3.67) является асимптотическим при $x \rightarrow \infty$.

Пример 4

С помощью аналогичного процесса можно получить асимптотическое разложение интеграла Фурье

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} f(t) dt \quad (3.68)$$

при больших положительных α для случая, когда $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция от t . Интегралы такого типа возникают при решении дифференциальных уравнений с помощью преобразования Фурье.

Пусть функция $f(t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, так что интеграл (3.68) существует¹. Для того чтобы проинтегрировать (3.68) по частям, положим

$$u = f(t), \quad dv = e^{i\alpha t} dt, \quad (3.69)$$

откуда

$$du = f'(t) dt, \quad v = \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha}. \quad (3.70)$$

Подстановка выражений (3.69) и (3.70) в формулу (3.30) дает

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha t} f(t) dt = \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha} f(t) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{i\alpha} \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} f'(t) dt,$$

или

$$I(\alpha) = -\frac{f(0)}{i\alpha} - \frac{1}{i\alpha} \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} f'(t) dt. \quad (3.71)$$

Продолжая процесс интегрирования по частям (а именно, интегрируя $e^{i\alpha t}$ и последовательно дифференцируя $f(t)$), как и в предыдущем примере, получаем

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{(-i\alpha)^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\alpha^{N+2}}\right). \quad (3.72)$$

Разложение (3.72) является асимптотическим при $\alpha \rightarrow \infty$.

Пример 5

В качестве последнего примера рассмотрим обобщенный интеграл Лапласа

$$I(x) = \int_a^b e^{xh(t)} f(t) dt, \quad b > a, \quad (3.73)$$

при больших положительных x для случая, когда $h(t)$ и $f(t)$ — дифференцируемые функции аргумента t . Для того чтобы проинтегрировать (3.73) по частям, необходимо представить подынтегральное выражение в виде $u dv$. В данном случае мы не можем положить

$$u = f(t), \quad dv = e^{xh(t)} dt, \quad (3.74)$$

поскольку последнее выражение не интегрируется в общем виде через известные функции. Чтобы получить интегрируемое выражение, преобразуем формулы (3.74) следующим образом:

$$u = \frac{f(t)}{h'(t)}, \quad dv = e^{xh(t)} h'(t) dt. \quad (3.75)$$

¹ При этом производные функции $f(t)$ также должны затухать при $t \rightarrow \infty$, с тем чтобы существовали соответствующие интегралы, возникающие в результате последовательного интегрирования по частям. — *Прим. перев.*

При этом

$$du = \left[\frac{f(t)}{h'(t)} \right]' dt, \quad v = \frac{e^{xh(t)}}{x}. \quad (3.76)$$

Подстановка выражений (3.75) и (3.76) в формулу (3.30) дает

$$\int_a^b e^{xh(t)} f(t) dt = \frac{e^{xh(t)} f(t)}{xh'(t)} \Big|_a^b - \frac{1}{x} \int_a^b e^{xh(t)} \left[\frac{f(t)}{h'(t)} \right]' dt,$$

или

$$I(x) = \frac{e^{xh(b)} f(b)}{xh'(b)} - \frac{e^{xh(a)} f(a)}{xh'(a)} - \frac{1}{x} \int_a^b e^{xh(t)} \left[\frac{f(t)}{h'(t)} \right]' dt. \quad (3.77)$$

Оценивая интегральный член в правой части соотношения (3.77), находим, что

$$I(x) \sim \frac{e^{xh(b)} f(b)}{xh'(b)} - \frac{e^{xh(a)} f(a)}{xh'(a)} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3.78)$$

Формулы (3.77) и (3.78) получены в предположении, что функции $f(t)$ и $h(t)$ дифференцируемы и $h'(t) \neq 0$ на промежутке $[a, b]$. Если же какая-либо из точек этого промежутка оказывается для функции $h(t)$ стационарной (т. е. в этой точке $h'(t) = 0$), то интегрирование по частям становится незаконным и интеграл в правой части (3.77) будет расходящимся. При $h'(t) \neq 0$ формула (3.78) показывает, что основной вклад в величину интеграла дают лишь ближайшие окрестности концевых точек промежутка интегрирования. Более того, если $h(a) \neq h(b)$, то асимптотическое поведение нашего интеграла определяется окрестностью только той концевой точки, в которой значение функции $h(t)$ больше. Это обстоятельство позволяет предположить, что основной вклад в асимптотическое разложение интеграла (3.73) дает окрестность точки $t = c \in [a, b]$, соответствующей наибольшему значению $h(t)$, независимо от того, является ли точка $t = c$ внутренней или граничной точкой промежутка интегрирования. В этом, собственно, и заключается центральная идея метода Лапласа. Если функция $h(t)$ достигает наибольшего значения в граничной точке, например при $t = a$, и если эта точка не является стационарной (т. е. $h'(a) \neq 0$), то верхний предел в интеграле (3.73) можно заменить на любую внутреннюю точку $t = c$ (при условии, что на отрезке $[a, c]$ производная $h'(t)$ не обращается в нуль), проинтегрировать результат по частям и получить требуемое асимптотическое представление интеграла (3.73). Если же наибольшее значение $h(t)$ достигается в стационарной точке, то метод интегрирования по частям становится непригодным. В следующем параграфе рассмотрим построение

асимптотических разложений интегралов типа (3.73) с помощью метода Лапласа, причем ограничения, связанные с дифференцируемостью функции $f(t)$ и отсутствием нулей у производной $h'(t)$, будут сняты.

3.3. Метод Лапласа

В этом параграфе мы рассмотрим интеграл общего вида

$$I(x) = \int_a^b e^{xh(t)} f(t) dt \quad (3.79)$$

в случае действительной функции $h(t)$ и при больших положительных x , а также в предположении, что интеграл (3.79) существует (т. е. имеет конечное значение). Как указывалось в предыдущем параграфе, основной вклад в асимптотическое представление интегралов вида $I(x)$ вносит ближайшая окрестность точки, в которой функция $h(t)$ достигает своего наибольшего значения. На этой идее Лапласа основан достаточно общий метод получения асимптотических оценок интегралов типа (3.79). Ниже мы рассмотрим метод Лапласа на нескольких наиболее характерных примерах.

Пример 1

В качестве первого примера рассмотрим частный случай интеграла (3.79), а именно интеграл

$$I(x) = \int_0^{10} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt. \quad (3.80)$$

Для того чтобы построить асимптотическое разложение $I(x)$ при $x \rightarrow \infty$, разложим функцию $(1+t)^{-1}$ в ряд по степеням t и проинтегрируем полученное разложение почленно, заменив верхний предел в (3.80) на ∞ . Возможность такой замены будет обоснована ниже.

Из биномиальной формулы следует, что

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. \quad (3.81)$$

При этом, согласно признаку Даламбера, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n t^n}{(-1)^{n-1} t^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-t) = -t.$$

Следовательно, ряд (3.81) сходится только при $|t| < 1$, а значит, подстановка ряда (3.81) и почленное интегрирование в пределах от 0 до 10 являются незаконными, поскольку разложение (3.81)

справедливо только при $|t| < 1$. Для того чтобы преодолеть указанное затруднение, разобьем промежуток интегрирования на два — $[0, \delta]$ и $[\delta, 10]$, где δ — некоторое малое положительное число. Таким образом, мы можем представить интеграл (3.80) в виде

$$I(x) = \int_0^{\delta} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_{\delta}^{10} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt. \quad (3.82)$$

Покажем теперь, что второе слагаемое в правой части (3.82) экспоненциально мало при $x \rightarrow \infty$. С этой целью заметим, что $1 > (1+t)^{-1}$ при $t > 0$. Поэтому

$$\int_{\delta}^{10} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt < \int_{\delta}^{10} e^{-xt} dt = \left. \frac{e^{-xt}}{-x} \right|_{\delta}^{10} = -\frac{1}{x} (e^{-10x} - e^{-\delta x}).$$

При $x \rightarrow \infty$ $\exp(-10x)$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень x^{-1} . При конечном δ и при $x \rightarrow \infty$ то же самое можно утверждать и для слагаемого $\exp(-\delta x)$. Следовательно, второй интеграл в правой части (3.82) будет стремиться к нулю экспоненциально, т. е. можно записать

$$I(x) = \int_0^{\delta} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + (\text{Э. М. Ч.}) \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (3.83)$$

где сокращение (Э. М. Ч.) использовано для обозначения экспоненциально малых членов. Таким образом, основной вклад в асимптотическое разложение интеграла (3.80) действительно дает только близкая окрестность точки $t = 0$.

Подставляя разложение (3.81) в формулу (3.83) и интегрируя почленно, имеем

$$I(x) = \int_0^{\delta} e^{-xt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\delta} t^n e^{-xt} dt. \quad (3.84)$$

Для оценки интеграла в правой части (3.84) введем замену переменной $\tau = xt$. При этом $dt = d\tau/x$ и, следовательно,

$$\int_0^{\delta} t^n e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{\delta x} \tau^n e^{-\tau} d\tau. \quad (3.85)$$

Последовательное интегрирование по частям в правой части соотношения (3.85) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} t^n e^{-xt} dt &= \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{\delta} \tau^n e^{-\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{x^{n+1}} \left[\tau^n + n\tau^{n-1} + n(n-1)\tau^{n-2} + \dots + \frac{1}{2} n! \tau^2 + \right. \\ &\quad \left. + n! \tau + n! \right] e^{-\tau} \Big|_0^{\delta}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} t^n e^{-xt} dt &= \frac{n!}{x^{n+1}} - e^{-\delta x} \left[\frac{\delta^n}{x} + \frac{n\delta^{n-1}}{x^2} + \frac{n(n-1)\delta^{n-2}}{x^3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n! \delta^2}{2x^{n-1}} + \frac{n! \delta}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Поскольку функция $\exp(-\delta x)$ при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень x^{-1} , то член в правой части (3.86), содержащий множитель $\exp(-\delta x)$, будет экспоненциально малым. Поэтому

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} + (Э. М. Ч.), \quad (3.87)$$

причем этот результат не зависит от величины δ , так как он остается справедливым даже при $\delta \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Таким образом, приведенное рассуждение оправдывает описанную выше процедуру вычисления асимптотики интеграла (3.80).

Подставляя разложение (3.87) в формулу (3.84), без учета экспоненциально малых членов имеем

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \quad (3.88)$$

При этом, согласно признаку Даламбера, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n! x^n}{x^{n+1} (-1)^{n-1} (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{x} = -\infty,$$

и, следовательно, ряд (3.88) расходится. Поэтому использование знака равенства в формуле (3.88) является незаконным, и его

следует заменить на знак асимптотического соответствия. Окончательно можно записать

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3.89)$$

Отметим также, что этот результат может быть получен и с помощью метода интегрирования по частям.

Использованный выше прием — разбиение промежутка интегрирования и отбрасывание экспоненциально малых слагаемых — заимствован нами из доказательства так называемой леммы Ватсона. С помощью этой леммы строятся асимптотические представления интегралов вида

$$I(x) = \int_0^b f(t) e^{-xt} dt, \quad (3.90)$$

где функция $f(t)$ непрерывна на промежутке $[0, b]$ и имеет асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{m\beta-1} \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (3.91a)$$

причем показатель β считается положительным, что обеспечивает сходимость интеграла (3.90). Кроме того, при $b \rightarrow \infty$ должно иметь место неравенство

$$|f(t)| < K e^{\alpha t}, \quad (3.91b)$$

где K и α — положительные постоянные. При указанных условиях лемма Ватсона утверждает, что полное асимптотическое разложение интеграла $I(x)$ может быть получено с помощью подстановки разложения (3.91a) в (3.90), дальнейшего почленного интегрирования и замены верхнего предела интегрирования на ∞ , в результате чего получается формула

$$I(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{\infty} t^{m\beta-1} e^{-xt} dt,$$

или

$$I(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Gamma(m\beta) / x^{m\beta}. \quad (3.92)$$

Пример 2

В предыдущем примере функция $h(t) = -t$ (см. формулу (3.79)) достигала своего наибольшего значения на нижнем пределе

¹ Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, определение и свойства которой указаны ниже на стр. 77. Полное же доказательство леммы Ватсона см., например, Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I—II. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1949. — Прим. перев.

интегрирования. Поскольку в этом случае $h'(0) = -1$, указанная точка не являлась точкой относительного максимума. Поэтому в качестве второго примера рассмотрим случай, когда наибольшее значение $h(t)$ и точка максимума совпадают, а именно исследуем интеграл

$$I(x) = \int_0^5 \frac{e^{-xt^2}}{1+t} dt, \quad (3.93)$$

у которого функция $h(t)$ имеет относительный максимум в точке $t = 0$. Как уже отмечалось в примере 5 предыдущего параграфа, метод интегрирования по частям в данном случае оказывается непригодным. При больших положительных x асимптотическое представление интеграла (3.93) определяется лишь вкладом от окрестности точки $t = 0$, в которой функция $h(t) = -t^2$ достигает своего наибольшего значения. Асимптотику интеграла $I(x)$ будем искать с помощью леммы Ватсона, т. е. подставляя степенное разложение (3.81) функции $(1+t)^{-1}$ в интеграл (3.93) и интегрируя далее почленно в пределах от нуля до бесконечности. В результате имеем

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-xt^2} dt. \quad (3.94)$$

Обозначая последовательные интегралы в формуле (3.94) через I_n , т. е.

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-xt^2} dt, \quad (3.95)$$

попытаемся вычислить эти интегралы при произвольных значениях n . Для случая $n = 0$ имеем

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt. \quad (3.96)$$

Полагая $\sqrt{xt} = \tau$ и $dt = d\tau/\sqrt{x}$, приведем интеграл (3.96) к виду

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (3.97)$$

Интеграл в (3.97) мы вычисляли ранее (см. формулу (3.25)). Таким образом, имеем

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}. \quad (3.98)$$

Дифференцируя обе части соотношения (3.98) по переменной x , находим

$$-\int_0^{\infty} t^2 e^{-xt^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}},$$

откуда

$$I_2 = \int_0^{\infty} t^2 e^{-xt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}}. \quad (3.99)$$

Далее, дифференцируя по x левую и правую части (3.99), в свою очередь находим

$$-\int_0^{\infty} t^4 e^{-xt^2} dt = -\frac{3\sqrt{\pi}}{8x^{5/2}},$$

откуда

$$I_4 = \int_0^{\infty} t^4 e^{-xt^2} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{8x^{5/2}}. \quad (3.100)$$

Продолжая указанный процесс, можно получить выражение для интеграла вида (3.95) при произвольном четном n . Итак,

$$I_{2m} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} (x^{-1/2}). \quad (3.101)$$

Для того чтобы определить I_n при нечетном n , рассмотрим прежде всего случай $n = 1$:

$$I_1 = \int_0^{\infty} t e^{-xt^2} dt. \quad (3.102)$$

Полагая $xt^2 = \tau$, имеем $2xt dt = d\tau$ и, следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{2x} \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = -\frac{1}{2x} e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2x}. \quad (3.103)$$

Дифференцирование соотношения (3.103) по x дает

$$-\int_0^{\infty} t^3 e^{-xt^2} dt = -\frac{1}{2x^2},$$

откуда

$$I_3 = \int_0^{\infty} t^3 e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2x^2}. \quad (3.104)$$

Далее, дифференцируя по x выражение для I_3 , приходим к формуле для I_5 :

$$I_5 = \int_0^{\infty} t^5 e^{-xt^2} dt = \frac{1}{x^3}. \quad (3.105)$$

Продолжая указанный процесс, можно получить следующую общую формулу для интегралов вида (3.95) с нечетными индексами n :

$$I_{2m+1} = \frac{1}{2} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} (x^{-1}). \quad (3.106)$$

Окончательно с учетом формул (3.101) и (3.106) разложение (3.94) переписывается в виде

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} (x^{-1/2}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} (x^{-1}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/2}} - \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}} - \frac{1}{2x^2} + \\ &+ \frac{3\sqrt{\pi}}{8x^{5/2}} - \frac{1}{x^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.107)$$

Гамма-функция

Интегралы вида (3.95) можно вычислить и другим способом, выразив их через гамма-функцию Эйлера, определяемую при положительных z соотношением

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau. \quad (3.108)$$

С этой целью введем замену переменных

$$\tau = xt^2, \quad d\tau = 2xt dt. \quad (3.109)$$

Тогда интеграл (3.95) преобразуется к виду

$$I_n = \frac{1}{2} x^{-(n+1)/2} \int_0^{\infty} \tau^{(n-1)/2} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2} x^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \quad (3.110)$$

Подстановка (3.110) в разложение (3.94) дает

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2x^{(n+1)/2}}. \quad (3.111)$$

Покажем теперь, что разложения (3.111) и (3.107) совпадают. Воспользуемся для этого следующим функциональным соотношением для гамма-функции:

$$\Gamma(z) = (z-1) \Gamma(z-1) \quad (3.112)$$

и докажем эту формулу для $z > 1$. Используя метод интегрирования по частям, положим

$$u = \tau^{z-1}, \quad dv = e^{-\tau} d\tau,$$

откуда

$$du = (z-1) \tau^{z-2} d\tau, \quad v = -e^{-\tau}.$$

При этом из формулы (3.30) следует, что

$$\Gamma(z) = -\tau^{z-1} e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} + (z-1) \int_0^{\infty} \tau^{z-2} e^{-\tau} d\tau. \quad (3.113)$$

Интеграл в правой части при $z > 1$ существует и равен $\Gamma(z-1)^1$. Тогда из формулы (3.113) сразу следует соотношение (3.112). Отметим также, что рекуррентное соотношение (3.112) позволяет найти $\Gamma(z)$ при $z > 1$, если $\Gamma(z)$ протабулирована на интервале $0 \leq z < 1$. Например,

$$\begin{aligned} \Gamma(5,3) &= 4,3 \Gamma(4,3) = (4,3) (3,3) \Gamma(3,3) = (4,3) (3,3) (2,3) \Gamma(2,3) = \\ &= (4,3) (3,3) (2,3) (1,3) \Gamma(1,3) = (4,3) (3,3) (2,3) (1,3) (0,3) \Gamma(0,3). \end{aligned}$$

При натуральных z , а также при z , равных половине целого положительного числа, интеграл, определяющий гамма-функцию, может быть вычислен в явном виде. Так, в случае натуральных z рекуррентная формула (3.112) дает

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= (z-1) \Gamma(z-1) = (z-1) (z-2) \Gamma(z-2) = \\ &= (z-1) (z-2) (z-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Полагая в формуле (3.108) $z = 1$, находим

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = 1. \quad (3.115)$$

При этом из соотношения (3.114) следует, что

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \quad (3.116)$$

где z — целое положительное число. Поэтому в случае $n = 2m + 1$, где m — произвольное натуральное число, имеем

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2m+1+1}{2}\right) = \Gamma(m+1) = m!.$$

¹ Формулы (3.108) и (3.112) справедливы при всех z , за исключением нуля и отрицательных целых чисел. См., например, Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.—Л.: ГИФМЛ, 1963. — Прим. перев.

Тогда из формулы (3.110) получаем

$$I_{2m+1} = \frac{1}{2} m! x^{-(m+1)} \quad (3.117)$$

в полном соответствии с (3.106).

В случае если $z = m + \frac{1}{2}$, где m — натуральное число, из соотношения (3.112) следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{3}{2}\right) = \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \left(m - \frac{5}{2}\right) \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Полагая теперь в соотношении (3.108) $z = \frac{1}{2}$, имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \tau^{-1/2} e^{-\tau} d\tau. \quad (3.119)$$

С помощью подстановки $\tau = y^2$ интеграл (3.119) можно привести к виду

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (3.120)$$

Величина интеграла в (3.120), согласно формуле (3.25), равна $\sqrt{\pi}/2$, и, следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.121)$$

Таким образом, соотношение (3.118) принимает вид

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \left(m - \frac{5}{2}\right) \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (3.122)$$

где m — целое положительное число. Отсюда при $n = 2m$ (m — целое) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \left(m - \frac{5}{2}\right) \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Наконец, из формулы (3.110) следует, что

$$I_{2m} = \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \left(m - \frac{5}{2}\right) \cdots \\ \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^{-[m+(1/2)]} \quad (3.124)$$

в полном соответствии с (3.101).

Пример 3

В качестве третьего примера рассмотрим несколько более общий, чем в предыдущем примере, интеграл, а именно

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{xh(t)} dt, \quad b > a, \quad (3.125)$$

где $h'(a) = 0, \quad h''(a) < 0, \quad (3.126)$

$$f(t) \sim f_0(t-a)^\lambda \text{ при } t \rightarrow a \quad (3.127)$$

и f_0 — некоторая постоянная. Условия (3.126) означают, что функция $h(t)$ имеет в точке $t = a$ относительный максимум. Мы предположим также, что этот максимум является наибольшим значением $h(t)$ (т. е. абсолютным максимумом) на промежутке интегрирования (рис. 3.1). Для существования интеграла (3.125) необходимо, чтобы показатель λ был больше -1 . Основной вклад в асимптотическое представление $I(x)$ дает только окрестность точки $t = a$, в которой достигается наибольшее значение $h(t)$. Поэтому верхний предел интегрирования в (3.125) вполне можно заменить на $a + \delta$, где δ — малое положительное число, в результате чего получим

$$I(x) \sim \int_a^{a+\delta} f(t) e^{xh(t)} dt. \quad (3.128)$$

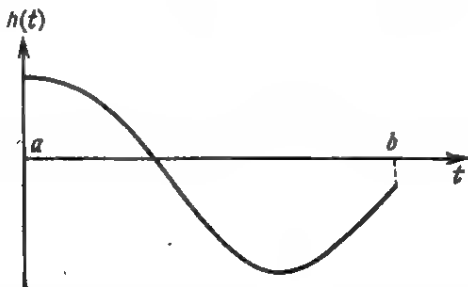


Рис. 3.1. Функция, имеющая относительный и абсолютный максимум в точке $t = a$.

Для того чтобы найти главный член разложения $I(x)$, представим функцию $h(t)$ в окрестности точки $t = a$ ее рядом Тейлора, положив

$$h(t) = h(a) + h'(a)(t-a) + \frac{1}{2!} h''(a)(t-a)^2 + \dots,$$

или

$$h(t) = h(a) + \frac{1}{2!} h''(a)(t-a)^2 + \dots, \quad (3.129)$$

поскольку $h'(a) = 0$. Подставляя теперь (3.127) и (3.129) в интеграл (3.128), имеем

$$I(x) \sim f_0 e^{xh(a)} \int_a^{a+\delta} (t-a)^{\lambda} e^{(1/2) x h''(a)(t-a)^2} dt. \quad (3.130)$$

Поскольку $h''(a) < 0$, верхний предел $a + \delta$ можно заменить на ∞ , что приведет к экспоненциально малой ошибке. Таким образом, перепишем (3.130) как

$$I(x) \sim f_0 e^{xh(a)} \int_a^{\infty} (t-a)^{\lambda} e^{(1/2) x h''(a)(t-a)^2} dt. \quad (3.131)$$

Интеграл в правой части (3.131) можно выразить через гамма-функцию. С этой целью положим

$$-\frac{1}{2} x h''(a)(t-a)^2 = \tau \quad (3.132)$$

и получим

$$I(x) \sim \frac{1}{2} \left[\frac{2}{-x h''(a)} \right]^{(\lambda+1)/2} f_0 e^{xh(a)} \int_0^{\infty} \tau^{(\lambda-1)/2} e^{-\tau} d\tau, \quad (3.133)$$

или, с учетом (3.108),

$$I(x) \sim \frac{1}{2} \left[\frac{2}{-x h''(a)} \right]^{(\lambda+1)/2} f_0 e^{xh(a)} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (3.134)$$

Отметим также, что для того, чтобы найти члены высшего порядка в разложении $I(x)$, необходимо сохранять члены более высокого порядка и в разложениях функций $f(t)$ и $h(t)$.

Пример 4

В качестве четвертого примера рассмотрим интеграл вида (3.125) в случае, когда функция $h(t)$ имеет при $t = a$ точку перегиба (рис. 3.2). При этом

$$h'(a) = h''(a) = 0 \text{ и } h'''(a) < 0. \quad (3.135)$$

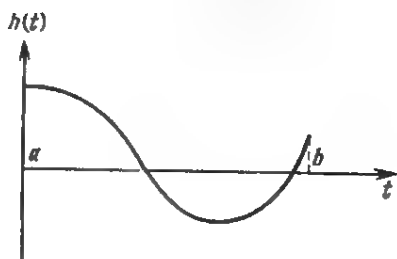


Рис. 3.2. Функция, имеющая точку перегиба и абсолютный максимум в точке $t = a$.

Как и в предыдущих случаях, основной вклад в асимптотическое разложение нашего интеграла дает только окрестность точки $t = a$, поэтому верхний предел интегрирования можно заменить на $a + \delta$, где δ — малое положительное число.

Для того чтобы найти главный член асимптотического разложения интеграла (3.128) при условиях (3.135), представим функцию $h(t)$ ее рядом Тейлора в окрестности точки $t = a$, положив

$$h(t) = h(a) + h'(a)(t-a) + \frac{1}{2!} h''(a)(t-a)^2 + \\ + \frac{1}{3!} h'''(a)(t-a)^3 + \dots,$$

или

$$h(t) = h(a) + \frac{1}{6} h'''(a)(t-a)^3 + \dots \quad (3.136)$$

Подставляя соотношения (3.127) и (3.136) в интеграл (3.128) и заменяя $a + \delta$ на ∞ , получаем

$$I(x) \sim f_0 e^{xh(a)} \int_a^\infty (t-a)^\lambda e^{(1/6)xh'''(a)(t-a)^3} dt. \quad (3.137)$$

Интеграл в формуле (3.137) можно выразить через гамма-функцию. С этой целью положим

$$-\frac{1}{6} x h'''(a)(t-a)^3 = \tau. \quad (3.138)$$

Тогда

$$I(x) \sim \frac{1}{3} \left[\frac{6}{-x h'''(a)} \right]^{(\lambda+1)/3} f_0 e^{xh(a)} \int_0^\infty \tau^{(\lambda-2)/3} e^{-\tau} d\tau, \quad (3.139)$$

откуда, с учетом (3.108), следует, что

$$I(x) \sim \frac{1}{3} \left[\frac{6}{-x h'''(a)} \right]^{(\lambda+1)/3} f_0 e^{xh(a)} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{3}\right) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (3.140)$$

Пример 5

Во всех предыдущих примерах наибольшее значение функции $h(t)$ достигается в граничных точках промежутка интегрирования. Теперь мы рассмотрим случай, когда $h(t)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке (рис. 3.3). Итак, рассмотрим интеграл вида

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{xh(t)} dt, \quad b > a, \quad (3.141)$$

при больших значениях x в случае выполнения условий

$$h'(c) = 0, \quad h''(c) < 0, \quad a < c < b, \quad (3.142)$$

$$f(t) \sim f_0(t-c)^\lambda \text{ при } t \rightarrow c, \quad (3.143)$$

где λ — целое число, большее -1 , что гарантирует сходимость нашего интеграла. Для того чтобы найти асимптотическое представление интеграла (3.141) при $x \rightarrow \infty$, разложим функцию в ряд Тейлора, сохраняя в этом разложении первый член с ненулевой производной:

$$h(t) = h(c) + \frac{1}{2!} h''(c) (t-c)^2 + \dots \quad (3.144)$$

Тогда имеем

$$I(x) \sim f_0 e^{xh(c)} \int_{c-\delta}^{c+\delta} (t-c)^\lambda e^{(1/2) x h''(c) (t-c)^2} dt, \quad (3.145)$$

где δ — некоторое положительное число. Заменяя, как обычно, в интеграле (3.145) δ на ∞ , получаем

$$I(x) \sim f_0 e^{xh(c)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-c)^\lambda e^{(1/2) x h''(c) (t-c)^2} dt. \quad (3.146)$$

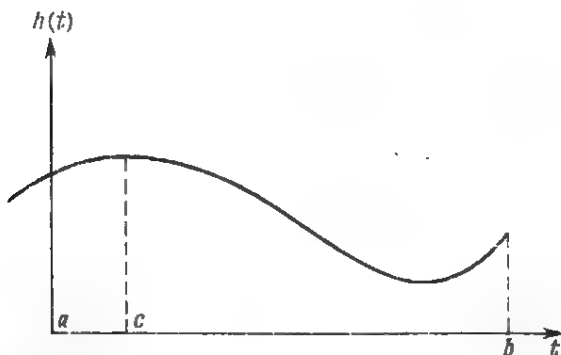


Рис. 3.3. Функция, имеющая абсолютный максимум во внутренней точке промежутка.

С помощью подстановки

$$-\frac{1}{2} x h''(c)(t-c)^2 = \tau^2 \quad (3.147)$$

асимптотическое представление (3.146) можно привести к виду

$$I(x) \sim f_0 \left[\frac{-2}{x h''(c)} \right]^{(\lambda+1)/2} e^{x h(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^\lambda e^{-\tau^2} d\tau \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3.148)$$

В случае целых нечетных λ интеграл в правой части (3.148) обращается в нуль, и поэтому необходимо искать следующий член асимптотического разложения. Если же λ — четное число, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^\lambda e^{-\tau^2} d\tau = 2 \int_0^{\infty} \tau^\lambda e^{-\tau^2} d\tau, \quad (3.149)$$

откуда в результате подстановки $\tau^2 = \theta$ и с учетом формулы (3.108) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^\lambda e^{-\tau^2} d\tau = \int_0^{\infty} \theta^{(\lambda-1)/2} e^{-\theta} d\theta = \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right). \quad (3.150)$$

Таким образом, окончательно имеем следующее выражение для главного члена асимптотики $I(x)$:

$$I(x) \sim f_0 \left[\frac{-2}{x h''(c)} \right]^{(\lambda+1)/2} e^{x h(c)} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3.151)$$

Пример 6

Во всех предшествующих примерах функция $f(t)$ в окрестности точки $t=c$, т. е. в окрестности максимума $h(t)$, имела степенной характер:

$$f(t) \sim f_0 (t-c)^\lambda, \quad \lambda > -1. \quad (3.152)$$

В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда $f(t)$ при $t \rightarrow c$ стремится к нулю быстрее, чем любая степень $(t-c)$, и, следовательно, не может быть представлена в виде (3.152). Рассмотрим, например, интеграл вида

$$I(x) = \int_a^\infty e^{-1/(t-a)} e^{-x(t-a)^2} dt, \quad t > a, \quad (3.153)$$

при больших положительных x . Поскольку функция $f(t) = \exp[-(t-a)^{-1}]$ стремится к нулю быстрее любой степени $(t-a)$, вклад в асимптотику от окрестности точки $t=a$ будет экспоненциально малым. Поэтому непосредственное применение

алгоритма, используемого в лемме Ватсона, к интегралу (3.153) не позволяет получить требуемое асимптотическое разложение.

При нахождении главной части асимптотического представления $I(x)$ мы не можем отделить $\exp [-(t-a)^{-1}]$ от $\exp \{-x(t-a)^2\}$. Напротив, нам следует объединить эти экспоненты и переписать (3.153) в виде

$$I(x) = \int_a^b e^{h(x,t)} dt, \quad (3.154)$$

$$\text{где} \quad h(x,t) = -(t-a)^{-1} - x(t-a)^2. \quad (3.155)$$

Стационарные точки функции $h(x,t)$ находятся там, где обращается в нуль производная

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 = \frac{1}{(t-a)^2} - 2x(t-a). \quad (3.156)$$

Решая уравнение (3.156), можно найти точку максимума $h(x,t)$

$$t = a + (2x)^{-1/3}. \quad (3.157)$$

Отметим, что в отличие от предыдущих случаев координата точки максимума в данном случае зависит от аргумента x . Таким образом, для того чтобы найти асимптотическое разложение интеграла, мы должны прежде всего провести замену переменной интегрирования с таким расчетом, чтобы координата точки максимума (показателя) экспоненты не зависела от x . Полагая

$$t - a = x^{-1/3}s, \quad (3.158)$$

перепишем интеграл (3.153) в виде

$$I(x) = \frac{1}{x^{1/3}} \int_0^{(b-a)x^{1/3}} e^{-x^{1/3}[s^2 + (1/s)]} ds. \quad (3.159)$$

Максимум функции $h(s) = -(s^2 + s^{-1})$, входящей в (3.159), имеет место в точке $s = 2^{-1/3}$. При условии что $b > 2^{-1/3}$, вклад в асимптотику вносит именно окрестность этой точки. Следовательно, нужно разложить функцию $h(s)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $s = 2^{-1/3}$. Сохраняя в разложении первый член с ненулевой производной, имеем

$$h(s) = h(2^{-1/3}) - 3(s - 2^{-1/3})^2 + \dots \quad (3.160)$$

Далее, полагая в (3.159)

$$3x^{1/3}(s - 2^{-1/3})^2 = \tau^2 \quad (3.161)$$

и заменяя пределы интегрирования соответственно на $+\infty$ и $-\infty$, получаем

$$I(x) \sim \frac{e^{-(3/2)(2x)^{1/3}}}{\sqrt{3x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

или, с учетом формулы (3.125),

$$I(x) \sim \left(\frac{\pi}{3x}\right)^{1/2} e^{-(3/2)(2x)^{1/3}}. \quad (3.162)$$

3.4. Метод стационарной фазы

В этом параграфе мы исследуем обобщенный интеграл Фурье

$$I(\alpha) = \int_a^b f(t) e^{i\alpha h(t)} dt, \quad b > a, \quad (3.163)$$

в случае больших положительных α . При этом предполагается, что $f(t)$ и $h(t)$ — вещественные функции и интеграл (3.163) существует. Подынтегральную функцию в (3.163) можно рассматривать как некоторое комплексное выражение, представленное в показательной форме, причем $f(t)$ и $\alpha h(t)$ служат соответственно его модулем (амплитудой) и аргументом (фазой). Если функции $f(t)$ и $h(t)$ непрерывно дифференцируемы, можно попытаться применить метод интегрирования по частям, полагая

$$u = \frac{f(t)}{h'(t)}, \quad dv = e^{i\alpha h(t)} h'(t) dt.$$

При этом

$$du = \left[\frac{f(t)}{h'(t)} \right]' dt, \quad v = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha h(t)}.$$

Интегрируя (3.163) по частям, находим

$$I(\alpha) = \frac{f(t) e^{i\alpha h(t)}}{i\alpha h'(t)} \Big|_a^b - \frac{1}{i\alpha} \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h'(t)} \right]' e^{i\alpha h(t)} dt. \quad (3.164)$$

Интегральный член в правой части (3.164) мы можем оценить, продолжив процесс интегрирования по частям. Окончательно имеем следующее асимптотическое представление:

$$I(\alpha) = \frac{i}{\alpha} \left[\frac{f(a) e^{i\alpha h(a)}}{h'(a)} - \frac{f(b) e^{i\alpha h(b)}}{h'(b)} \right] + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (3.165)$$

Как и в случае обобщенного интеграла Лапласа (пример 5 § 3.2), метод интегрирования по частям становится непригодным, если производная $h'(t)$ обращается в нуль в какой-либо точке промежутка $[a, b]$. Если же $h' \neq 0$ на промежутке $[a, b]$, то, согласно формуле (3.165), основной вклад в асимптотику ин-

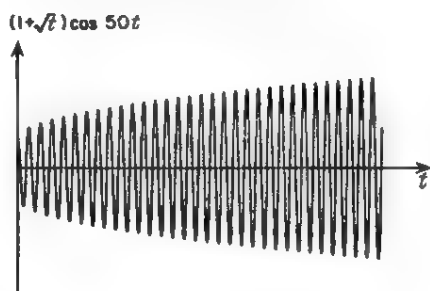


Рис. 3.4. Быстро колеблющаяся функция.

теграла $I(\alpha)$ вносят только окрестности концевых точек. При этом быстрые колебания функции $\exp[i\alpha h(t)]$ уничтожают вклад в интеграл от внутренних точек промежутка (рис. 3.4). В данном случае в отличие от обобщенного интеграла Лапласа, для которого асимптотика определялась только окрестностью концевой точки с большим значением функции $h(t)$, обе граничные точки дают существенный вклад в асимптотику. Если же $h'(t)$ обращается в нуль на промежутке интегрирования (иначе говоря, если фаза имеет стационарные точки), вклад в асимптотическое разложение вносят как окрестности концевых точек, так и окрестности стационарных точек, причем вклад последних значительнее. Этот факт хорошо иллюстрируется на рис. 3.5. В точках, далеких от концевых и стационарных, положительные и отрицательные полуволны взаимно гасятся. Кроме того, из рис. 3.5 ясно, что взаимное погашение колебаний оказывается меньшим в окрестности стационарной точки, чем в окрестностях концевых точек. Поэтому главные члены асимптотического разложения интегралов Фурье должны определяться именно окрестностями стационарных точек.

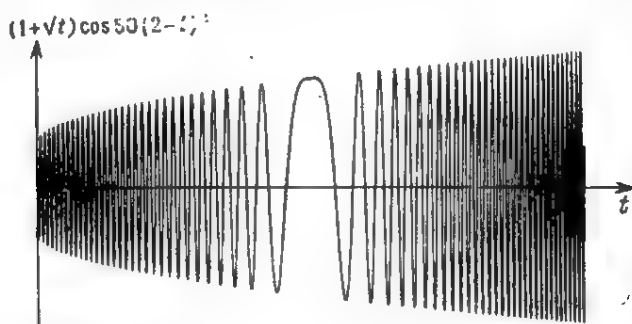


Рис. 3.5. Функция со стационарной точкой.

При отсутствии стационарных точек хорошее приближение для данного интеграла можно получить с помощью метода интегрирования по частям. При этом вклад концевых точек, как показывает формула (3.165), представляет собой величину порядка α^{-1} . Для случая стационарных точек Стокс разработал так называемый метод *стационарной фазы*, позволяющий учитывать вклад стационарной точки $t = c$ в асимптотику с помощью разложения функций $f(t)$ и $h(t)$ по степеням $(t - c)$. Как показано далее, вклад окрестности стационарной точки в таком случае представляет собой величину порядка $\alpha^{-1/2}$, и, следовательно, именно стационарные точки определяют характер главного члена асимптотического разложения интеграла $I(\alpha)$. Ниже мы опишем метод стационарной фазы в применении к четырем конкретным примерам.

Пример 1

Начнем со случая, когда у функции $h(t)$ существует единственная стационарная точка (максимум или минимум), совпадающая с левым концом промежутка интегрирования $t = a$. Кроме того, принимается, что функция $f(t)$ ограничена в точке $t = a$, т. е. что $|f(a)| < +\infty$. Как и при использовании метода Лапласа, главный член разложения интеграла $I(\alpha)$ определяется только вкладом окрестности точки a , и поэтому мы можем заменить верхний предел интегрирования на $a + \delta$, где δ — малое положительное число. Таким образом, имеем

$$I(\alpha) \sim \int_a^{a+\delta} f(t) e^{i\alpha h(t)} dt. \quad (3.166)$$

В первом приближении функцию $f(t)$ можно заменить на $f(a)$, а функцию $h(t)$ представить ее тейлоровским разложением вида

$$h(t) = h(a) + \frac{1}{2!} h''(a)(t-a)^2 + \dots$$

(поскольку $h'(a) = 0$). При этом интеграл (3.166) можно переписать как

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i\alpha h(a)} \int_a^{a+\delta} e^{(1/2) i\alpha h''(a)(t-a)^2} dt. \quad (3.167)$$

Используя вновь допущение о том, что наиболее существенный вклад в асимптотику вносит ближайшая окрестность стационарной точки, заменим верхний предел $a + \delta$ на $+\infty$. Полагая теперь $t - a = z$, перепишем формулу (3.167) в виде

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i\alpha h(a)} \int_0^{\infty} e^{(1/2) i\alpha h''(a) z^2} dz. \quad (3.168)$$

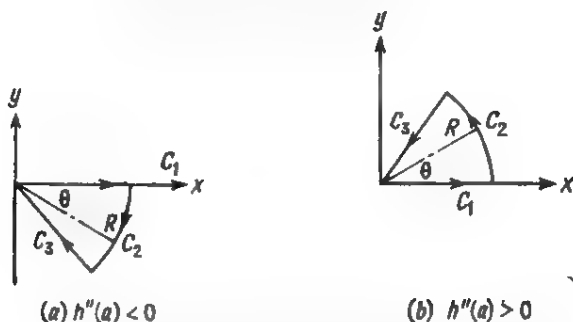


Рис. 3.6. Деформация контура интегрирования.

Для того чтобы вычислить интеграл в правой части (3.168), воспользуемся теоремой Коши, согласно которой, если функция комплексного переменного $F(z)$ имеет производную, непрерывную в некоторой области, ограниченной замкнутым контуром C , и на нем (т. е. $F(z)$ является аналитической в указанной области), то

$$\oint_C F(z) dz = 0. \quad (3.169)$$

Основная идея вычисления интеграла $I(a)$ заключается в том, чтобы выбрать контур интегрирования C таким образом, чтобы исходный интеграл Фурье перешел в интеграл Лапласа, т. е. в интеграл, главная часть подынтегрального выражения которого представляет собою экспоненту с вещественным показателем, затухающую на бесконечности. В рассматриваемом случае имеем

$$F(z) = \exp \left[\frac{1}{2} i a h''(a) z^2 \right], \quad (3.170)$$

так что производная $F'(z)$ существует при любых значениях z . Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой Коши в форме (3.169). Для этого составим замкнутый контур C из отрезка действительной оси x , отрезка прямой, выходящей из начала координат под углом 45° к действительной оси, и дуги окружности достаточно большого радиуса R (рис. 3.6). Тогда

$$\int_{C_1} F(z) dz + \int_{C_2} F(z) dz + \int_{C_3} F(z) dz = 0. \quad (3.171)$$

На дуге C_2

$$z = x + iy = R \cos \theta + i R \sin \theta = R e^{i\theta},$$

откуда

$$z^2 = R^2 e^{2i\theta} = R^2 \cos 2\theta + i R^2 \sin 2\theta.$$

Следовательно, для того чтобы интеграл по дуге C_2 стремился к нулю при $R \rightarrow \infty$, мы должны выбрать аргумент θ положитель-

ным или отрицательным в зависимости от того, положительна или отрицательна производная $h''(a)$. Кроме того, для преобразования нашего интеграла в интеграл Лапласа угол между отрезками C и C_3 должен равняться $+\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$, опять же в зависимости от знака $h''(a)$. При $h''(a) > 0$ имеем (рис. 3.6, б)

$$\int_{C_1} F(z) dz = iR \int_0^{\pi/4} e^{-(1/2) \alpha h''(a) R^2 \sin 2\theta + (1/2) i \alpha h''(a) R^2 \cos 2\theta + i\theta} d\theta. \quad (3.172)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} F(z) dz \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-(1/2) \alpha h''(a) R^2 \sin 2\theta} d\theta = \\ &= R \int_0^{\varepsilon} e^{-(1/2) \alpha h''(a) R^2 \sin 2\theta} d\theta + R \int_{\varepsilon}^{\pi/4} e^{-(1/2) \alpha h''(a) R^2 \sin 2\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (3.173)$$

где ε — малое положительное число. Поскольку $h''(a) > 0$, а $\sin 2\theta > 0$ при $\varepsilon \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, то подынтегральная функция при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно относительно аргумента θ , и, следовательно, второй интеграл в правой части (3.173) также будет стремиться к нулю при $R \rightarrow \infty$. Чтобы оценить интеграл по промежутку $[0, \varepsilon]$, приближенно заменим $\sin 2\theta$ на 2θ , в результате чего получим

$$\begin{aligned} R \int_0^{\varepsilon} e^{-(1/2) \alpha h''(a) R^2 \sin 2\theta} d\theta &\approx R \int_0^{\varepsilon} e^{-\alpha h''(a) R^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha h''(a) R^2 \varepsilon}}{\alpha R h''(a)} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ весь интеграл по дуге C_2 стремится к нулю, и из соотношения (3.171) следует, что

$$\int_{C_1} F(z) dz = - \int_{C_3} F(z) dz \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (3.174)$$

На луче C_1 $z = x$ и $z^2 = x^2$, тогда как на луче C_3 $z = r \exp(i\pi/4)$ и $z^2 = r^2 \exp(i\pi/2) = ir^2$, где r — расстояние от начала координат до текущей точки на луче C_3 . При этом подстановка выражения (3.170) в равенство (3.174) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{(1/2) i \alpha h''(a) x^2} dx &= e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-(1/2) \alpha h''(a) r^2} dr = \\ &= e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-(1/2) \alpha h''(a) r^2} dr. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Соотношение (3.175) показывает, что мы действительно преобразовали интеграл Фурье в окрестности стационарной точки в интеграл Лапласа путем поворота контура интегрирования на угол $\pi/4$ от действительной оси. Далее, используя подстановку

$$\sqrt{\frac{1}{2} \alpha h''(a)} r = \tau$$

и учитывая формулу (3.25), преобразуем (3.175) к виду

$$\int_0^{\infty} e^{(1/2) i \alpha h''(a) x^2} dx = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{\alpha h''(a)}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2 \alpha h''(a)}}. \quad (3.176)$$

Подставляя теперь выражение (3.176) в формулу (3.168), находим

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{\pi} f(a) e^{i \alpha h(a) + i\pi/4}}{\sqrt{2 \alpha h''(a)}}. \quad (3.177)$$

Как уже отмечалось выше, в данном случае вклад в асимптотику от окрестности стационарной точки оказывается величиной порядка $\alpha^{-1/2}$, в то время как вклад от концевых точек представляет собой величину порядка α^{-1} .

В случае $h''(a) < 0$ контур интегрирования нужно повернуть на угол $-\pi/4$, так чтобы

$$z = r e^{-i\pi/4} \quad \text{и} \quad z^2 = r^2 e^{-i\pi/2} = -ir^2.$$

Тогда представление (3.168) примет вид

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i \alpha h(a) - i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{(1/2) \alpha h''(a) r^2} dr. \quad (3.178)$$

Интеграл в правой части (3.178) является интегралом Лапласа, поскольку $h''(a) < 0$. Используя подстановку

$$\sqrt{-\frac{1}{2} \alpha h''(a)} r = \tau$$

и формулу (3.25), получаем вместо (3.178)

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{\pi} f(a) e^{i \alpha h(a) - i\pi/4}}{\sqrt{-2 \alpha h''(a)}} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.179)$$

Отметим, что в общем случае поворот контура интегрирования на угол θ должен осуществляться таким образом, чтобы величина $i \alpha h''(a) z^2$ в интеграле (3.168) оказалась бы вещественной и отрицательной. Поскольку

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{и} \quad z^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta,$$

то указанное требование приводит к условию $\cos 2\theta = 0$, или $\theta = \pm \frac{1}{4} \pi$. При этом имеем $z^2 = i r^2 \sin 2\theta$ и

$$i \alpha h''(a) z^2 = -\alpha r^2 h''(a) \sin 2\theta.$$

Таким образом, при $h''(a) > 0$ следует выбирать $\theta = \pi/4$, а при $h''(a) < 0$ необходимо полагать $\theta = -\pi/4$. Тогда в обоих случаях интеграл в (3.168), т. е. интеграл по лучу C_1 , преобразуется в интеграл типа Лапласа.

Пример 2

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда функция $h(t)$ имеет стационарную точку при $t = c$, где $a < c < b$. Предположим, что других стационарных точек у функции $h(t)$ не имеется; кроме того, будем считать, что функция $f(t)$ ограничена в точке c , т. е. $|f(c)| < +\infty$. В соответствии с методом стационарной фазы главный член асимптотического разложения интеграла (3.163) определяется характером изменения подинтегральной функции в окрестности стационарной точки $t = c$, что позволяет записать

$$I(\alpha) \sim \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t) e^{i\alpha h(t)} dt, \quad (3.180)$$

где δ — малое положительное число. Заменим функцию $f(t)$ ее значением в точке $t = c$, а функцию $h(t)$ в окрестности этой точки — ее рядом Тейлора, который имеет вид

$$h(t) = h(c) + \frac{1}{2!} h''(c) (t - c)^2 + \dots, \quad (3.181)$$

поскольку $h'(c) = 0$. Подставляя разложение (3.181) в интеграл (3.180), заменяя $f(t)$ на $f(c)$ и $t - c$ на z , а также заменяя пределы интегрирования на $\pm\infty$, получаем в итоге

$$I(\alpha) \sim f(c) e^{i\alpha h(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1/2) i\alpha h''(c) z^2} dz. \quad (3.182)$$

Для того чтобы вычислить интеграл в правой части (3.182) в случае, если $h''(c) > 0$, повернем контур интегрирования на угол $\pi/4$, так чтобы $z = r \exp(i\pi/4)$. В результате получим

$$I(\alpha) \sim f(c) e^{i\alpha h(c) + i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2) \alpha h''(c) r^2} dr.$$

Вычисление этого интеграла с помощью подстановки

$$\sqrt{\frac{1}{2} \alpha h''(c)} r = \tau$$

и использования формулы (3.25) приводит к следующему асимптотическому представлению:

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{i\alpha h(c) + i\pi/4}}{\sqrt{\alpha h''(c)}} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.183)$$

Точно так же, в случае если $h''(c) < 0$, мы поворачиваем контур интегрирования на угол $-\pi/4$ и затем, используя подстановку

$$\sqrt{-\frac{1}{2} \alpha h''(c)} r = \tau,$$

получаем окончательно

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2\pi} f(c) e^{i\alpha h(c) - i\pi/4}}{\sqrt{-\alpha h''(c)}} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.184)$$

Пример 3

В качестве третьего примера рассмотрим случай, когда $h(t)$ имеет стационарную точку при $t = a$, причем

$$h'(a) = h''(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0,$$

но $h^{(n)}(a) \neq 0$. Разложим функцию $h(t)$ в ряд Тейлора, который с учетом равенства нулю первых $n-1$ производных будет иметь вид

$$h(t) = h(a) + \frac{1}{n!} h^{(n)}(a) (t-a)^n + \dots \quad (3.185)$$

Подставляя разложение (3.185) в интеграл (3.163) и заменяя в нем $f(t)$ на $f(c)$, в первом приближении получаем

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i\alpha h(a)} \int_a^\infty e^{i\alpha h^{(n)}(a) (t-a)^{n/n!}} dt. \quad (3.186)$$

Полагая теперь $t - a = z$, перепишем представление (3.186) в виде

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i\alpha h(a)} \int_0^\infty e^{i\alpha h^{(n)}(a) z^{n/n!}} dz. \quad (3.187)$$

Для того чтобы вычислить интеграл в правой части (3.187) в случае, если $h^{(n)}(a) > 0$, повернем контур интегрирования на угол $\pi/2n$. При этом имеем $z = r \exp(i\pi/2n)$ и формула (3.187) преобразуется к виду

$$I(\alpha) \sim f(a) e^{i\alpha h(a) + i\pi/2n} \int_0^\infty e^{-\alpha h^{(n)}(a) r^{n/n!}} dr. \quad (3.188)$$

Интеграл в правой части (3.188) выражается через гамма-функцию с помощью подстановки

$$\frac{\alpha h^{(n)}(a) r^n}{n!} = s.$$

При этом, учитывая формулу (3.108), находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha h^{(n)}(a) r^{n/n!}} dr &= \frac{1}{n} \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{1/n} \int_0^\infty s^{(1/n)-1} e^{-s} ds = \\ &= \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{1/n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Таким образом, асимптотическое представление (3.188) можно переписать как

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{1/n} \frac{f(a) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n} e^{i\alpha h(a) + i\pi/2n} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.190)$$

В случае если $h^{(n)}(a) < 0$, контур интегрирования следует повернуть на угол $-\pi/2n$ от действительной оси. Тогда, выражая полученный в результате интеграл через гамма-функцию, имеем

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{-\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{1/n} \frac{f(a) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n} e^{i\alpha h(a) - i\pi/2n} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.191)$$

Из формул (3.190) и (3.191) следует, что главный член асимптотики интеграла (3.163), определяемый вкладом окрестности стационарной точки, представляет собой величину порядка $\alpha^{-1/n}$, где показатель n соответствует наименьшему порядку производной, не равной нулю в стационарной точке. Следовательно, если функция $h(t)$ обладает несколькими стационарными точками на промежутке $[a, b]$, то главный член асимптотического разложения интеграла (3.163) определяется окрестностью стационарной точки с наибольшим значением n . Если же наибольшему значению n соответствует не одна, а несколько стационарных точек, то главный член асимптотического разложения интеграла (3.163) будет представлять собой сумму вкладов от всех этих точек.

Пример 4

Во всех предыдущих примерах функция $f(t)$ была ограниченной в соответствующей стационарной точке. В данном примере рассмотрим интеграл (3.163) при условии, что

$$f(t) \sim f_0 (t-a)^\lambda \quad \text{при } t \rightarrow a, \quad (3.192)$$

где показатель λ должен быть больше -1 , для того чтобы интеграл (3.163) сходиллся. Относительно функции $h(t)$ используем те же предположения, что и в предыдущем примере. Подставляя выражения (3.185) и (3.192) в интеграл (3.163) и заменяя верхний предел интегрирования на $+\infty$, получаем

$$I(\alpha) \sim f_0 e^{i\alpha h(a)} \int_a^\infty (t-a)^\lambda e^{i\alpha h^{(n)}(a)(t-a)^{n/n}} dt. \quad (3.193)$$

Для сходимости интеграла (3.193) на верхнем пределе потребуем выполнения неравенства $\lambda < n-1$. Полагая $t-a = z$, перепишем представление (3.193) в виде

$$I(\alpha) \sim f_0 e^{i\alpha h(a)} \int_0^\infty z^\lambda e^{i\alpha h^{(n)}(a) z^{n/n}} dz. \quad (3.194)$$

Как и ранее, в случае если $h^{(n)}(a) > 0$, преобразуем интеграл (3.194) в интеграл Лапласа, повернув контур интегрирования на угол $\pi/2n$ от действительной оси так, чтобы $z = r \exp(i\pi/2n)$. В результате имеем

$$I(\alpha) \sim \int_0^\infty r^\lambda e^{i\alpha h(a) + i(\lambda+1)\pi/2n} r^{n/n!} dr. \quad (3.195)$$

Интеграл в правой части (3.195) можно представить через гамма-функции с помощью подстановки

$$\frac{\alpha h^{(n)}(a) r^n}{n!} = s.$$

Учитывая формулу (3.108), находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^\lambda e^{-\alpha h^{(n)}(a)} r^{n/n!} dr &= \frac{1}{n} \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{(\lambda+1)/n} \int_0^\infty s^{-1 + (\lambda+1)/n} e^{-s} ds = \\ &= \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{(\lambda+1)/n} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Подстановка выражения (3.196) в (3.195) дает

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{(\lambda+1)/n} \frac{\int_0^\infty \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n} e^{i\alpha h(a) + i(\lambda+1)\pi/2n} \quad (3.197)$$

при $\alpha \rightarrow \infty$.

В случае если $h^{(n)}(a) < 0$, необходимо повернуть контур на угол $-\pi/2n$. Выражая получающийся в результате интеграл через гамма-функцию, получаем окончательно

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{-\alpha h^{(n)}(a)} \right]^{(\lambda+1)/n} \frac{\int_0^\infty \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n} e^{i\alpha h(a) - i(\lambda+1)\pi/2n} \quad (3.198)$$

при $\alpha \rightarrow \infty$.

Отметим, что формулы (3.197) и (3.198) при $\lambda \rightarrow 0$ переходят в выражения (3.190) и (3.191). Еще одно замечание относится к случаю, когда $\lambda + 1 > n$. При этом, как видно из асимптотических представлений (3.197) и (3.198), главный член асимптотического разложения порождается не окрестностью стационарной точки $t = a$, вклад от которой представляет собой величину порядка $\alpha^{-(\lambda+1)/n}$, а концевой точкой $t = b$, вклад от которой оказывается величиной порядка α^{-1} .

3.5. Метод наискорейшего спуска ¹

До сих пор мы рассматривали только интегралы, у которых показатель экспоненты в подынтегральной функции был либо чисто вещественным (интегралы Лапласа), либо чисто мнимым (интегралы Фурье). В этом параграфе исследуем случай комплексных показателей экспоненты, т. е. обратимся к изучению интегралов вида

$$I(\alpha) = \int_C f(z) e^{\alpha h(z)} dz, \quad (3.199)$$

где α — большое действительное положительное число, C — контур интегрирования в комплексной плоскости z , а $f(z)$ и $h(z)$ — аналитические функции z , регулярные в некоторой области плоскости z , содержащей контур интегрирования. Как известно, функция $h(z)$ называется *аналитической* в области D , если она определена и имеет производную в каждой точке этой области. Функция $h(z)$, аналитическая в некоторой области D , за исключением конечного числа точек, называется *мероморфной* в D . Эти исключительные точки называются *особенностями* данной функции.

Функция $h(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} \quad (3.200)$$

существует и не зависит от выбора Δz . Этот предел называется производной функции $h(z)$ в точке z_0 и обозначается как $h'(z)$ или $dh(z_0)/dz$. Подстановка $z = x + iy$ в выражение для $h(z)$ после отделения вещественной и мнимой частей дает

$$h(z) = h(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (3.201)$$

Далее, подставляя выражение (3.201) в (3.200) и принимая Δz равным Δx , имеем

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dz}(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta x} + \\ + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{при } z = z_0. \quad (3.202)$$

¹ В новейшей литературе предпочитают иное название: метод перевала, которое лучше отражает идею и суть метода. Прохождение седловой точки в направлении наискорейшего подъема и спуска — не обязательный, а лишь удобный путь интегрирования в рамках этого метода. — *Прим. ред.*

Аналогично, выбирая $\Delta z = i \Delta y$, для выражения (3.200) находим

$$\frac{dh}{dz}(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0, y_0 + \Delta y) - \varphi(x_0, y_0)}{i \Delta y} + \\ + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0, y_0 + \Delta y) - \psi(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

откуда
$$\frac{dh}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ при } z = z_0. \quad (3.203)$$

Если функция $h(z)$ дифференцируема, то величина производной $h'(z)$ не может зависеть от выбора Δz , и поэтому выражения (3.202) и (3.203) должны быть равны друг другу. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.204)$$

Отделяя в равенстве (3.204) действительную и мнимую части, получаем так называемые уравнения Коши—Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.205a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.205b)$$

Исключение функции ψ из системы уравнений (3.205) с помощью перекрестного дифференцирования дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.206)$$

Аналогичным образом, исключая из системы (3.205) функцию φ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad [(3.207)]$$

Для того чтобы найти асимптотическое представление интеграла $I(\alpha)$, воспользуемся свойством аналитичности подынтегральной функции и, применяя теорему Коши в форме (3.169), деформируем контур C в новый контур C' с таким расчетом, чтобы на C' либо вещественная, либо мнимая части функции $h(z)$ оказались постоянными. Тем самым исходный интеграл преобразуется либо в интеграл Фурье, либо в интеграл Лапласа. Тогда асимптотика преобразованного интеграла может быть найдена с помощью метода стационарной фазы или с помощью метода Лапласа. Во многих случаях оказывается более предпочтительным трансформировать исходный интеграл в интеграл Лапласа (т. е. в интеграл, у которого $\text{Im } h = \psi = \text{const}$), поскольку полное асимптотическое представление интеграла Лапласа порождается лишь окрестностью той точки на контуре C' , где функция $\varphi = \text{Re } h(z)$ принимает наибольшее значение. В то же время полное асимптотическое представление интеграла Фурье определяется, вообще го-

вора, не только стационарными точками функции $\psi = \text{Im } h(z)$, но и поведением подынтегральной функции в концевых точках промежутка интегрирования.

Отметим также, что линии постоянной фазы $\psi = \text{const}$ являются одновременно линиями наиболее быстрого изменения (спуска или подъема) для функции ϕ . Чтобы показать это, воспользуемся понятием градиента. Известно, что в плоском случае градиент функции $\phi(x, y)$ представляет собой вектор с компонентами

$$\bar{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right), \quad (3.208)$$

а производная функции ϕ по направлению, задаваемому единичным вектором \bar{n} , определяется выражением

$$\frac{d\phi}{dn} = \bar{\nabla}\phi \cdot \bar{n}. \quad (3.209)$$

Таким образом, функция $d\phi/dn$ достигает своего наибольшего значения в случае, когда $\bar{n} = \bar{\nabla}\phi/|\bar{\nabla}\phi|$. При этом направление, параллельное вектору $\bar{\nabla}\phi$, будет направлением наибольшего возрастания (подъема) функции ϕ , а противоположное направление, параллельное вектору $-\bar{\nabla}\phi$, — направлением наибольшего убывания ϕ , или направлением быстрого спуска. Кроме того, из уравнений Коши—Римана (3.205) следует, что

$$\bar{\nabla}\phi \cdot \bar{\nabla}\psi = 0, \quad (3.210)$$

т. е. что векторы $\bar{\nabla}\phi$ и $\bar{\nabla}\psi$ взаимно перпендикулярны, и, значит, производная функции ψ в направлении, определяемом вектором $\bar{\nabla}\phi$, будет равняться нулю. Таким образом, функция ψ оказывается постоянной на линиях, касательные к которым параллельны вектору $\bar{\nabla}\phi$, откуда сразу следует, что линии постоянной фазы являются одновременно линиями наискорейшего спуска (или подъема) для функции ϕ .

Отметим также, что функция $\phi(x, y)$ не может иметь в точках регулярности $h(z)$ ни максимума, ни минимума. Действительно, из уравнения (3.206) следует, что если, например,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} < 0, \text{ то } \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} > 0, \quad (3.211)$$

и наоборот. Вместе с тем поверхность $\phi(x, y)$ может иметь точки, в которых

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad (3.212)$$

однако они не являются точками экстремума функции ϕ . Такие точки называются обычно *седловыми точками* (точками перевала). Топография поверхности функции $\phi(x, y)$, имеющей седловую

точку z_0 , изображена на рис. 3.7. Из уравнений Коши—Римана и формул (3.212) следует также, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.213)$$

Таким образом, седловая точка функции $\varphi(x, y)$ является одновременно и седловой точкой функции $\psi(x, y)$, а значит, точкой, где $h'(z) = 0$. При этом, если $z = z_0$ есть седловая точка и если $h'(z_0) = h''(z_0) = \dots = h^{(m)}(z_0) = 0$, но $h^{(m+1)}(z_0) \neq 0$, точку z_0 называют *седловой точкой порядка $m+1$* .

Через седловую точку z_0 проходят две или более линий уровня (т. е. кривых, вдоль которых функция φ сохраняет постоянное значение), разделяющих окрестность седловой точки на отдельные сектора. Кроме того, через седловую точку проходят две или более линий постоянной фазы (т. е. кривых, вдоль которых функция ψ постоянна), являющихся линиями скорейшего спуска или подъема.

Хотя форма линий уровня и линий постоянной фазы, проходящих через седловую точку, если проследивать их на всей комплексной плоскости, может быть достаточно сложной, однако найти вид и расположение этих линий в окрестности седловой точки оказывается сравнительно нетрудно. Так, если седловая точка имеет порядок m , то в окрестности этой точки ряд Тейлора для функции $h(z)$ имеет вид

$$h(z) \approx h(z_0) + \frac{1}{m!} h^{(m)}(z_0) (z - z_0)^m. \quad (3.214)$$

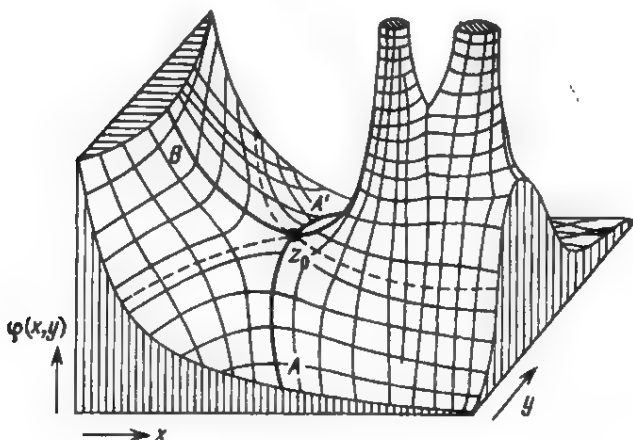


Рис. 3.7. Топография поверхности $\varphi = \operatorname{Re} h(z)$ вблизи седловой точки для типичной функции $h(z)$. Толстые сплошные кривые, выходящие из седловой точки, обозначают срединные линии «хребтов» и «долин», пунктирные кривые — линии уровня $\varphi = \varphi(x_0, y_0) = \operatorname{const}$. Кривая AA' является линией наискорейшего спуска.

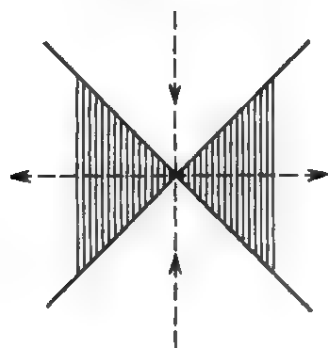


Рис. 3.8. Топография поверхности $\varphi = \operatorname{Re} h(z)$ вблизи седловой точки второго порядка для случая $\chi = 0$. «Долины» на рис. заштрихованы, сплошные кривые представляют собой линии уровня, кривые наискорейшего спуска обозначены пунктиром, а стрелки на них указывают направление убывания функции φ .

Поэтому если положить

$$\frac{1}{m!} h^{(m)}(z_0) = K e^{i\chi} \quad \text{и} \quad z - z_0 = r e^{i\theta}, \quad (3.215)$$

то

$$h(z) \approx h(z_0) + K r^m e^{i(\chi + m\theta)} = \varphi + i\psi,$$

или

$$\varphi = \varphi_0 + K r^m \cos(\chi + m\theta), \quad \psi = \psi_0 + K r^m \sin(\chi + m\theta), \quad (3.216)$$

где φ_0 и ψ_0 представляют собой значения функций φ и ψ в седловой точке. Таким образом, линии уровня $\varphi = \varphi_0$, проходящие через седловую точку, приближенно описываются уравнением

$$\cos(\chi + m\theta) = 0, \quad \text{или} \quad \chi + m\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (3.217)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, 2m$. Уравнение (3.217) дает нам $2m$ линий уровня функции φ , задаваемых аргументами $\theta = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \chi\right]/m$. Эти линии делят окрестность точки z_0 на m «холмов» и m «ложбин».

Точно так же из второго из уравнений (3.216) следует, что линии постоянной фазы $\psi = \psi_0$ приближенно задаются уравнением

$$\sin(\chi + m\theta) = 0, \quad \text{или} \quad \chi + m\theta = n\pi, \quad (3.218)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, 2m$. Уравнение (3.218) описывает $2m$ кривых, m из которых являются линиями наискорейшего спуска, а другие m — линиями наискорейшего подъема.

В самом простом случае, когда седловая точка имеет порядок, равный двум, существуют две линии наискорейшего спуска и две линии наискорейшего подъема (рис. 3.8). Кроме того, суще-

ствуют четыре линии уровня, разделяющие окрестность седловой точки на два «холма» и две «ложбины». В случае седловой точки третьего порядка имеется шесть линий уровня, разделяющих окрестность седловой точки на три «холма» и три «ложбины». Кроме того, через эти «ложбины» проходят три линии наискорейшего спуска, а через «холмы» — три линии наискорейшего подъема (рис. 3.9).

Проведенный анализ показывает, что эффективным методом построения асимптотических разложений для интегралов по контурам, концевые точки которых располагаются в двух различных «ложбинах», является *метод наискорейшего спуска*, развитый Риманом и Дебаем. Идея этого метода заключается в деформации контура интегрирования C в некоторый новый контур C' , удовлетворяющий следующим условиям:

1. Контур C' проходит через седловую точку (т. е. через нуль функции $h'(z)$).

2. Мнимая часть ψ функции $h(z)$ на этом контуре должна быть постоянна.

3. Контур C' представляет собой кривую наискорейшего спуска.

Если по условию задачи деформированный контур проходит более чем через одну седловую точку, то каждая из них может дать свой вклад в асимптотику интеграла, причем основной вклад вносится точкой, соответствующей наибольшему значению функции φ . Если же производная $h'(z)$ не обращается в нуль, то контур интегрирования C' выбирают таким образом, чтобы удовлетворить второму и третьему из перечисленных выше условий.

Ниже метод наискорейшего спуска иллюстрируется тремя типичными примерами.

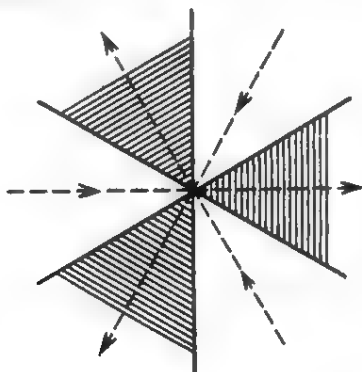


Рис. 3.9. Топография поверхности $\varphi = \operatorname{Re} h(z)$ вблизи седловой точки третьего порядка для случая $\chi = 0$. «Долины» на рисунке заштрихованы, сплошные кривые представляют собой линии уровня, кривые наискорейшего спуска обозначены пунктиром, а стрелки на них указывают направление возрастания функции φ .

Пример 1

В качестве первого примера рассмотрим следующее интегральное представление функции Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}} dz \quad \text{при } \alpha \gg 1. \quad (3.219)$$

Интегрирование по частям в этом случае не дает никаких результатов, поскольку разбиение на множители

$$u = e^{i\alpha z}, \quad dv = (1-z^2)^{-1/2} dz$$

приводит к разложению, не имеющему асимптотического характера, а разбиение

$$u = (1-z^2)^{-1/2}, \quad dv = e^{i\alpha z} dz$$

приводит к выражениям, содержащим особенности в точках $z = \pm 1$.

Для того чтобы найти приближенное выражение для $J_0(\alpha)$ при больших α с помощью метода наискорейшего спуска, деформируем контур интегрирования в линию постоянной фазы. Отметим, что $h(z) = iz$, так что фаза ψ при $z = 1$ равна 1, а при $z = -1$ она оказывается равной -1 . Таким образом, контур интегрирования не удастся деформировать непрерывным образом в единый контур, вдоль которого фаза ψ оставалась бы постоянной. Вместе с тем существует возможность деформировать его в контур, изображенный на рис. 3.10 и состоящий из трех отрезков прямых: отрезка C_1 , соединяющего точки -1 и $-1 + iY$, отрезка C_2 , соединяющего точки $-1 + iY$ и $1 + iY$, и,

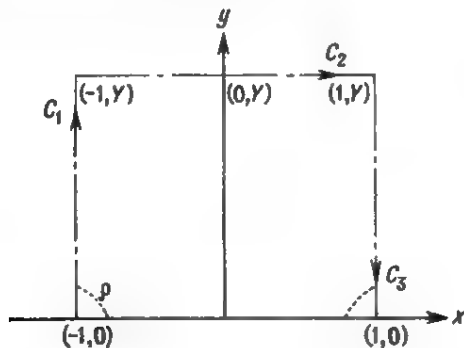


Рис. 3.10. Контур интегрирования для вычисления интеграла (3.219).

наконец, отрезка C_3 , соединяющего точки $1 + iY$ и $+1$. Согласно теореме Коши (3.169), имеем

$$\int_{c_1+c_2+c_3} \frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}} dz = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}} dz. \quad (3.220)$$

Строго говоря, контур следует деформировать так, как показано на рис. 3.10 пунктирными линиями, с тем чтобы на него не попадали точки ветвления подынтегральной функции $x = \pm 1$. Однако в пределе, при $\rho \rightarrow 0$, интеграл по такому криволинейному (т. е. с обходом углов) контуру стремится к интегралу по контуру, состоящему из прямолинейных отрезков. Поэтому в дальнейшем мы можем не принимать во внимание наличие точек ветвления на контуре интегрирования. При $Y \rightarrow \infty$ интеграл по участку C_3 стремится к нулю, поскольку в этом случае подынтегральная функция также стремится к нулю, причем равномерно относительно $x = \operatorname{Re} z$. Следовательно,

$$J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-1+i\infty} \frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}} dz + \frac{1}{\pi} \int_{1+i\infty}^1 \frac{e^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}} dz. \quad (3.221)$$

Используя подстановку $z = -1 + iy$ в первом интеграле и $z = 1 + iy$ во втором, перепишем (3.221) в виде

$$J_0(\alpha) = \frac{ie^{-i\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha y}}{\sqrt{2iy+y^2}} dy + \frac{ie^{i\alpha}}{\pi} \int_\infty^0 \frac{e^{-\alpha y}}{\sqrt{-2iy+y^2}} dy,$$

или

$$\begin{aligned} J_0(\alpha) &= \frac{ie^{-i\alpha-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2}iy\right)^{-1/2} e^{-\alpha y} dy - \\ &- \frac{ie^{i\alpha+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2}iy\right)^{-1/2} e^{-\alpha y} dy. \end{aligned} \quad (3.222)$$

Интегралы в правой части (3.222) представляют собой интегралы Лапласа, и поэтому основной вклад в их асимптотику при $\alpha \rightarrow \infty$ вносит только точка $y = 0$. Таким образом, мы можем воспользоваться леммой Ватсона, раскладывая предэкспоненциальные множители, входящие в состав подынтегральной функции, в ряд при малых y и интегрируя полученный результат почленно. При этом главный член асимптотического разложения $J_0(\alpha)$ оказывается равным

$$J_0(\alpha) \sim \frac{e^{-i\alpha+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-\alpha y} dy + \frac{e^{i\alpha-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-\alpha y} dy.$$

С помощью подстановки $\alpha y = t$ полученное выражение можно привести к виду

$$J_0(\alpha) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha\pi}} [e^{-i\alpha+i\pi/4} + e^{i\alpha-i\pi/4}] \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt. \quad (3.223)$$

Окончательно, используя формулу (3.121) и тождество

$$(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2 \cos \theta,$$

перепишем асимптотическое представление (3.223) в следующем виде:

$$J_0(\alpha) \sim \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \cos\left(\alpha - \frac{1}{4}\pi\right) \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.224)$$

Пример 2

В качестве второго примера рассмотрим интеграл Эйри

$$\text{Ai}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + \alpha s\right) ds \quad (3.225)$$

в случае $\alpha \gg 1$. Для того чтобы преобразовать (3.225) в интеграл, имеющий форму (3.199), введем преобразование $s = \alpha^{1/2}z$. В результате получим

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\alpha) &= \frac{\alpha^{1/2}}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[\alpha^{3/2}\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right)\right] dz = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_0^\infty [e^{i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} + e^{-i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)}] dz = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} dz + \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} dz = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} dz - \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} dz, \end{aligned}$$

откуда
$$\text{Ai}(\alpha) = \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha^{3/2}(z^3/3+z)} dz. \quad (3.226)$$

Интегрирование по частям дает тривиальный результат $\text{Ai}(\alpha) = 0 \cdot \alpha^{-1} + 0 \cdot \alpha^{-2} + \dots$, поскольку, как будет показано ниже, в асимптотическое разложение входит экспоненциальный множитель, который стремится к нулю быстрее, чем любая степень α^{-1} .

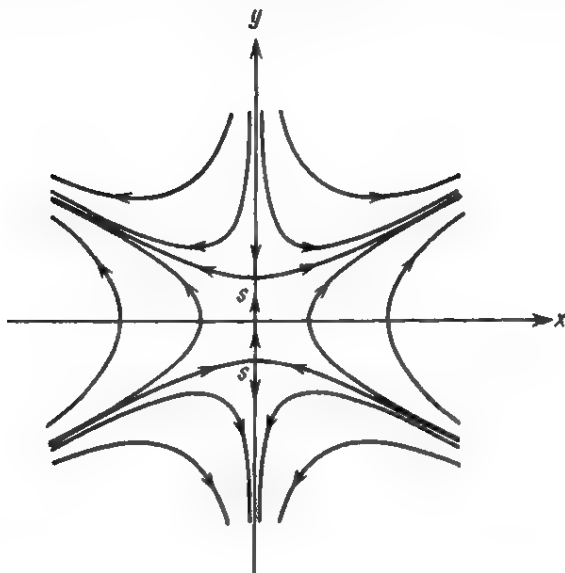


Рис. 3.11. Кривые постоянной фазы (включая траектории наискорейшего спуска), проходящие через седловые точки, для функции Эйри. Стрелки на рис. указывают направление, в котором функция $\operatorname{Re} h(z)$ убывает.

Для того чтобы найти асимптотическое представление функции $Ai(\alpha)$, воспользуемся методом наискорейшего спуска. В данном случае

$$h(z) = i \left(\frac{1}{3} z^3 + z \right) \text{ и } h'(z) = i(z^2 + 1),$$

так что седловые точки, т. е. нули производной $h'(z)$, суть точки $z = \pm i$. В этих точках

$$h(\pm i) = i \left(\mp \frac{1}{3} i \pm i \right) = \mp \frac{2}{3},$$

и, следовательно, $\operatorname{Im} h(\pm i) = 0$. Полагая теперь в выражении для $h(z)$ $z = x + iy$, имеем

$$\begin{aligned} h(z) &= i \left[\frac{1}{3} (x + iy)^3 + x + iy \right] = \\ &= y \left(\frac{1}{3} y^3 - x^3 - 1 \right) + ix \left(\frac{1}{3} x^2 - y^2 + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.227)$$

Поскольку в седловых точках $\operatorname{Im} h = 0$, то уравнение линий наискорейшего спуска, проходящих через эти точки, получается из условия $\operatorname{Im} h = 0$. В соответствии с формулой (3.227) это уравнение имеет вид

$$x \left(\frac{1}{3} x^2 - y^2 + 1 \right) = 0. \quad (3.228)$$

Уравнение (3.228) представляет собой кубическое уравнение, определяющее три кривые наискорейшего спуска: мнимую ось $x = 0$ и две ветви гиперболы

$$\frac{1}{3}x^2 - y^2 + 1 = 0. \quad (3.229)$$

Эти линии изображены на рис. 3.11, причем стрелки на кривых указывают направление, в котором убывает функция $\operatorname{Re} h(z)$. Таким образом, для того чтобы применить метод наискорейшего спуска, деформируем исходный контур интегрирования в контур C_1 , который:

- 1) проходит через седловую точку $z = i$,
- 2) представляет собой кривую постоянной фазы,
- 3) является линией наискорейшего спуска из седловой точки.

Требуемая деформация вполне осуществима, поскольку в областях, расположенных между исходным и деформированным контуром, подынтегральная функция затухает экспоненциально при $z \rightarrow \infty$. Поэтому мы можем заменить интеграл (3.226) на эквивалентный ему интеграл

$$\operatorname{Ai}(\alpha) = \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_{C_1} e^{i\alpha^{3/2}(z^{3/3}+z)} dz. \quad (3.230)$$

На контуре C_1 выполняется уравнение (3.229), и, значит, $x^2 = 3(y^2 - 1)$, так что соотношение (3.227) можно записать в виде

$$h(z) = y \left(2 - \frac{8}{3} y^2 \right) \text{ при } y \geq 1. \quad (3.231)$$

Кроме того, функция $h(z)$ имеет максимум при $z = i$ (т. е. при $y = 1$). Следовательно, интеграл в формуле (3.230) представляет собой обобщенный интеграл Лапласа, и его асимптотическое представление может быть получено с помощью леммы Ватсона. Для этого введем подстановку

$$\alpha^{3/2}h(z) = i\alpha^{3/2} \left(\frac{1}{3}z^3 + z \right) = \alpha^{3/2}h(i) - \tau^2 = -\frac{2}{3}\alpha^{3/2} - \tau^2. \quad (3.232)$$

Тогда

$$i\alpha^{3/2}(z^2 + 1)dz = -2\tau d\tau, \quad (3.233)$$

и интеграл (3.230) принимает вид

$$\operatorname{Ai}(\alpha) \sim \frac{ie^{-(2/3)\alpha^{3/2}}}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau e^{-\tau^2}}{z^2 + 1} d\tau. \quad (3.234)$$

Далее, нам нужно разложить функцию $\{z^2(\tau) + 1\}^{-1}$ в ряд при малых τ , а для этого необходимо построить разложение по степеням τ самой функции $z(\tau)$. С этой целью разложим левую часть

(3.232) в ряд Тейлора по степеням $(z - i)$, в результате чего получим

$$(z - i)^2 - \frac{1}{3} i (z - i)^3 = \alpha^{-3/2} \tau^2. \quad (3.235)$$

Решение этого уравнения при малых τ имеет вид ¹

$$z = i + \alpha^{-3/4} + \dots \quad (3.235a)$$

Таким образом,

$$(z^2 + 1)^{-1} = (2i\alpha^{-3/4}\tau)^{-1} \text{ при } \tau \rightarrow 0. \quad (3.236)$$

Подстановка выражения (3.236) в формулу (3.234) приводит к окончательному асимптотическому представлению функции $\text{Ai}(\alpha)$:

$$\text{Ai}(\alpha) \sim \frac{e^{-(2/3)\alpha^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.237)$$

Нужно отметить, что строго следовать при интегрировании вдоль всей линии наискорейшего спуска оказывается не столь уж необходимым, поскольку асимптотическое разложение интегралов типа (3.199) полностью определяется окрестностями точек, где функция φ принимает наибольшее значение. Эти точки могут быть как внутренними, так и концевыми точками отрезка интегрирования, причем если точка, в которой достигается максимум φ , является внутренней, то она необходимо будет и седловой. В данном примере для получения главного члена разложения оказывается вполне достаточным строго следовать по кривой наискорейшего спуска лишь на очень коротком ее участке, проходящем через седловую точку. Поскольку седловой точкой в нашем случае является точка $z = i$, то показатель экспоненты в (3.230) можно приближенно представить как

$$i\alpha^{3/2} \left(\frac{1}{3} z^3 + z \right) = -\frac{2}{3} \alpha^{3/2} - \alpha^{3/2} (z - i)^2 + \dots \quad (2.238)$$

При этом направление обхода контура интегрирования в точке $z = i$ должно выбираться с таким расчетом, чтобы величина $\alpha^{3/2} (z - i)^2 = \tau^2$ оказалась вещественной и положительной. Подставляя теперь (3.238) в интеграл (3.230) и заменяя в нем пределы интегрирования соответственно на $-\infty$ и $+\infty$, вновь получаем для главного члена асимптотического разложения выражение вида

$$\text{Ai}(\alpha) \sim \frac{e^{-(2/3)\alpha^{3/2}}}{2\pi\alpha^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

¹ Разложение функции $z(\tau)$ можно получить из уравнения (3.235) с помощью метода неопределенных коэффициентов или путем обращения степенных рядов по формуле Бурмана—Лагранжа (см., например, Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965). — *Прим. перев.*

или, с учетом формулы (3.25),

$$\text{Ai}(\alpha) \sim \frac{e^{-(2/3)\alpha^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.239)$$

Пример 3

В качестве последнего примера рассмотрим интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha(3\lambda z - z^3)} dz \quad (3.240)$$

при больших положительных α . Параметр λ в данном случае представляет собой комплексное число, не зависящее от α . Седловые точки задаются уравнением

$$h'(z) = \frac{d}{dz}(3\lambda z - z^3) = 0, \text{ или } \lambda - z^2 = 0,$$

и, следовательно, они имеют координаты $z = \pm \lambda^{1/2}$. Если положить $\lambda = \sigma^2 \exp(2iv)$, то координатами седловых точек будут значения $z = \pm \sigma \exp(iv)$. Поскольку вторая производная $h''(z) = -6z$ в указанных точках отлична от нуля, то данные седловые точки оказываются второго порядка.

Для того чтобы построить асимптотическое представление интеграла (3.240), вновь воспользуемся свойством аналитичности подынтегральной функции и деформируем исходный контур интегрирования в контур C , проходящий через начало координат и седловую точку $z = \sigma \exp(iv)$ и являющийся линией наискорейшего спуска (рис. 3.12). Тогда интеграл (3.240) переписывается в виде

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha(3\lambda z - z^3)} dz = \int_C e^{\alpha(3\lambda z - z^3)} dz. \quad (3.241)$$

Как отмечалось выше, основной вклад в асимптотику интеграла $I(\alpha)$ вносит лишь небольшой отрезок \hat{C} контура C , проходящий через седловую точку. Поэтому

$$I(\alpha) \sim \int_{\hat{C}} e^{\alpha(3\lambda z - z^3)} dz. \quad (3.242)$$

Поскольку точка $z = \sigma \exp(iv)$ является седловой, показатель экспоненты в интеграле (3.242) можно представить в виде ряда

$$\alpha(3\lambda z - z^3) = 2\alpha\sigma^3 e^{3iv} - 3\alpha\sigma e^{iv}(z - \sigma e^{iv})^2 + \dots, \quad (3.243)$$

а направление \hat{C} выбрать таким образом, чтобы

$$3\alpha\sigma e^{iv}(z - \sigma e^{iv})^2 = \tau^2, \quad (3.244)$$

где τ^2 — вещественная и положительная величина. Таким образом, контур интегрирования \hat{C} будет задаваться параметрическим уравнением

$$z - \sigma e^{i\nu} = \pm \frac{e^{-i\nu/2}}{\sqrt{3\alpha\sigma}} \tau. \quad (3.245)$$

Формула (3.245) показывает, что существуют два возможных направления интегрирования по контуру \hat{C} , определяемые аргументами $-\nu/2$ и $\pi - \nu/2$. Для того чтобы выбрать здесь правильное направление, необходимо исследовать характер изменения функций φ и ψ на всей комплексной плоскости (рис. 3.12). Из рисунка ясно, что интегрирование следует проводить в направлении, определяемом аргументом $-\nu/2$. Таким образом, в формуле (3.245) мы должны выбрать знак плюс, поскольку предполагается, что τ на контуре \hat{C} изменяется от отрицательных значений к положительным. При этом, согласно лемме Ватсона, в качестве пределов интегрирования можно выбрать соответственно $-\infty$ и $+\infty$. Подставляя теперь выражение (3.245) в интеграл (3.242), с учетом сделанных замечаний для главного члена асимптотики исходного интеграла получаем выражение вида

$$I(\alpha) \sim \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} i\nu + 2\alpha\sigma^3 e^{3i\nu} \right]}{\sqrt{3\alpha\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

или

$$I(\alpha) \sim \sqrt{\frac{\pi}{3\alpha\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} i\nu + 2\alpha\sigma^3 e^{3i\nu} \right] \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (3.246)$$

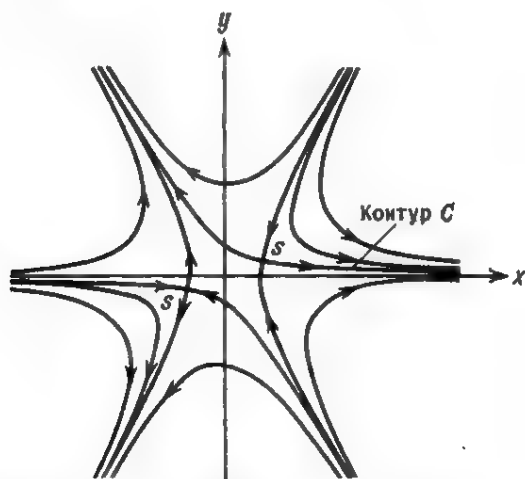


Рис. 3.12. Деформированный контур интегрирования C для случая $\sigma = 1$ и $\nu = 22.5^\circ$.

Упражнения

3.1. Показать что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^1 \frac{\sin \varepsilon t}{t} dt \sim \varepsilon - \frac{1}{18} \varepsilon^3 + \frac{1}{600} \varepsilon^5.$$

3.2. Показать, что при $x \rightarrow 0$

$$\int_0^x t^{-3/4} e^{-t} dt \sim 4x^{1/4} - \frac{4}{5} x^{5/4} + \frac{2}{9} x^{9/4}.$$

3.3. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \quad \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \sim e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} \right];$$

$$б) \quad \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^n} dt \sim \frac{e^{-x}}{x^n} \left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3} \right].$$

3.4. Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt \sim x^\lambda e^{-x} \left[\frac{1}{x} + \frac{\lambda-1}{x^2} + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{x^3} \right].$$

3.5. Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt \sim e^{-x^2} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} \right].$$

3.6. Рассмотреть полный эллиптический интеграл второго рода

$$I(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta.$$

Показать, что

$$I(m) = \frac{1}{2} \pi \left[1 - \frac{1}{4} m - \frac{3}{64} m^2 - \frac{5}{256} m^3 - \frac{175}{16384} m^4 + \dots \right].$$

Сравнить полученный результат с результатами, приведенными в книге Абрамовица и Стигана (1979).

3.7. Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \sim \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} \right) \sin x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} \right) \cos x.$$

3.8. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \quad \int_x^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{1}{\sqrt{x}} (f \cos x - g \sin x);$$

$$б) \quad \int_x^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{1}{\sqrt{x}} (f \sin x + g \cos x).$$

где

$$f = \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2x)^5} + \dots,$$

$$g \sim 1 - \frac{1 \cdot 3}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2x)^4} + \dots.$$

3.9. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t} dt \sim \frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6};$$

$$б) \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t} dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5}.$$

3.10. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_x^\infty \frac{dt}{t^2 \ln t} \sim \frac{1}{x \ln x};$$

$$б) \int_x^\infty \frac{dt}{t \ln \ln t} \sim \frac{\ln x}{\ln \ln x}.$$

3.11. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_x^\infty \frac{t^{1/2}}{1+t^2} dt \sim 2x^{-1/2} - \frac{2}{5}x^{-5/2} + \frac{2}{9}x^{-9/2};$$

$$б) \int_0^x (t^3 + t^2)^{1/2} dt \sim \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^{3/2};$$

$$в) \int_a^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}.$$

3.12. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_0^1 e^{-xt} \ln(2+t) dt \sim \frac{\ln 2}{x};$$

$$б) \int_0^1 e^{-xt} \ln(1+t) dt \sim \frac{1}{x^2};$$

$$в) \int_0^1 e^{-xt} \sin t dt \sim \frac{1}{x^2};$$

$$г) \int_0^1 e^{-(x/t) + t + x} dt \sim \frac{e}{2x}.$$

3.13. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\omega + x + x\sqrt{\omega}} dx \sim \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^{3/2}}.$$

3.14. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

а) $\int_0^{\infty} e^{-\omega(x^2+2x)} (1+x)^{5/2} dx \sim \frac{1}{2\omega};$

б) $\int_0^{\infty} e^{-\omega(x^2+2x)} \ln(2+x) dx \sim \frac{\ln 2}{2\omega};$

в) $\int_0^{\infty} e^{-\omega(x^2+2x)} \ln(1+x) dx \sim \frac{1}{4\omega^2};$

г) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega(x^2+2x)}}{\sqrt{x+3x^2}} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}.$

3.15. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_a^b (x-a)^{\lambda} e^{-\omega h(x)} dx \sim \frac{e^{-\omega h(a)} \Gamma(\lambda+1)}{[\omega h'(a)]^{\lambda+1}},$$

где $\lambda > -1$, $b > a$ и $h(x) > h(a)$.

3.16. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

а) $\int_1^{\infty} e^{-\omega x^2} x^{5/2} \ln(1+x) dx \sim \frac{e^{-\omega} \ln 2}{2\omega};$

б) $\int_1^{\infty} e^{-\omega x^2} x^{5/2} \ln x dx \sim \frac{e^{-\omega}}{4\omega^2}.$

3.17. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

а) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega x^2}}{\sqrt{x+x^2}} dx \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\omega^{1/4}};$

б) $\int_0^{\infty} e^{-\omega x^2} x^{5/2} \ln(1+x) dx \sim \frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{2\omega^{9/4}}.$

3.18. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2} \ln(2+x^2) dx \sim \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{\sqrt{\omega}}.$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2} \ln(1+x^2) dx \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega^{3/2}}.$

3.19. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_1^2 e^{-x[t + (1/t)]} dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} e^{-2x};$$

$$б) \int_1^2 e^{-x[t + (1/t)]} \ln(1+t) dt \sim \frac{\sqrt{\pi} \ln 2}{2\sqrt{x}} e^{-2x};$$

$$в) \int_1^2 e^{-x[t + (1/t)]} \ln t dt \sim \frac{e^{-2x}}{2x};$$

$$г) \int_1^2 \frac{e^{-x[t + (1/t)]}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2}x^{1/4}} e^{-2x};$$

3.20. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) \int_0^1 \frac{e^{-xt^n}}{1+t} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nx^{1/n}};$$

$$б) \int_0^1 e^{-xt^n} \ln(1+t) dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{nx^{2/n}};$$

$$в) \int_0^1 \frac{e^{-xt^n}}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{nx^{1/2n}}.$$

3.21. Показать, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\text{Ai}(-\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 - \alpha t\right) dt \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha^{1/4}}} \sin\left(\frac{2}{3}\alpha^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right).$$

3.22. Показать, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty e^{i\alpha[t^3/3+t]} dt \sim \frac{1}{\alpha}.$$

3.23. Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right).$$

3.24. Показать, что при $\alpha \rightarrow \infty$:

$$a) \int_0^1 e^{i\alpha t^3} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) e^{i\pi/6}}{3\alpha^{1/3}};$$

$$б) \int_0^1 \frac{e^{i\alpha t^3}}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) e^{i\pi/2}}{3\alpha^{1/6}};$$

$$в) \int_0^1 e^{i\alpha t^3} \ln(1+t) dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) e^{i\pi/3}}{3\alpha^{2/3}};$$

$$г) \int_0^1 e^{i\alpha t^3} \ln(2+t) dt \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) e^{i\pi/6} \ln 2}{3\alpha^{1/3}}.$$

3.25. Показать, что при $x \rightarrow \infty$:

$$a) K_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x};$$

$$б) H_0^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\pi/4)};$$

$$в) J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}} dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right);$$

$$г) Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos xt}{\sqrt{t^2-1}} dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right);$$

$$д) I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos n\theta d\theta \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

3.26. Показать, что при $z \rightarrow \infty$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z}.$$

3.27. Показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_{-1}^1 e^{ixt} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt \sim \left(\frac{2}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right].$$

3.28. Показать, что при $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 \ln t e^{i\omega t} dt \sim -\frac{i \ln \omega}{\omega} - \frac{i\gamma + \frac{1}{2}\pi}{\omega},$$

где $\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt$.

3.29. Показать, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty e^{\alpha(z - iz^3/3)} dz \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{1}{8} i\pi + \frac{2}{3} \alpha e^{-i\pi/4} \right]}{\alpha^{1/2}}.$$

3.30. Рассмотреть интегральное представление для полиномов Лежандра n -го порядка

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\mu + \sqrt{\mu^2 - 1} \cos \theta]^n d\theta.$$

Показать, что

$$P_n(\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1})^{n + \frac{1}{2}}}{(\mu^2 - 1)^{1/4}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

3.31. Рассмотреть функцию Эйри второго рода, определяемую интегралом

$$\text{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3 + zt} + \sin \left(\frac{1}{3} t^3 + zt \right) \right] dt.$$

а) Используя метод Лапласа для оценки первого интеграла и метод интегрирования по частям для второго, показать, что при $z \rightarrow \infty$

$$\text{Bi}(z) \sim \frac{e^{(2/3) z^{3/2}}}{\sqrt{\pi z^{1/4}}}.$$

б) Положить $z = -\alpha$; далее, используя метод Лапласа для оценки первого интеграла и метод стационарной фазы для второго, показать, что

$$\text{Bi}(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha^{1/4}}} \cos \left(\frac{2}{3} \alpha^{3/2} + \frac{1}{4} \pi \right).$$

УРАВНЕНИЕ ДЮФФИНГА

Во многих случаях свободные колебания консервативных систем с одной степенью свободы описываются уравнениями вида

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + f(x^*) = 0, \quad (4.1)$$

где f — некоторая нелинейная функция от x^* ; при этом член $\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}}$ определяет ускорение системы, а $f(x^*)$ — нелинейную восстанавливающую силу. Пусть координата $x^* = x_0^*$ определяет положение равновесия системы; тогда ясно, что $f(x_0^*) = 0$. Предположим также, что функция f является аналитической в точке $x^* = x_0^*$; тогда в окрестности этой точки ее можно разложить в ряд Тейлора

$$f(x^*) = k_1(x^* - x_0^*) + k_2(x^* - x_0^*)^2 + k_3(x^* - x_0^*)^3 + \dots, \quad (4.2)$$

где
$$k_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^{*n}}(x_0^*).$$

Таким образом, уравнение (4.1) можно представить в виде

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + k_1(x^* - x_0^*) + k_2(x^* - x_0^*)^2 + k_3(x^* - x_0^*)^3 + \dots = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) описывает движение данной системы вблизи положения равновесия. Вводя для удобства преобразование $u^* = x^* - x_0^*$, из (4.3) получаем

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_2 u^{*2} + k_3 u^{*3} + \dots = 0. \quad (4.4)$$

Большая часть этой главы посвящена исследованию специального вида уравнения (4.4), а именно уравнения

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_3 u^{*3} = 0, \quad (4.5)$$

где $k_1 > 0$, а k_3 может быть как положительным, так и отрицательным. Уравнение (4.5) называют обычно *уравнением Дюффинга*. Как уже отмечалось в гл. 1, прежде чем приступить к решению исходных уравнений, следует принять за правило обя-

зательно приводить их к безразмерному виду. С этой целью выберем некоторые характерные масштабы задачи — линейный U^* и временной T^* — и положим

$$u = \frac{u^*}{U^*}, \quad t = \frac{t^*}{T^*}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{T^*} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dt^{*2}} = \frac{1}{T^{*2}} \frac{d^2}{dt^2};$$

при этом уравнение (4.5) преобразуется к виду

$$\ddot{u} + k_1 T^{*2} u + k_3 T^{*2} U^{*2} u^3 = 0. \quad (4.6)$$

Выберем T^* таким образом, чтобы $k_1 T^{*2} = 1$, и положим $\varepsilon = k_3 T^{*2} U^{*2} = k_3 U^{*2} / k_1$. Тогда (4.6) перепишется как

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (4.7)$$

Отметим, что параметр ε представляет собой безразмерную величину, которая характеризует степень нелинейности системы. В качестве начальных условий примем, что

$$u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{x}_0. \quad (4.8)$$

Решение u нашей задачи является функцией независимой переменной t и параметра ε , что мы будем записывать как $u = u(t; \varepsilon)$, отделяя параметр ε от аргумента t точкой с запятой. В следующем параграфе прямым разложением по параметру мы построим приближенное решение задачи (4.7)–(4.8) при малых, но конечных ε , однако это разложение не будет равномерно пригодным для больших значений t . Далее, в § 4.2 мы получим точное решение задачи, из которого будет видно, что частота системы ω является функцией параметра ε (т. е. степени нелинейности системы). Это обстоятельство используется в § 4.3 для построения равномерно пригодного решения с помощью разложения функций u и ω в ряд по степеням параметра ε — в этом состоит так называемая методика Линдштедта—Пуанкаре. В § 4.4 ряды для u и ω подставляются непосредственно в прямое разложение решения, с тем чтобы сделать его равномерно пригодным — это так называемый метод перенормировки. В § 4.5 мы описываем метод многих масштабов, в § 4.6 — метод вариации параметров (метод специальных возмущений) и наконец в § 4.7 — метод усреднения.

4.1. Прямое разложение

В случае $\varepsilon = 0$ уравнение (4.7) сводится к уравнению

$$\ddot{u} + u = 0, \quad (4.9)$$

общее решение которого можно записать в виде

$$u_0 = a_0 \cos(t + \beta_0), \quad (4.10)$$

где α_0, β_0 — произвольные постоянные. При малом, но отличном от нуля значении параметра ε общее решение (4.7) уже нельзя представить формулой (4.10), и к ней следует добавить некую поправку. Будем искать эту поправку в виде ряда по степеням ε , т. е. положим

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots \quad (4.11)$$

Ограничим наше исследование нахождением лишь первого поправочного члена ряда (4.11), т. е. будем искать приближенное решение задачи в следующем виде:

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + O(\varepsilon^2). \quad (4.12)$$

При этом, поскольку мы сохраняем здесь лишь один поправочный член, будем называть разложение (4.12) разложением первого порядка.

Подставляя (4.12) в (4.7), имеем

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + O(\varepsilon^2) + u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) + \varepsilon [u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)]^3 = 0. \quad (4.13)$$

Используя биномиальную формулу для разложения последнего члена, получаем

$$[u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)]^3 = u_0^3 + 3u_0^2 [\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)] + 3u_0 [\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)]^2 + [\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)]^3 = u_0^3 + 3\varepsilon u_0^2 u_1 + O(\varepsilon^2). \quad (4.14)$$

Далее, подставляя (4.14) в (4.13) и собирая члены с одинаковыми степенями ε , находим

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \varepsilon (\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (4.15)$$

Поскольку нас интересуют лишь члены порядка ε , то в квадратных скобках в (4.13) необходимо учитывать лишь первое слагаемое; это обстоятельство позволит нам существенно упростить дальнейшие выкладки. Полагая в (4.15) $\varepsilon = 0$, получаем

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0. \quad (4.16)$$

При этом (4.15) принимает вид

$$\varepsilon (\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (4.17)$$

Разделив на ε , имеем

$$\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 + O(\varepsilon) = 0, \quad (4.18)$$

откуда, полагая в (4.18) $\varepsilon = 0$, находим

$$\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 = 0. \quad (4.19)$$

Сравнивая (4.16) и (4.19) с (4.15), можно заметить, что оба этих соотношения легко получить, если просто приравнять нулю коэффициенты при последовательных степенях ε в выражении (4.15) —

именно таким способом и находят уравнения для u_0 и u_1 . Заметим, что уравнения (4.16) и (4.19) легко решаются последовательно. Действительно, найдя из (4.16) функцию u_0 , можно подставить результат в уравнение (4.19) и затем найти функцию u_1 .

Общее решение уравнения (4.16) можно представить в виде

$$u_0 = a_0 \cos(t + \beta_0), \quad (4.20)$$

где a_0 и β_0 — произвольные постоянные. Подставляя выражение для u_0 в (4.19), получаем

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a_0^3 \cos^3(t + \beta_0). \quad (4.21)$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения (4.21) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения (см. приложение Б). Для того чтобы найти это частное решение, разложим неоднородность в правой части (4.21) в ряд Фурье, используя тригонометрическое тождество (формула (A.18))

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta,$$

и перепишем (4.21) в виде

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3}{4} a_0^3 \cos(t + \beta_0) - \frac{1}{4} a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (4.22)$$

Решение же соответствующего однородного уравнения можно представить как

$$u_{1\text{одн}} = a_1 \cos(t + \beta_1), \quad (4.23)$$

где a_1 и β_1 — также произвольные постоянные. В силу линейности (4.22) частное решение этого неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы двух частных решений, соответствующих каждому из слагаемых неоднородности в правой части (4.22). Таким образом, нам остается найти частные решения следующих двух уравнений:

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3}{4} a_0^3 \cos(t + \beta_0), \quad (4.24)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{1}{4} a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (4.25)$$

Частным решением уравнения (4.24) является функция вида (формулы (Б. 75) и (Б. 76))

$$u_{1\text{частн}}^{(1)} = -\frac{3}{8} a_0^3 t \sin(t + \beta_0), \quad (4.26)$$

а частным решением уравнения (4.25) — функция вида (формулы (Б. 68) и (Б. 69))

$$u_{1\text{частн}}^{(2)} = \frac{1}{32} a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (4.27)$$

Тогда, в силу принципа суперпозиции, для частного решения (4.22) имеем

$$u_{1\text{частн}} = -\frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \quad (4.28)$$

и, следовательно, его общее решение запишется как

$$u_1 = a_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (4.29)$$

Подставляя теперь выражения для u_0 и u_1 из (4.20) и (4.29) соответственно в разложение (4.12), для общего решения уравнения (4.7) получаем следующее разложение первого порядка:

$$u = a_0 \cos(t + \beta_0) + \varepsilon \left[a_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \right] + \dots, \quad (4.30)$$

где a_0 , a_1 , β_0 и β_1 — некоторые произвольные постоянные. Таким образом, начав с уравнения второго порядка, для которого ставятся два начальных условия, мы в конце концов получили четыре произвольные постоянные. Однако при этом оказывается, что постоянные a_0 , a_1 , β_0 и β_1 связаны между собой и для их нахождения будет вполне достаточно двух начальных условий (4.8). Действительно, подставляя разложение (4.30) в условия (4.8), получаем

$$x_0 = a_0 \cos \beta_0 + \varepsilon \left(a_1 \cos \beta_1 + \frac{1}{32}a_0^3 \cos 3\beta_0 \right) + \dots, \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_0 = -a_0 \sin \beta_0 - \varepsilon \left(a_1 \sin \beta_1 + \frac{3}{8}a_0^3 \sin \beta_0 + \frac{3}{32}a_0^3 \sin 3\beta_0 \right) + \dots \quad (4.32)$$

Переносим теперь в соотношениях (4.31) и (4.32) все члены в одну сторону и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , или, что то же самое, непосредственно приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим при ε^0 :

$$x_0 = a_0 \cos \beta_0, \quad (4.33)$$

$$\dot{x}_0 = -a_0 \sin \beta_0; \quad (4.34)$$

при ε^1 :

$$a_1 \cos \beta_1 = -\frac{1}{32}a_0^3 \cos 3\beta_0, \quad (4.35)$$

$$a_1 \sin \beta_1 = -\frac{3}{8}a_0^3 \sin \beta_0 - \frac{3}{32}a_0^3 \sin 3\beta_0. \quad (4.36)$$

Возводя (4.33) и (4.34) в квадрат и складывая, имеем

$$x_0^2 + \dot{x}_0^2 = a_0^2 \cos^2 \beta_0 + a_0^2 \sin^2 \beta_0 = a_0^2,$$

или

$$a_0 = (x_0^2 + \dot{x}_0^2)^{1/2}. \quad (4.37)$$

Аналогичным образом из (4.33) и (4.34) можно найти и величину β_0

$$\beta_0 = -\arcsin \frac{\dot{x}_0}{(x_0^2 + \dot{x}_0^2)^{1/2}} = \arccos \frac{x_0}{(x_0^2 + \dot{x}_0^2)^{1/2}}. \quad (4.38)$$

Далее, из (4.35)–(4.36) получаем

$$a_1 = \frac{1}{32} a_0^3 [\cos^2 3\beta_0 + 9(\sin 3\beta_0 + 4 \sin \beta_0)^2]^{1/2}, \quad (4.39)$$

$$\beta_1 = -\arcsin \frac{3a_0^3(4 \sin \beta_0 + \sin 3\beta_0)}{32a_1} = \arccos \left(-\frac{a_0^3 \cos 3\beta_0}{32a_1} \right). \quad (4.40)$$

Таким образом, вычислив постоянные a_0 и β_0 по формулам (4.37)–(4.38), постоянные a_1 и β_1 можно найти по формулам (4.39)–(4.40). Возвращаясь вновь к разложению (4.30), заметим, что

$$\begin{aligned} a_0 \cos(t + \beta_0) + \varepsilon a_1 \cos(t + \beta_1) &= \\ &= a_0 \cos t \cos \beta_0 - a_0 \sin t \sin \beta_0 + \varepsilon a_1 \cos t \cos \beta_1 - \\ &- \varepsilon a_1 \sin t \sin \beta_1 = (a_0 \cos \beta_0 + \varepsilon a_1 \cos \beta_1) \cos t - \\ &- (a_0 \sin \beta_0 + \varepsilon a_1 \sin \beta_1) \sin t = a \cos t \cos \beta - \\ &- a \sin t \sin \beta = a \cos(t + \beta), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$a \cos \beta = a_0 \cos \beta_0 + \varepsilon a_1 \cos \beta_1, \quad (4.42)$$

где

$$a \sin \beta = a_0 \sin \beta_0 + \varepsilon a_1 \sin \beta_1. \quad (4.43)$$

При этом из (4.42), (4.43) следует, что

$$a_0 = a + O(\varepsilon), \quad \beta_0 = \beta + O(\varepsilon). \quad (4.44)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.41) и (4.44), перепишем (4.30) в виде

$$\begin{aligned} u &= a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left\{ -\frac{3}{8} [a + O(\varepsilon)]^3 t \sin[t + \beta + O(\varepsilon)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{32} [a + O(\varepsilon)]^3 \cos[3t + 3\beta + O(\varepsilon)] \right\} + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} \cos(3t + 3\beta) \right] + \dots \quad (4.45)$$

Отметим, что это решение может быть получено непосредственно из уравнений (4.16) и (4.19) следующим образом. Выбирая решение (4.16) в виде

$$u_0 = a \cos(t + \beta), \quad (4.46)$$

перепишем уравнение (4.19) как

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \cos^3(t + \beta) = -\frac{3}{4}a^3 \cos(t + \beta) - \frac{1}{4}a^3 \cos(3t + 3\beta). \quad (4.47)$$

Далее, при исследовании уравнения (4.47) ограничимся лишь нахождением его частного решения, т. е. представим решение этого уравнения в виде

$$u_1 = -\frac{3}{8}a^3 t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32}a^3 \cos(3t + 3\beta). \quad (4.48)$$

Подставив теперь выражения для u_0 и u_1 из (4.46) и (4.48) в (4.12), сразу получим разложение (4.45). Итак, при решении задач подобного типа существуют две возможности. В одном случае при нахождении членов заданного порядка в них можно включать соответствующее однородное решение, считая появляющиеся при этом произвольные постоянные не зависящими от ε . При другом подходе решения соответствующих однородных уравнений не учитываются в членах всех порядков, за исключением первого, но при этом произвольные постоянные считаются функциями от ε . В этой книге мы будем пользоваться в основном вторым из описанных здесь способов.

Возвращаясь вновь к разложению (4.45), находим, что в первом приближении искомое решение записывается как

$$u = a \cos(t + \beta),$$

а первая поправка к этому решению есть

$$-\frac{3}{8}a^3 \varepsilon t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos(3t + 3\beta).$$

Отметим, что поправочный член будет мал, как это и предполагается заранее, только тогда, когда произведение εt мало по сравнению с единицей. В случае если величина εt имеет порядок $O(1)$, то член, относительно которого предполагается, что он должен быть малой поправкой, оказывается того же порядка, что и главный член разложения. Если же $\varepsilon t > O(1)$, то наша «малая поправка» может оказаться даже больше главного члена разложения. Поэтому прямое разложение (4.45) будет применимо только для таких времен t , при которых $\varepsilon t < O(1)$, т. е. для $t < O(\varepsilon^{-1})$. Таким образом, можно утверждать, что подобные разложения являются *неравномерными по t* , поскольку при больших временах t их справедливость явно нарушается, и они оказываются непригодными для использования — именно поэтому мы будем называть такие разложения «медленными разложениями». Причина непригодности прямого разложения (4.45) заключается в наличии члена $t \sin(t + \beta)$, т. е. произведения алгебраической

(линейной) и тригонометрической функций. В астрономической литературе такие члены принято называть *вековыми*, или *секулярными*¹⁾, членами. Этим названием мы обязаны тому обстоятельству, что в астрономических приложениях величина ε оказывается обычно крайне малой, так что произведение εt начинает играть заметную роль в расчетах лишь по истечении очень большого промежутка времени, например порядка столетия. Итак, для того, чтобы данное разложение было равномерно пригодным по t , в нем должны отсутствовать секулярные слагаемые. С тем чтобы выяснить, откуда же берутся такого рода члены, в следующем параграфе мы построим и исследуем точное решение нашей задачи, а в дальнейших параграфах опишем методы, позволяющие избежать появления секулярных членов и, следовательно, дающие возможность получать равномерно пригодные разложения.

4.2. Точное решение

Уравнение (4.7) относится к классу дифференциальных уравнений второго порядка, у которых отсутствует первая производная. Такие уравнения легко могут быть проинтегрированы подстановкой²⁾ $\dot{u} = v$, причем v рассматривается как новая неизвестная функция аргумента u . При этом имеем

$$\ddot{u} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} = v \frac{dv}{du}, \quad (4.49)$$

так что уравнение (4.7) приобретает вид

$$v \frac{dv}{du} + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (4.50)$$

Разделяя переменные, получаем

$$v dv = -(u + \varepsilon u^3) du, \quad (4.51)$$

что после интегрирования дает

$$\frac{1}{2} v^2 = h - \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} \varepsilon u^4 \right) = h - F(u), \quad (4.52)$$

где h — постоянная интегрирования. Так как $v = \dot{u}$, то величина $\frac{1}{2} v^2$ оказывается пропорциональной кинетической энергии системы, а поскольку сумма $u + \varepsilon u^3$ определяет собой восстанавливающую силу, то выражение

$$F(u) = \int (u + \varepsilon u^3) du = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} \varepsilon u^4$$

¹⁾ От французского слова *siècle* — век, столетие.

²⁾ Здесь более существенно то, что t входит в (4.7) только через u . — *Прим. ред.*

оказывается пропорциональным потенциальной энергии, и, следовательно, величина h будет определять собой полную энергию нашей системы. При данном h соотношение (4.52) представляет собой некоторый интеграл исходного уравнения в плоскости uv , называемой *фазовой плоскостью*. Этот интеграл можно использовать для описания качественных характеристик движения системы.

Прежде чем приступить к построению на фазовой плоскости отдельных интегральных кривых, проанализируем характер кривой $F(u)$, представленной на рис. 4.1. При $\varepsilon > 0$ функция $F(u)$ имеет одну стационарную точку, а именно $u = 0$, которая соответствует минимуму функции $F(u)$. С другой стороны, при $\varepsilon < 0$ у функции $F(u)$ кроме $u = 0$ появляются стационарные точки вида $u = \pm|\varepsilon|^{1/2}$: первая из них соответствует минимуму $F(u)$, в то время как две другие — максимуму $F(u)$. Три горизонтальные линии, показанные на рис. 4.1, отвечают различным значениям h . Из соотношения (4.52) также следует, что

$$v = \pm \sqrt{2} [h - F(u)]^{1/2}. \quad (4.53)$$

Таким образом, действительные значения v , а следовательно, и реальные движения системы будут иметь место тогда и только тогда, когда $h \geq F(u)$. Кроме того, эти движения будут симметричными относительно оси u . Наконец, поскольку $\dot{u} = v$, то при возрастании t мы будем двигаться вдоль интегральной кривой в отрицательном направлении, т. е. обходя ее по часовой стрелке.

В случае $\varepsilon > 0$ реальные движения имеют место только при $h \geq h_0 = 0$. Если $h = h_0$, то интегральная кривая вырождается в точку, которая в этом случае называется *центром*. Если же $h > h_0$, то данная интегральная кривая будет представлять собой замкнутую траекторию, соответствующую *периодическому движению* системы. Таким образом, в указанной ситуации все возможные движения системы являются периодическими.

В случае $\varepsilon < 0$ реальные движения существуют при всех значениях h . Из рис. 4.1, б видно, что при $h = h_0$ интегральная кривая состоит из начала координат, т. е. центра, и двух траекторий с ветвями, обращенными вправо и влево. При $h = h_2$ интегральная кривая состоит из двух траекторий, проходящих через точки $u = |\varepsilon|^{1/2}$, $v = 0$ и $u = -|\varepsilon|^{1/2}$, $v = 0$, которые в этом случае называются *седловыми точками* (на рис. они обозначены буквой S) и соответствуют максимумам функции $F(u)$. При этом сами траектории, проходящие через седловые точки, обычно называют *сепаратрисами*. При $h < h_0$ соответствующая интегральная кривая состоит из двух отдельных траекторий, обращенных ветвями влево и вправо. Наконец, при $h_0 < h < h_2$ интегральная кривая состоит из трех отдельных траекторий — замкнутой кривой, охватывающей начало координат, и двух

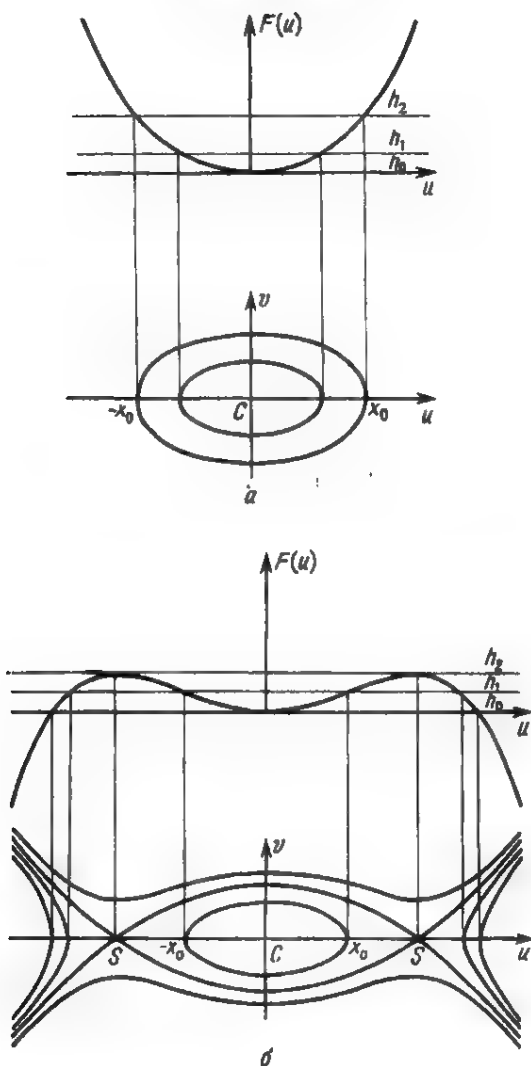


Рис. 4.1. Фазовая плоскость для уравнения Дюффинга: а) $\varepsilon > 0$; б) $\varepsilon < 0$.

ветвей, открытых влево и вправо, т. е. обращенных вершинами к началу координат. Таким образом, периодические движения существуют только при $h_0 < h < h_2$, а также при условии, что начальные данные ограничивают движение системы замкнутой ветвью соответствующей интегральной кривой.

Обратимся теперь к интегрированию соотношения (4.52). Используя начальные условия (4.8) и вспоминая, что $v = \dot{u}$,

из (4.52) получаем

$$\frac{1}{2} \dot{x}_0^2 = h - \left(\frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} \varepsilon x_0^4 \right),$$

откуда

$$h = \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} \varepsilon x_0^4. \quad (4.54)$$

Поскольку $v = \dot{u}$, то из (4.52) также следует, что

$$\dot{u} = \pm \left(2h - u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4 \right)^{1/2}, \quad (4.55)$$

где знаки плюс и минус соответствуют движениям выше и ниже оси u . После разделения переменных в (4.55) находим

$$dt = \pm \frac{du}{\left(2h - u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4 \right)^{1/2}}, \quad (4.56)$$

причем интегрирование (4.56) дает

$$t = \pm \int_{x_0}^u \frac{du}{\left(2h - u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4 \right)^{1/2}}. \quad (4.57)$$

Используем теперь полученное решение для исследования периодических движений нашей системы. Из рис. 4.1 ясно, что любая замкнутая траектория (соответствующая периодическому движению системы) пересекает ось u в двух точках, координаты которых обозначим через $u = -x_0$ и $u = x_0$ соответственно. Подставляя значения $u = \pm x_0$ и $v = \dot{u} = 0$ в (4.54), получаем

$$h = \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{4} \varepsilon x_0^4,$$

откуда

$$\begin{aligned} 2h - u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4 &= x_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^4 - u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4 = \\ &= (x_0^2 - u^2) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon u^2 \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

При этом (4.57) переписывается в виде

$$t = \pm \int_{x_0}^u \frac{du}{(x_0^2 - u^2)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon u^2 \right)^{1/2}}. \quad (4.59)$$

Этот интеграл может быть приведен к стандартной эллиптической форме с помощью подстановки

$$u = -x_0 \cos \theta. \quad (4.60)$$

Из (4.60) имеем $du = x_0 \sin \theta d\theta$; кроме того, точки $u = \pm x_0$ соответствуют значениям $\theta_0 = 0, \pi$. Таким образом, (4.59) можно представить как

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 \cos^2 \theta\right)^{1/2}},$$

или

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad (4.61)$$

где

$$m = \frac{\varepsilon x_0^2}{2(1 + \varepsilon x_0^2)}. \quad (4.62)$$

Так как все замкнутые траектории симметричны относительно оси u , то время, необходимое системе для ее перемещения из точки $u = -x_0$ в точку $u = +x_0$, составляет половину периода T . Тогда из (4.61) следует, что

$$T = \frac{2}{\sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (4.63)$$

Поскольку величина интеграла в (4.63) одинакова как для промежутка $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, так и для промежутка $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, формулу (4.63) можно представить в виде

$$T = \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}. \quad (4.64)$$

Интеграл в (4.64) называется полным эллиптическим интегралом первого рода — значения его (как функции параметра m) подробно протабулированы. Зависимость величины T от εx_0^2 представлена в табл. 4.1. Из этой таблицы, так же как из формулы (4.64), видно, что период T зависит от εx_0^2 и, следовательно, является функцией нелинейности системы. Поскольку угловая частота ω равна $2\pi/T$, то ясно, что она также будет зависеть от степени нелинейности системы. Именно в этом кроется объяснение того факта, почему построенное нами прямое разложение оказывается несостоятельным — ведь в соответствии с видом разложения (4.45) угловая частота системы должна равняться единице независимо от характера ее нелинейности. Это дает возможность предположить, что всякое равномерно пригодное разложение должно учитывать зависимость угловой частоты от

Таблица 4.1

Точные значения периода T для периодических движений,
описываемых уравнением Дюффинга

	m					
	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
ϵx_0^2	0	0.042	0.087	0.136	0.190	0.25
T	6.283	6.187	6.088	5.986	5.879	5.767

Таблица 4.2

Зависимость отношения T_d/T от величины параметра ϵx_0^2

ϵx_0^2	0	0.042	0.087	0.136	0.190	0.25
T	1.000	1.0004	1.002	1.004	1.007	1.013

степени нелинейности системы. Самым ранним по времени подходом, учитывающим это обстоятельство, явилась так называемая методика Линдштедта—Пуанкаре, которая будет рассмотрена нами в следующем параграфе. Отметим также, что из формулы (4.62) при малом ϵ следует малость величины m . Тогда, разлагая в ряд подынтегральное выражение в (4.64) и интегрируя почленно, имеем

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{4}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{1}{2} m \sin^2 \theta + \dots \right) d\theta = \\
 &= \frac{4}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{8} m \pi + \dots \right) = \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \epsilon x_0^2}} \left[1 + \frac{\epsilon x_0^2}{8(1 + \epsilon x_0^2)} + \dots \right] = \\
 &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon x_0^2 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{8} \epsilon x_0^2 + \dots \right),
 \end{aligned}$$

откуда для двучленного приближения T_a получаем

$$T_a = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \epsilon x_0^2 \right). \quad (4.65)$$

Таблица 4.2 показывает, что приближение T_a оказывается весьма близким к точному значению T : так, например, при $\varepsilon x_0^2 = 0,25$ ошибка составляет всего 1,3 %.

4.3. Методика Линдштедта—Пуанкаре

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, нарушение пригодности прямого разложения связано с тем, что с его помощью невозможно описать зависимость частоты системы от степени ее нелинейности. Таким образом, можно заранее утверждать, что любое разложение, не учитывающее эту зависимость, окажется несостоятельным. В настоящее время, однако, разработан целый ряд методов, позволяющих получать для подобного рода задач равномерно пригодные разложения. Некоторые из этих методов мы обсудим в данной главе, начав прежде всего с рассмотрения методики Линдштедта—Пуанкаре.

Для того чтобы выявить зависимость частоты от степени нелинейности системы, введем частоту ω непосредственно в дифференциальное уравнение (4.7). С этой целью воспользуемся преобразованием

$$\tau = \omega t, \quad (4.66)$$

где ω есть некоторая постоянная величина, определяемая только значениями параметра ε . Тогда, переходя от аргумента t к новой независимой переменной τ и используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2},$$

в результате чего уравнение (4.7) перепишется в виде

$$\omega^2 u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad (4.67)$$

где штрихи означают дифференцирование по переменной τ . Отметим, что фактическая частота системы ω теперь явно входит в исходное уравнение; правда, величины u и ω остаются пока не определенными. Будем искать их в виде разложений по степеням ε , т. е. положим

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots, \quad (4.68)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (4.69)$$

При этом первый член разложения для ω представляет собой частоту линейной системы, которая в нашем случае равна единице. Далее, исходя из требования, что разложение для функции u должно быть равномерным при всех τ , в процессе вычислений можно определить все последующие поправки к частоте линейной системы.

Так, подстановка (4.68) и (4.69) в (4.67) дает

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^2 (\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots) + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 = 0,$$

откуда после выполнения всех необходимых действий имеем

$$\ddot{u}_0 + 2\varepsilon\omega_1\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon u_0^3 + \dots = 0,$$

или

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \varepsilon (\ddot{u}_1 + u_1 + u_0^3 + 2\omega_1\ddot{u}_0) + \dots = 0. \quad (4.70)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 и ε^1 , получаем

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (4.71)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1\ddot{u}_0. \quad (4.72)$$

Общее решение уравнения (4.71) дается формулой

$$u_0 = a \cos(\tau + \beta), \quad (4.73)$$

где a и β — некоторые произвольные постоянные. При этом уравнение (4.72) переписывается как

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \cos^3(\tau + \beta) + 2\omega_1 a \cos(\tau + \beta),$$

или

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \left(2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3\right) \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4}a^3 \cos(3\tau + 3\beta). \quad (4.74)$$

Частное решение уравнения (4.74) (см. формулы (Б. 69) и (Б. 76)) можно представить в виде

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3\right) \tau \sin(\tau + \beta) + \frac{1}{32}a^3 \cos(3\tau + 3\beta). \quad (4.75)$$

Отметим, что данное частное решение для u_1 содержит секулярный член, который делает разложение неравномерным. В то же время, если исходить из требования равномерности искомого разложения для u , мы не должны допустить появления членов подобного рода в соответствующих выражениях для u_1 , u_2 , u_3 и т. д. В противоположность методике построения прямого разложения (4.45), при которой эти члены не могли быть уничтожены (исключая случай $a = 0$, который приводил к тривиальному решению $u = 0$), в данном случае мы можем подобрать параметр ω_1 таким образом, чтобы исключить соответствующий секулярный член. С этой целью положим коэффициент при нем равным нулю, т. е. примем

$$2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0; \quad (4.76)$$

при этом частное решение (4.75) приобретает вид

$$u_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta). \quad (4.77)$$

Если исключить тривиальный случай $a = 0$, то условие (4.76) удовлетворяется при

$$\omega_1 = \frac{3}{8} a^2. \quad (4.78)$$

Отметим также, что для получения условия (4.76), позволяющего исключить секулярный член из выражения для u_1 , нам вовсе не обязательно строить в явном виде соответствующее частное решение, как это, например, делалось выше. Вместо этого мы можем, исходя из вида неоднородности в правой части (4.74), которая собственно и определяет характер функции u_1 , просто положить равным нулю коэффициент при $\cos(\tau + \beta)$, поскольку именно это слагаемое ответственно за появление секулярного члена в u_1 .

Подстановка (4.73) и (4.77) в (4.68) дает

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos(3\tau + 3\beta) + \dots \quad (4.79)$$

Подставляя теперь значение ω_1 из (4.78) в разложение (4.69), имеем

$$\omega = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \dots \quad (4.80)$$

Поскольку $\tau = \omega t$, то разложение (4.79) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u = & a \cos \left[\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \right) t + \beta \right] + \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos \left[3 \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 \right) t + 3\beta \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.81)$$

Таким образом, разложение (4.81) будет равномерным разложением первого порядка, поскольку секулярные члены в нем отсутствуют, а поправка (т. е. член, пропорциональный ε) оказывается малой по сравнению с главным членом разложения.

Сравним теперь период колебаний, получаемый с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре, с приближенным выражением (4.65), полученным в предыдущем параграфе путем разложения в ряд подынтегральной функции в точном решении задачи. Поскольку точка $u = -x_0$ представляет собой пересечение замкнутой траектории с осью x , то при $u = -x_0$ имеем $\dot{u} = 0$. Используя эти соотношения в качестве начальных условий для разложения (4.81), получаем

$$-x_0 = a \cos \beta + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos 3\beta + \dots, \quad (4.82)$$

откуда следует, что $a^2 = x_0^2$, поскольку $\beta = 0$ из условия $\dot{y}(0) = 0$. При этом разложение (4.80) приобретает вид

$$\omega = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon x_0^2 + \dots,$$

и поскольку $T_a = 2\pi/\omega$, то, следовательно,

$$T_a = 2\pi \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon x_0^2 + \dots\right)^{-1} = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon x_0^2\right) + \dots, \quad (4.83)$$

что оказывается в полном соответствии с формулой (4.65).

4.4. Метод перенормировки

Вместо того чтобы вводить преобразование (4.66) в исходное дифференциальное уравнение и строить новое разложение, как это делалось в предыдущем параграфе (согласно методике Линдштедта—Пуанкаре), попытаемся теперь ввести это преобразование непосредственно в прямое разложение (4.45). При этом из (4.66) и (4.69) имеем

$$t = \omega^{-1}\tau = (1 + \varepsilon\omega_1 + \dots)^{-1}\tau = \tau(1 - \varepsilon\omega_1 + \dots) = \tau - \varepsilon\omega_1\tau + \dots, \quad (4.84)$$

так что разложение (4.45) переписывается в виде

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\tau + \beta - \varepsilon\omega_1\tau + \dots) + \\ & + \varepsilon a^3 \left[\frac{3}{8}(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \dots) + \sin(\tau + \beta - \varepsilon\omega_1\tau + \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{32} \cos(3\tau + 3\beta - 3\varepsilon\omega_1\tau + \dots) \right] + \dots. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Разлагая косинусы и синусы в ряды Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \cos(\tau + \beta - \varepsilon\omega_1\tau + \dots) = \\ = \cos(\tau + \beta) + \varepsilon\omega_1\tau \sin(\tau + \beta) + \dots, \end{aligned} \quad (4.86a)$$

$$\begin{aligned} \sin(\tau + \beta - \varepsilon\omega_1\tau + \dots) = \\ = \sin(\tau + \beta) - \varepsilon\omega_1\tau \cos(\tau + \beta) + \dots, \end{aligned} \quad (4.86b)$$

$$\begin{aligned} \cos(3\tau + 3\beta - 3\varepsilon\omega_1\tau + \dots) = \\ = \cos(3\tau + 3\beta) + 3\varepsilon\omega_1\tau \sin(3\tau + 3\beta) + \dots. \end{aligned} \quad (4.86в)$$

Используя эти разложения, можно представить (4.45) в виде

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \left[\left(\omega_1 a - \frac{3}{8} a^3 \right) \tau \sin(\tau + \beta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{32} a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \right] + \dots. \end{aligned} \quad (4.87)$$

В противоположность методу построения прямого разложения, при котором не имелось возможности избавиться от секуляр-

ного члена, если только не положить $a = 0$ (что соответствовало бы тривиальному решению), мы ввели в разложение (4.87) новый параметр ω_1 , который можно выбрать таким образом, чтобы не допустить появления секулярных членов. Так, полагая равным нулю коэффициент при секулярном члене в (4.87), имеем

$$\omega_1 a - \frac{3}{8} a^3 = 0, \quad (4.88)$$

в результате чего (4.87) переходит в разложение

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{32} \epsilon a^3 \cos(3\tau + 3\beta) + \dots \quad (4.89)$$

Исключая из рассмотрения тривиальный случай $a = 0$, мы получаем, что условие (4.88) удовлетворяется при $\omega_1 = \frac{3}{8} a^2$, в полном соответствии с значением (4.78), полученным по методу Линдштедта—Пуанкаре. Сравнивая разложения (4.89) и (4.79), легко видеть, что они тождественны, т. е. данный метод позволяет получить то же самое разложение, что и методика Линдштедта—Пуанкаре. Описанный подход, при котором неравномерное прямое разложение (4.45) преобразуется в равномерное в результате непосредственной подстановки в него преобразования (4.66) и (4.69), называют *методом перенормировки*.

4.5. Метод многих масштабов

Обратимся вновь к равномерному разложению (4.81), полученному с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре, и перепишем его в виде

$$u = a \cos\left(t + \beta + \frac{3}{8} \epsilon t a^2\right) + \frac{1}{32} \epsilon a^3 \cos\left(3t + 3\beta + \frac{9}{8} \epsilon t a^2\right) + \dots \quad (4.90)$$

Из разложения (4.90) видно, что мы не можем разделить функциональную зависимость u от t и ϵ , поскольку функция u зависит не только от этих аргументов в отдельности, но и от произведения ϵt . Таким образом, вместо зависимости $u = u(t; \epsilon)$ можно писать $u = \hat{u}(t, \epsilon t; \epsilon)$. Обращаясь теперь в разложении (4.90) к членам более высокого порядка, легко видеть, что функция u помимо прямой зависимости от t и ϵ должна зависеть и от комбинаций вида ϵt , $\epsilon^2 t$, $\epsilon^3 t$, Это означает, что можно записать

$$u(t; \epsilon) = \hat{u}(t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \epsilon^3 t, \dots; \epsilon),$$

или

$$u(t; \epsilon) = \hat{u}(T_0, T_1, T_2, T_3, \dots; \epsilon), \quad (4.91)$$

где аргументы T_n определяются следующим образом:

$$T_0 = t, \quad T_1 = \epsilon t, \quad T_2 = \epsilon^2 t, \quad T_3 = \epsilon^3 t, \dots \quad (4.92)$$

Отметим, что так как ε является малым параметром, то величины T_n представляют собой *разные временные масштабы* исходной задачи. Например, если $\varepsilon = 1/60$, то изменения в масштабе T_0 могут быть охарактеризованы движением секундной стрелки часов, изменения в масштабе T_1 определяются движением их минутной стрелки, а изменения в масштабе T_2 связаны уже с движением часовой стрелки. При этом, поскольку зависимость u от t и ε проявляется в различных масштабах времени, попытаемся проследить за поведением функции u на разных временных шкалах.

Таким образом, вместо того, чтобы рассматривать u как функцию аргумента t , мы будем определять ее как функцию переменных T_0, T_1, T_2, \dots . С этой целью перейдем в исходном уравнении (4.7) от независимой переменной t к переменным T_0, T_1, T_2, \dots . Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots, \quad (4.93)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \quad (4.94)$$

При этом уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2} \right) + u + \varepsilon u^3 + \dots = 0. \quad (4.95)$$

Отметим, что в данном случае обыкновенное дифференциальное уравнение (4.7) мы заменяем уравнением в частных производных и тем самым, казалось бы, еще более усложняем задачу. Однако практика использования данного метода показывает, что преимущества подобного подхода оказываются гораздо более существенными. При этом, как будет видно из последующих глав, данный метод позволяет не только строить искомое равномерное разложение, но и описывать разнообразные явления нелинейного резонанса, возникающие в исследуемой системе.

Будем искать приближенное решение уравнения (4.95) в виде

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (4.96)$$

Подстановка этого разложения в (4.95) дает

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_0^3 + \dots = 0. \quad (4.97)$$

Приравнивая нулю соответствующие коэффициенты при ε^0 и ε^1 , имеем

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - u_0^3. \quad (4.99)$$

Общее решение уравнения (4.98) может быть представлено в виде

$$u_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos [T_0 + \beta(T_1, T_2, \dots)]. \quad (4.100)$$

Отметим, что в данном случае a и β оказываются не постоянными величинами, а функциями медленных масштабов T_1, T_2, \dots , поскольку u_0 представляет собой функцию T_0, T_1, T_2, \dots , а ее производные в (4.98) берутся по переменной T_0 . На данной степени аппроксимации функциональная зависимость a и β от T_1, T_2, \dots нам не известна и определяется на последующих этапах путем исключения секулярных членов.

Подставляя теперь (4.100) в (4.99), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} [a \cos(T_0 + \beta)] - a^3 \cos^3(T_0 + \beta) = \\ &= 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta) + 2a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} \cos(T_0 + \beta) - \\ &- \frac{3}{4} a^3 \cos(T_0 + \beta) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta) + \left(2a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos(T_0 + \beta) - \\ &- \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Неоднородность в правой части уравнения (4.101) служит источником секулярных членов для функции u_1 . В случае же равномерного разложения подобного рода члены должны отсутствовать. Этого можно добиться, приравняв нулю коэффициенты при $\sin(T_0 + \beta)$ и $\cos(T_0 + \beta)$ в правой части (4.101), в результате чего получаем

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad (4.102)$$

$$2a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{4} a^3 = 0. \quad (4.103)$$

При этом частное решение уравнения (4.101) принимает вид

$$u_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta). \quad (4.104)$$

Решение уравнения (4.102) есть функция $a = a(T_2, T_3, \dots)$. Тогда при $a \neq 0$ (4.103) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{\partial \beta}{\partial T_1} = \frac{3}{8} a^2,$$

решением которого будет функция

$$\beta = \frac{3}{8} a^2 T_1 + \beta_0(T_2, T_3, \dots). \quad (4.105)$$

Подставляя выражения для u_0 и u_1 из (4.100) и (4.104) в разложение (4.96), получаем

$$u = a \cos(T_0 + \beta) + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) + \dots \quad (4.106)$$

Подставляя теперь выражение для β из (4.105) в (4.106) и вспоминая, что $a = a(T_2, T_3, \dots)$, находим

$$\begin{aligned} u = & a(T_2, T_3, \dots) \cos \left[T_0 + \frac{3}{8} T_1 a^2(T_2, T_3, \dots) + \beta_0(T_2, T_3, \dots) \right] + \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon a^3(T_2, T_3, \dots) \cos \left[3T_0 + \frac{9}{8} T_1 a^2(T_2, T_3, \dots) + \right. \\ & \left. + 3\beta_0(T_2, T_3, \dots) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.107)$$

Если в разложении (4.107) ограничиться только выписанными членами, то в рамках принятой точности функции a и β_0 можно считать постоянными. Действительно,

$$\begin{aligned} a(T_2, T_3, \dots) &= a(\varepsilon^2 t, \varepsilon^2 t, \dots) = \\ &= a(0, 0, \dots) + \frac{\partial a}{\partial T_2} \varepsilon^2 t + \dots = \hat{a}_0 + O(\varepsilon^2 t), \\ \beta_0(T_2, T_3, \dots) &= \beta_0(\varepsilon^2 t, \varepsilon^2 t, \dots) = \\ &= \beta_0(0, 0, \dots) + \frac{\partial \beta_0}{\partial T_2} \varepsilon^2 t + \dots = \hat{\beta}_0 + O(\varepsilon^2 t); \end{aligned}$$

поэтому, заменяя a и β_0 в (4.107) постоянными величинами \hat{a} и $\hat{\beta}_0$, мы имеем

$$\begin{aligned} u = & \hat{a} \cos \left(T_0 + \frac{3}{8} T_1 \hat{a}^2 + \hat{\beta}_0 \right) + \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon \hat{a}^3 \cos \left(3T_0 + \frac{9}{8} T_1 \hat{a}^2 + 3\hat{\beta}_0 \right) + O(\varepsilon^2 t), \end{aligned} \quad (4.108)$$

или, после возвращения к исходной переменной t ,

$$u = \hat{a} \cos \left(t + \frac{3}{8} \varepsilon t \hat{a}^2 + \hat{\beta}_0 \right) + \\ + \frac{1}{32} \varepsilon \hat{a}^3 \cos \left(3t + \frac{9}{8} \varepsilon t \hat{a}^2 + 3\hat{\beta}_0 \right) + O(\varepsilon^2 t), \quad (4.109)$$

что полностью согласуется с разложением (4.90), полученным с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре или по методу перенормировки.

Анализ формулы (4.109) показывает, что ошибка в ней будет иметь порядок $O(1)$ и, следовательно, окажется порядка первого члена, если $t = O(\varepsilon^{-2})$. Таким образом, для значений $t \geq O(\varepsilon^{-2})$ разложение (4.109) становится непригодным. Если же $t = O(\varepsilon^{-1})$, то ошибка будет иметь порядок ε , т. е. окажется порядка второго члена разложения, и, следовательно, разложение, пригодное при $t = O(\varepsilon^{-1})$, должно включать в себя только первый член. Итак, для всех моментов времени вплоть до времен порядка ε^{-1}

$$u = \hat{a}_1^* \cos \left(t + \frac{3}{8} \varepsilon t \hat{a}_1^{*2} + \hat{\beta}_0 \right) + O(\varepsilon). \quad (4.110)$$

Это означает, что для того, чтобы построить равномерное разложение первого порядка, мы должны, не решая самого уравнения для u_1 , исключить из него члены, служащие источником секулярных слагаемых, найдя тем самым только зависимость u_0 от T_1 . Подобным же образом при построении равномерно пригодного разложения первого порядка по методике Линдштедта—Пуанкаре или же с помощью метода перенормировки мы лишь исключали секулярные члены из уравнения для u_1 и тем самым определяли поправку ω_1 . Точно так же при построении высших приближений мы полагаем

$$u = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n u_n(T_0, T_1, \dots, T_N) + O(\varepsilon^N), \quad (4.111)$$

т. е. если мы ищем разложение N -го порядка, то должны учитывать масштабы T_0, T_1, \dots, T_N , но не включать при этом в рассмотрение член порядка ε^N .

В заключение этого параграфа обратимся к рассмотрению другой формы решений для уравнений соответствующих приближений, представив, в частности, решение уравнения (4.98) в комплексной форме. С этой целью воспользуемся формулой (A.22)

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

и перепишем решение (4.100) в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} a [e^{i(T_0 + \beta)} + e^{-i(T_0 + \beta)}] = \frac{1}{2} a e^{i(T_0 + \beta)} + \frac{1}{2} a e^{-i(T_0 + \beta)} = \\ &= \frac{1}{2} a e^{i\beta} e^{iT_0} + \frac{1}{2} a e^{-i\beta} e^{-iT_0}, \end{aligned}$$

или

$$u_0 = A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0}, \quad (4.112)$$

где A и \bar{A} — комплексно-сопряженные величины и

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}. \quad (4.113)$$

При этом в случае разложения первого порядка мы считаем A функцией только переменной T_1 .

Подставляя (4.112) в уравнение (4.99), имеем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2i \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{iT_0} + 2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} e^{-iT_0} - (A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0})^3. \quad (4.114)$$

Выполнив возведение в куб в последнем слагаемом правой части уравнения (4.114) и собирая коэффициенты при соответствующих экспонентах, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= -\left(2i \frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2 \bar{A}\right) e^{iT_0} + \left(2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} - 3\bar{A}^2 A\right) e^{-iT_0} - \\ &- A^3 e^{3iT_0} - \bar{A}^3 e^{-3iT_0}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Ясно, что источником секулярных членов в частном решении для u_1 служат именно слагаемые, пропорциональные $\exp(iT_0)$ и $\exp(-iT_0)$. Следовательно, для получения равномерно пригодного разложения мы должны приравнять нулю каждый из коэффициентов при этих экспонентах, т. е. положить

$$2i \frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2 \bar{A} = 0, \quad (4.116)$$

$$2i \frac{\partial \bar{A}}{\partial T_1} - 3\bar{A}^2 A = 0. \quad (4.117)$$

Отметим еще раз, что для получения равномерно пригодного разложения первого порядка совершенно не обязательно решать уравнение для u_1 — для этого вполне достаточно исключить из уравнения (4.115) члены, порождающие в решении u_1 секулярные слагаемые.

Сравнение (4.116) и (4.117) показывает, что эти уравнения, поскольку они комплексно сопряжены между собой, не являются независимыми. Следовательно, если удовлетворяется одно из них, то другое будет выполняться автоматически. Для удобства анализа уравнения (4.116) подставим в него величину A из (4.113),

При этом получим

$$2i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial T_1} e^{i\beta} + \frac{1}{2} ai \frac{\partial \beta}{\partial T_1} e^{i\beta} \right) + 3 \cdot \frac{a^2}{4} e^{2i\beta} \cdot \frac{a}{2} e^{-i\beta} = 0,$$

или

$$i \frac{\partial a}{\partial T_1} e^{i\beta} - a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} e^{i\beta} + \frac{3}{8} a^3 e^{i\beta} = 0,$$

или

$$i \frac{\partial a}{\partial T_1} - a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \frac{3}{8} a^3 = 0. \quad (4.118)$$

Напомним теперь, что комплексное выражение равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его вещественная и мнимая части. Поскольку a и β действительны, то, приравнявая нулю вещественную и мнимую части равенства (4.118), имеем

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad (4.119)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{8} a^3 = 0, \quad (4.120)$$

что полностью совпадает с соотношениями (4.102) и (4.103), полученными выше для случая, когда решение представлялось в действительном виде. Сравнение вещественного и комплексного подходов показывает, что комплексное представление решений соответствующих уравнений оказывается более удобным. Именно таким представлением мы будем часто пользоваться при дальнейшем изложении.

4.6. Вариация произвольных постоянных

В случае $\varepsilon = 0$ решение уравнения (4.7) может быть представлено в виде

$$u = a \cos(t + \beta), \quad (4.121)$$

где a и β — некоторые произвольные постоянные. Кроме того, из (4.121) следует, что

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta). \quad (4.122)$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ мы будем предполагать, что решение уравнения (4.7) также описывается формулой (4.121), но при этом величины a и β являются функциями времени t . Иными словами, мы рассматриваем формулу (4.121) как заданное преобразование переменной $u(t)$ к переменным $a(t)$ и $\beta(t)$. Именно поэтому данный подход обычно называют *методом вариации произвольных постоянных*. Развивая эту идею, укажем, что в данном случае мы имеем два уравнения, а именно уравнения (4.7) и (4.121) для трех неизвестных функций $u(t)$, $a(t)$ и $\beta(t)$, и, следовательно, можем наложить на эти функции еще одно дополнительное условие

(т. е. ввести третье уравнение, их связывающее). Это условие может быть в достаточной степени произвольным, но обязательно независимым от (4.7) и (4.121). Подобный произвол можно с успехом использовать для получения простого и удобного преобразования. С этой целью из всех возможных условий выберем условие (4.122), предположив тем самым, что функции u и \dot{u} имеют тот же самый вид, что и для линейного случая. В результате мы приходим к системе уравнений уже не второго, а первого порядка относительно неизвестных функций $a(t)$ и $\beta(t)$.

Действительно, дифференцируя соотношение (4.121) по t и учитывая, что a и β также являются функциями времени t , имеем

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta). \quad (4.123)$$

Сравнивая (4.123) с (4.122), можно заметить, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (4.124)$$

Дальнейшее дифференцирование (4.122) по t дает

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta). \quad (4.125)$$

Подставляя выражения для u и \ddot{u} из (4.121) и (4.125) в уравнение (4.7), находим

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = \varepsilon a^3 \cos^3(t + \beta). \quad (4.126)$$

Соотношения (4.124) и (4.126) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно \dot{a} и $\dot{\beta}$. Эти уравнения можно еще более упростить, если умножить первое из них на $\cos(t + \beta)$, второе — на $\sin(t + \beta)$ и результат сложить; при этом, с учетом формулы (A.1), получаем

$$\dot{a} = \varepsilon a^3 \sin(t + \beta) \cos^3(t + \beta). \quad (4.127)$$

Исключая теперь с помощью (4.127) величину \dot{a} из уравнения (4.124), находим

$$\dot{\beta} = \varepsilon a^2 \cos^4(t + \beta), \quad (4.128)$$

если, конечно, $a \neq 0$. Таким образом, исходное дифференциальное уравнение второго порядка (4.7) относительно функции $u(t)$ мы заменили двумя уравнениями первого порядка (4.127) и (4.128) относительно функций $a(t)$ и $\beta(t)$. Подчеркнем также, что при выводе этих уравнений мы не пользовались никакими дополнительными предположениями.

Из сравнения преобразованных уравнений (4.127) и (4.128) с исходным уравнением (4.7) видно, что нелинейность преобразованных уравнений оказывается более резко выраженной. При этом, естественно, возникает вопрос, какова же ценность подобного преобразования. Ответ на этот вопрос зависит от величины параметра ε . Так, если ε мало, то, как показано на рис. 4.2, главные части a и β меняются в зависимости от t медленнее, чем исходная функция u . Этот факт может быть с успехом использо-

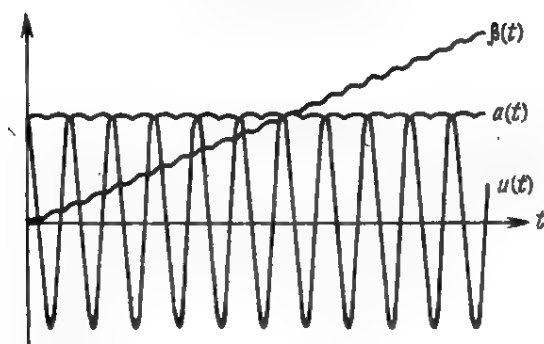


Рис. 4.2. Зависимость величин a , β и u от времени t при $a(0) = 1.5$, $\beta(0) = 0$ и $\varepsilon = 0.05$.

ван как при аналитическом решении, так и при численных расчетах. Аналитически он приводит к так называемому методу усреднения, подробно описываемому в следующем параграфе; при численном же анализе задачи исследование преобразованных уравнений также оказывается более удобным, поскольку для их решения можно выбрать существенно больший шаг интегрирования. По этой причине астрономы используют метод вариации произвольных постоянных для вывода уравнений, описывающих параметры орбит небесных тел, после чего приступают к численному решению именно проварьированных, а не исходных уравнений. При этом специалисты по небесной механике называют обычно подобный подход собственно «методом возмущений».

4.7. Метод усреднения

Воспользовавшись тригонометрическими тождествами

$$\sin \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi,$$

$$\cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi,$$

перепишем уравнения (4.127) и (4.128) в виде

$$\dot{a} = \frac{1}{8} \varepsilon a^3 (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi), \quad (4.129)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{8} \varepsilon a^2 (3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi), \quad (4.130)$$

где положено $\varphi = t + \beta$. Так как $-1 \leq \sin n\varphi \leq 1$ и $-1 \leq \cos n\varphi \leq 1$, то для любого ограниченного a получаем $\dot{a} = O(\varepsilon)$ и $\dot{\beta} = O(\varepsilon)$. Таким образом, при достаточно малом ε главные части a и β оказываются медленно меняющимися функ-

циями времени (рис. 4.2). Это означает, что на интервале времени длиной π они изменяются весьма незначительно и, следовательно, в первом приближении на этом интервале их можно считать постоянными.

Усредняя по интервалу $[0, \pi]$ левые и правые части уравнений (4.129) и (4.130), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{a} dt = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \int_0^{\pi} a^3 (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) dt, \quad (4.131)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{\beta} dt = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \int_0^{\pi} a^2 (3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) dt. \quad (4.132)$$

Поскольку a и β на интервале интегрирования $[0, \pi]$ считаются постоянными, то величины a , \dot{a} и $\dot{\beta}$ в формулах (4.131) и (4.132) можно вынести за знак интеграла, в результате чего получаем

$$\dot{a} = \frac{1}{8\pi} \varepsilon a^3 \int_0^{\pi} (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) dt, \quad (4.133)$$

$$\dot{\beta} = \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon a^2 \int_0^{\pi} (4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) dt. \quad (4.134)$$

Заменим теперь переменную интегрирования t на $\varphi = t + \beta$; тогда при условии постоянства β на $[0, \pi]$, $d\varphi = dt$ и соотношения (4.133) и (4.134) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{8\pi} \varepsilon a^3 \int_{\beta}^{\pi+\beta} (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \varepsilon a^3 \left(\cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos 4\varphi \right) \Big|_{\beta}^{\pi+\beta} = 0, \end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon a^2 \int_{\beta}^{\pi+\beta} (4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon a^2 \left(2 \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{\beta}^{\pi+\beta} = \frac{3}{8} \varepsilon a^2. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Описанная выше техника усреднения называется обычно *методом Ван-дер-Поля* или *методом Крылова—Боголюбова*.

Из соотношения (4.135) следует, что

$$a = a_0 = \text{const}; \quad (4.137)$$

далее, из (4.136) имеем

$$\beta = \frac{3}{8} \varepsilon a_0^2 t + \beta_0, \quad (4.138)$$

где β_0 — некоторая постоянная. Подставляя найденные значения α и β в (4.121), в первом приближении получаем

$$u = a_0 \cos \left[\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon a_0^2 \right) t + \beta_0 \right], \quad (4.139)$$

что полностью соответствует решениям, полученным по методике Линдштедта—Пуанкаре, методу перенормировки и методу многих масштабов.

В заключение этого параграфа отметим, что соотношения (4.135) и (4.136) можно получить и без выполнения процедуры усреднения. В самом деле, правые части уравнений (4.129) и (4.130) представляют собой линейные комбинации быстро и медленно меняющихся членов. При этом в первом приближении величина $\dot{\alpha}$ в (4.129) определяется (равными нулю) медленно меняющимися членами в правой части этого равенства. Точно так же величина $\dot{\beta}$ в (4.130) в первом приближении определяется медленно меняющимися членами правой части, которые в свою очередь оказываются равными $\frac{3}{8} \varepsilon a^3$.

Упражнения

4.1. Используя метод перенормировки, преобразовать следующие разложения в равномерно пригодные:

а) $u(t; \varepsilon) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + \varepsilon a^2 t \sin(\omega_0 t + \theta) + O(\varepsilon^2);$

б) $u(t; \varepsilon) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + \varepsilon [a^2 t \sin(\omega_0 t + \theta) + (1 - a^2) a t \cos(\omega_0 t + \theta)] + O(\varepsilon^2).$

4.2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \dot{u}^2 u \quad (\varepsilon \ll 1).$$

а) Построить двучленное прямое разложение решения и исследовать его равномерность.

б) С помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным.

в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре.

г) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

д) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

4.3. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + 4u + \varepsilon u^2 \dot{u} = 0.$$

а) Построить двучленное прямое разложение решения и исследовать его равномерность.

б) С помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным.

в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре.

г) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

д) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

4.4. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\omega^2 u}{1 + u^2} = 0.$$

а) Построить двучленное прямое разложение решения и исследовать его равномерность.

б) С помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным.

в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре.

г) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

д) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

4.5. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^5 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

а) Построить двучленное прямое разложение и обсудить вопрос о его равномерности.

б) С помощью метода перенормировки сделать это разложение равномерно пригодным.

в) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре.

г) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

д) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка, используя метод усреднения.

4.6. Движение математического маятника описывается уравнением

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

а) Разложить решение при малых θ , сохранив кубические члены.

б) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных θ .

4.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta.$$

а) Разложить решение при малых θ , сохранив в разложении квадратичные члены.

б) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных θ .

4.8. Движение точечной массы, перемещающейся по вращающейся параболе, описывается уравнением

$$(1 + 4p^2 x^2) \ddot{x} + \Lambda x + 4p^2 x^2 \dot{x} = 0,$$

где p и Λ — некоторые константы. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных x .

4.9. Рассмотреть уравнение

$$\left(1 + \frac{u^2}{1-u^2}\right) \ddot{u} + \frac{u \dot{u}^2}{(1-u^2)^2} + \omega_0^2 u + \frac{g}{\gamma} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = 0.$$

а) Разложить решение при малых u , сохранив кубические члены.

б) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных u .

4.10. Рассмотреть уравнение

$$(l^2 + r^2 - 2rl \cos \theta) \ddot{\theta} + rl \sin \theta \dot{\theta}^2 + gl \sin \theta = 0,$$

где g , l и r — постоянные величины. Разложить при малых θ , сохранив кубические члены. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных θ .

4.11. Рассмотреть уравнение

$$\left(\frac{1}{12} l^2 + r^2 \theta^2\right) \ddot{\theta} + r^2 \theta \dot{\theta}^2 + gr \theta \cos \theta = 0,$$

где r , l и g — постоянные величины. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных θ .

4.12. Рассмотреть уравнение

$$m \ddot{x} + kx(x^2 + l^2)^{-1/2} \left[(x^2 + l^2)^{1/2} - \frac{1}{2} l \right] = 0.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных x .

4.13. Разложить в ряд подынтегральное выражение в (4.64), сохраняя члены порядка $O(m^2)$, и получить при этом разложение

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + ex_0^2}} \left(1 + \frac{1}{4} m + \frac{9}{64} m^2 + \dots \right).$$

Представить T_a как функцию m в виде

$$T_a^{(1)} = 2\pi \sqrt{1 - 2m} \left(1 + \frac{1}{4} m + \frac{9}{64} m^2 + \dots \right)$$

и как функцию x_0 в виде

$$T_a^{(2)} = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} ex_0^2 + \frac{57}{256} e^2 x_0^4 + \dots \right).$$

Показать, что $T_a^{(1)}$ представляет собой более точное разложение, чем $T_a^{(2)}$, сравнив их с протабулированным точным решением (4.64). Обратит внимание, что $T_a^{(1)}$ можно получить из $T_a^{(2)}$ с помощью преобразования Эйлера $m = \frac{ex_0^2}{2(1 + ex_0^2)}$, которое часто расширяет область пригодности асимптотического ряда.

ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ЗАТУХАНИЕМ

В отличие от предыдущей главы, в которой рассматривались консервативные системы, в этой главе мы рассмотрим системы с затуханием. Для того чтобы свести к минимуму математические выкладки, займемся исследованием простейшего уравнения для системы с затуханием, а именно уравнения, описывающего свободные колебания частицы с массой m , связанной с жесткой опорой посредством пружины с коэффициентом упругости k и успокоителя колебаний с коэффициентом затухания μ (рис. 5.1). Уравнение, описывающее поведение такой системы, может быть записано следующим образом:

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + \mu \frac{du^*}{dt^*} + ku^* = 0. \quad (5.1)$$

При этом в случае отсутствия затухания угловая частота колебаний нашей системы будет равна $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Как и ранее, введем безразмерные переменные

$$t = \omega_0 t^* \quad \text{и} \quad u = u^* / u_0,$$

где u_0 — некоторый характеристический масштаб длины, в качестве которого можно выбрать, например, начальное смещение частицы. Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\ddot{u} + 2\varepsilon \dot{u} + u = 0, \quad (5.2)$$

где параметр $\varepsilon = \frac{1}{2} \mu / \sqrt{km}$ представляет собой меру отношения демпфирующего усилия к упругой возвращающей силе пружины,

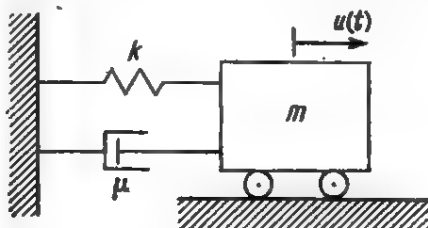


Рис. 5.1. Масса, связанная с пружиной и демпфером.

а точки означают дифференцирование по времени. В данной главе мы будем строить общее решение уравнения (5.2) при малых ε .

Начнем, как и раньше, с построения прямого разложения, после чего обсудим вопрос о его неравномерности. В § 5.2 для выявления источника этой неравномерности мы исследуем точное решение нашей задачи. Далее, в § 5.3 мы продемонстрируем, что использование обычной методики Линдштедта—Пуанкаре для описываемой системы приводит к тривиальному решению. В § 5.4 покажем, как с помощью метода многих масштабов можно получить равномерно пригодное разложение решения. Наконец, в § 5.5 для построения равномерно пригодного первого приближения используем метод усреднения.

5.1. Прямое разложение

Будем искать разложение второго порядка в виде следующего ряда по степеням ε :

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (5.3)$$

Подстановка (5.3) в уравнение (5.2) дает

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \dots + 2\varepsilon(\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \varepsilon^2 \dot{u}_2 + \dots) + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = 0.$$

Группируя члены с одинаковыми степенями ε , имеем

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \varepsilon(\ddot{u}_1 + u_1 + 2\dot{u}_0) + \varepsilon^2(\ddot{u}_2 + u_2 + 2\dot{u}_1) + \dots = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих степенях ε , получаем уравнения

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (5.4)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\dot{u}_0, \quad (5.5)$$

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -2\dot{u}_1, \quad (5.6)$$

из которых последовательно могут быть найдены функции u_0 , u_1 и u_2 .

Общее решение уравнения (5.4) может быть записано как

$$u_0 = a \cos(t + \beta), \quad (5.7)$$

где a и β — некоторые постоянные. Тогда уравнение (5.5) переписывается в виде

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2a \sin(t + \beta). \quad (5.8)$$

При этом, как отмечалось в § 4.1, если для выполнения соответствующих начальных условий предположить, что a и β являются функциями от ε , то нет необходимости искать решение соответствующего (5.8) однородного уравнения. В связи с этим функцию u_1 мы представим в виде только одного частного решения. Из фор-

мул (Б.81) и (Б.82) приложения Б следует, что решение (5.8) можно записать как

$$u_1 = -at \cos(t + \beta). \quad (5.9)$$

Подстановка этого выражения для u_1 в уравнение (5.6) дает

$$\ddot{u}_2 + u_2 = 2a \cos(t + \beta) - 2at \sin(t + \beta). \quad (5.10)$$

Используя операторный метод, метод вариации произвольных постоянных или метод неопределенных коэффициентов, можно построить частное решение уравнения (5.10) следующего вида (см. формулы (Б.69) и (Б.76) приложения Б):

$$u_2 = \frac{1}{2} at^2 \cos(t + \beta) + \frac{1}{2} at \sin(t + \beta). \quad (5.11)$$

Подставляя теперь полученные выражения для u_0 , u_1 и u_2 из формул (5.7), (5.9) и (5.11) соответственно в уравнение (5.3), находим

$$u = a \cos(t + \beta) - eat \cos(t + \beta) + \\ + \frac{1}{2} e^2 a [t^2 \cos(t + \beta) + t \sin(t + \beta)] + \dots \quad (5.12)$$

Полученное прямое, или «медленное», разложение оказывается непригодным при $t \geq 0$ (e^{-1}) из-за наличия в нем секулярных членов. Отметим также, что по мере повышения порядка эти секулярные члены становятся все более сложными. Так, в первом приближении секулярный член зависит от t линейно, тогда как второе приближение содержит уже квадратичный секулярный член. Выполнив разложение до n -го порядка, мы найдем, что соответствующее n -е приближение будет содержать секулярный член, в который входит множитель t^n . Перейдем теперь к исследованию точного решения и попытаемся выяснить причину появления подобных членов.

5.2. Точное решение

Для того чтобы установить причину неравномерности полученного прямого разложения и разработать методы получения равномерно пригодных разложений, обратимся к точному решению уравнения (5.2). Поскольку это уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, то оно допускает решения вида

$$u = c \exp(\lambda t), \quad (5.13)$$

где c и λ — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные. Подстановка (5.13) в уравнение (5.2) дает

$$(\lambda^2 + 2e\lambda + 1) c \exp(\lambda t) = 0,$$

откуда, поскольку нас интересуют только нетривиальные решения,

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + 1 = 0, \quad (5.14)$$

или

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (5.15)$$

Отметим, что в случае $\varepsilon < 1$ формулу (5.15) удобно представить в виде

$$\lambda = -\varepsilon \pm i\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (5.16)$$

Таким образом, общее решение уравнения (5.2) может быть записано как

$$u = c_1 \exp[-\varepsilon t + i\sqrt{1 - \varepsilon^2}t] + c_2 \exp[-\varepsilon t - i\sqrt{1 - \varepsilon^2}t]. \quad (5.17)$$

Поскольку нас интересуют только действительные решения, постоянная c_2 должна быть комплексно-сопряженной с c_1 . Для того чтобы записать решение (5.17) через тригонометрические функции, представим величины c_1 и c_2 в форме

$$c_1 = \frac{1}{2} a \exp(i\beta), \quad c_2 = \frac{1}{2} a \exp(-i\beta),$$

где a и β — вещественные постоянные. Тогда решение (5.17) приобретает вид

$$u = ae^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t + \beta). \quad (5.18)$$

Для того чтобы выяснить причину неравномерности прямого разложения, разложим выражение (5.18) при малых ε , найдем первые три члена этого разложения и сравним полученный результат с прямым разложением (5.12), полученным непосредственно из исходного дифференциального уравнения. С этой целью разложим отдельно входящие в точное решение экспоненту и косинус. Так, применяя формулу Тейлора, получаем

$$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 t^2 - \frac{1}{3!} \varepsilon^3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\varepsilon t)^n. \quad (5.19)$$

Прежде чем раскладывать в ряд тригонометрический косинус, воспользуемся биномиальной формулой и представим входящий в него корень в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \varepsilon^2} &= (1 - \varepsilon^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \varepsilon^4 - \\ &- \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} \varepsilon^6 + \dots = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

При этом

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \beta) &= \cos\left[t + \beta - \frac{1}{2}\varepsilon^2t - \frac{1}{8}\varepsilon^4t + \dots\right] = \\ &= \cos(t + \beta) \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2t + \frac{1}{8}\varepsilon^4t + \dots\right) + \\ &+ \sin(t + \beta) \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2t + \frac{1}{8}\varepsilon^4t + \dots\right),\end{aligned}$$

но поскольку

$$\cos \delta = 1 - \frac{1}{2!} \delta^2 + \frac{1}{4!} \delta^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta^{2n}}{(2n)!} \quad (5.21)$$

и

$$\sin \delta = \delta - \frac{1}{3!} \delta^3 + \frac{1}{5!} \delta^5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \delta^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (5.22)$$

то, с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^4)$, имеем

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \beta) &= \cos(t + \beta) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2t + \dots\right)^2\right] + \\ &+ \sin(t + \beta) \left[\frac{1}{2}\varepsilon^2t + \frac{1}{8}\varepsilon^4t + \dots\right] + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^4t^2\right) \cos(t + \beta) + \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2t + \frac{1}{8}\varepsilon^4t\right) \sin(t + \beta) + \dots\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \beta) &= \cos(t + \beta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2t \sin(t + \beta) + \\ &+ \frac{1}{8}\varepsilon^4[t \sin(t + \beta) - t^2 \cos(t + \beta)] + \dots \quad (5.23)\end{aligned}$$

Для того чтобы иметь возможность сравнивать с разложением (5.12), нам нужно разложить выражение (5.18) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^3)$. Подставляя разложения (5.19) и (5.23) для экспоненты и косинуса в формулу (5.18) и сохраняя в ней члены до второго порядка включительно, находим

$$\begin{aligned}u &= a \left(1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2t^2 + \dots\right) \left[\cos(t + \beta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2t \sin(t + \beta) + \dots\right] = \\ &= a \cos(t + \beta) - \varepsilon a t \cos(t + \beta) + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^2 a [t^2 \cos(t + \beta) + t \sin(t + \beta)] + \dots \quad (5.24)\end{aligned}$$

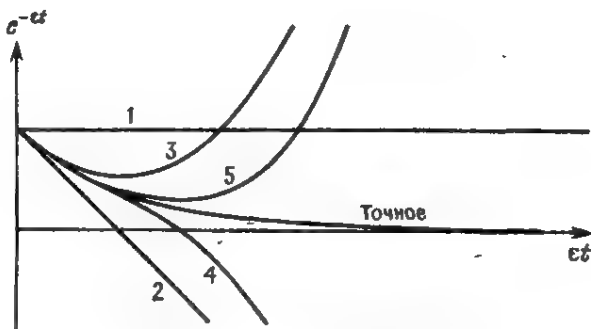


Рис. 5.2. Аппроксимация экспоненциальной функции с помощью конечного числа членов ряда Тейлора.

в полном соответствии с разложением (5.12), полученным непосредственно из исходного дифференциального уравнения.

При построении прямого разложения нам пришлось раскладывать экспоненту по формуле (5.19) и тригонометрический косинус по формуле (5.23). Используя для ряда (5.19) признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-\epsilon t)^n (n-1)!}{n! (-\epsilon t)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\epsilon t}{n} = 0.$$

Таким образом, ряд (5.19) сходится для всех значений ϵt . Однако, как показывает рис. 5.2, функция $\exp(-\epsilon t)$ не может быть равномерно аппроксимирована с помощью конечного числа членов ряда при всех значениях ϵt . Следовательно, любая процедура разложения, основанная на идее аппроксимации функции $\exp(-\epsilon t)$ конечным числом членов степенного ряда, заранее обречена на неудачу при достаточно больших t .

В процессе разложения косинуса нам пришлось иметь дело с тремя разложениями (5.20) — (5.22). Применяя признак Даламбера к ряду (5.20), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-\epsilon^2)^{n+1} n!}{(n+1)! \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-3}{2}\right) (-\epsilon^2)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^2 (2n-1)}{2n+2} = \epsilon^2. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится для всех ϵ , удовлетворяющих условию $\epsilon^2 < 1$. Это означает, что разложение (5.20) будет равномер-

но пригодным при достаточно малых ε . Используя теперь признак Даламбера для ряда (5.21), находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \delta^{2n} (2n-2)!}{(2n)! (-1)^{n-1} \delta^{2n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\delta^2}{2n(2n-1)} = 0.$$

Таким образом, ряд (5.21) сходится при всех значениях δ . Однако рис. 5.3 показывает, что функцию $\cos \delta$ нельзя равномерно аппроксимировать конечным числом членов ряда (5.21) для любых значений δ . Аналогичным образом можно показать, что функцию $\sin \delta$ также нельзя равномерно аппроксимировать конечной суммой членов соответствующего ряда. Тем самым любое разложение, основанное на аппроксимации функций $\cos \delta$ и $\sin \delta$ конечным отрезком степенного ряда, может оказаться непригодным при достаточно больших значениях δ .

В заключение отметим, что несостоятельность прямого разложения при больших t обусловлена именно разложением функций $\exp(-\varepsilon t)$ и $\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \beta)$ в ряды по степеням параметра ε . При этом в соответствии с формой прямого разложения (5.23) частота колебаний системы должна равняться единице независимо от степени затухания. Фактически же наличие затухания изменяет частоту от значения, равного 1, до значения $\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Следовательно, любая процедура разложения, не учитывающая зависимость частоты колебаний системы от величины параметра ε , окажется несостоятельной при больших значениях t . Перейдем теперь к рассмотрению методики Линдштедта—Пуанкаре, которая, как мы покажем в следующем параграфе, может приводить к тривиальному решению.

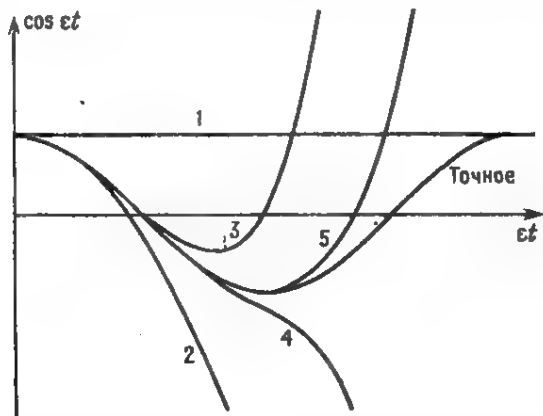


Рис. 5.3. Аппроксимация косинуса с помощью конечного числа членов ряда Тейлора.

5.3. Методика Линдштедта—Пуанкаре

Для учета того обстоятельства, что частота колебаний является функцией параметра ε , введем новую переменную $\tau = \omega t$, в результате чего уравнение (5.2) перейдет в уравнение

$$\omega^2 u'' + 2\varepsilon \omega u' + u = 0, \quad (5.25)$$

где штрихи означают дифференцирование по τ . Далее, разложим u и ω в ряды по степеням ε , т. е. примем, что

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots, \quad (5.26)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots. \quad (5.27)$$

Заметим, что первый член в разложении (5.27) равен единице — он определяет собой частоту колебаний невозмущенной системы, или частоту свободных колебаний. Подстановка разложений (5.26) и (5.27) в уравнение (5.25) дает

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 (u_0'' + \varepsilon u_1'' + \varepsilon^2 u_2'' + \dots) + \\ & + 2\varepsilon (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) (u_0' + \varepsilon u_1' + \varepsilon^2 u_2' + \dots) + \\ & + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Учитывая малость ε и собирая члены с одинаковыми степенями ε , имеем

$$\begin{aligned} & u_0'' + u_0 + \varepsilon [u_1'' + u_1 + 2\omega_1 u_0'' + 2u_0'] + \\ & + \varepsilon^2 [u_2'' + u_2 + 2\omega_2 u_0'' + \omega_1^2 u_0'' + 2\omega_1 u_1'' + 2\omega_1 u_0' + 2u_1'] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая теперь нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , можно получить следующие уравнения для определения функций u_0 , u_1 и u_2 :

$$u_0'' + u_0 = 0, \quad (5.28)$$

$$u_1'' + u_1 = -2\omega_1 u_0'' - 2u_0', \quad (5.29)$$

$$u_2'' + u_2 = -2\omega_2 u_0'' - \omega_1^2 u_0'' - 2\omega_1 u_1'' - 2\omega_1 u_0' - 2u_1'. \quad (5.30)$$

Общее решение уравнения (5.28) может быть записано в виде

$$u_0 = a \cos(\tau + \beta), \quad (5.31)$$

где a и β — некоторые постоянные. Тогда уравнение (5.29) принимает вид

$$u_1'' + u_1 = 2a\omega_1 \cos(\tau + \beta) + 2a \sin(\tau + \beta). \quad (5.32)$$

Для того чтобы исключить секулярные члены из частного решения для функции u_1 , нам необходимо избавиться от правой части уравнения (5.32). При произвольном τ это условие может быть выполнено, если потребовать, чтобы каждый из коэффициен-

тов при $\sin(\tau + \beta)$ и $\cos(\tau + \beta)$ обращался в нуль независимо друг от друга, т. е. чтобы

$$2a\omega_1 = 0 \text{ и } a = 0. \quad (5.33)$$

При этом (5.32) принимает вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 0. \quad (5.34)$$

Соотношения (5.33) нельзя удовлетворить одновременно, если только $a \neq 0$. Если же $a = 0$, то, согласно формуле (5.31), $u_0 = 0$, и тогда, если не учитывать решение соответствующего однородного уравнения, имеем $u_1 = 0$. Далее, подставляя $u_0 = u_1 = 0$ в уравнение (5.30), получаем для u_2 уравнение вида

$$\ddot{u}_2 + u_2 = 0, \quad (5.35)$$

частным решением которого также является функция $u_2 = 0$. Итак, мы в конце концов приходим к тривиальному решению.

Если бы мы воспользовались решением однородного уравнения (5.34), то это решение можно было бы представить в виде

$$u_1 = a_1 \cos(\tau + \beta_1), \quad (5.36)$$

где a_1 и β_1 — произвольные постоянные. При этом уравнение (5.35) заменилось бы уравнением

$$\ddot{u}_2 + u_2 = 2\omega_1 a_1 \cos(\tau + \beta_1) + 2a_1 \sin(\tau + \beta_1), \quad (5.37)$$

для которого условие отсутствия секулярных членов в свою очередь привело бы к требованию $a_1 = 0$. Тем самым мы опять пришли бы к тривиальному решению.

Приведенное рассуждение показывает, что применение методики Линдштедта—Пуанкаре для нашей задачи в любом случае дает только тривиальное решение. Аналогичным образом, лишь тривиальное решение получается и при использовании метода перенормировки. Причина того, почему с помощью этих методов оказывается невозможным построить равномерно пригодное нетривиальное разложение решения, заключается в том, что в процессе вычислений мы все время исходим из утверждения, что равномерное решение должно иметь постоянную амплитуду, как это следует, например, из формулы (5.31). Но поскольку из вида точного решения (5.18) ясно, что амплитуда исходной задачи описывается выражением $a \exp(-\epsilon t)$, то единственно возможным равномерно пригодным решением с постоянной амплитудой будет то, которое достигается по истечении произвольно большого промежутка времени, т. е. при достижении стационарного состояния. Таким образом, можно сделать вывод, что хотя методика Линдштедта—Пуанкаре и метод перенормировки оказываются достаточно эффективными при построении периодических решений, они не позволяют описывать переходные характеристики систем с затуханием.

В данном примере указанный недостаток методики Линдштедта—Пуанкаре и метода перенормировки можно устранить, допустив, что величины ω_n могут быть комплексными. Для того чтобы проиллюстрировать эту идею, представим решение уравнения (5.28) в комплексной форме

$$u_0 = A e^{i\tau} + \bar{A} e^{-i\tau}, \quad (5.38)$$

где A — некоторая комплексная постоянная. Тогда уравнение (5.29) примет вид

$$u_1' + u_1 = 2(\omega_1 - i) A e^{i\tau} + (\text{к. с.}), \quad (5.39)$$

где сокращение (к. с.) использовано для обозначения комплексно-сопряженного слагаемого. Исключая из (5.39) члены, которые приводят к появлению секулярных слагаемых, мы приходим к выводу, что $\omega_1 = i$, причем уравнение (5.39) в этом случае сводится к уравнению (5.34), решением которого будет $u_1 = 0$. Подстановка найденных значений u_0 , u_1 и u_2 в уравнение (5.30) дает

$$u_2' + u_2 = (2\omega_2 + 1) A e^{i\tau} + (\text{к. с.}). \quad (5.40)$$

Условие отсутствия секулярных членов приводит к требованию $\omega_2 = -\frac{1}{2}$, в результате чего мы вновь получаем $u_2 = 0$. Таким образом,

$$\tau = \omega t = \left(1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots\right) t \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} u &= A \exp \left[i \left(1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \right) t \right] + (\text{к. с.}) = \\ &= A \exp(-\varepsilon t) \exp \left[i \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) t \right] + (\text{к. с.}) + \dots \end{aligned} \quad (5.42)$$

Полагая теперь $A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$, где a и β — действительные числа, можно переписать разложение (5.42) в виде

$$u = a e^{-\varepsilon t} \cos \left[\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) t + \beta + \dots \right], \quad (5.43)$$

что находится в полном соответствии с точным решением (5.18), в котором учитываются члены до второго порядка включительно.

Следует отметить, что успех применения описанной модификации метода Линдштедта—Пуанкаре является чисто случайным. Фактически же подобная модифицированная методика, как показано в § 6.2, может приводить к совершенно ошибочным результатам.

5.4. Метод многих масштабов

Воспользовавшись разложением (5.20), перепишем (5.18) в виде

$$u = ae^{-\varepsilon t} \cos \left(t + \beta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t - \frac{1}{8} \varepsilon^4 t + \dots \right). \quad (5.44)$$

Отсюда ясно, что $u(t; \varepsilon) = u(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots)$, и поэтому для решения данной задачи вполне может быть использован метод многих масштабов. Для нахождения разложения второго порядка нам необходимы только три масштаба $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции, производные по времени преобразуются в соответствии с формулами (4.93) и (4.94). Однако в данном случае для упрощения формы записи мы будем писать

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (5.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \\ &+ \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots, \end{aligned} \quad (5.45b)$$

где

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (5.46)$$

При этом уравнение (5.2) принимает вид

$$\begin{aligned} [D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots] u + \\ + 2\varepsilon (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots) u + u = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Таким образом, исходная задача для обыкновенного дифференциального уравнения (5.2) перешла в задачу для уравнения в частных производных (5.47).

Будем искать решение уравнения (5.47) в виде ряда по степеням ε , т. е.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (5.48)$$

Подставляя (5.48) в уравнение (5.47) и группируя члены с одинаковыми степенями ε , имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 u_0 + u_0 + \varepsilon [D_0^2 u_1 + u_1 + 2D_0 D_1 u_0 + 2D_0 u_0] + \\ + \varepsilon^2 [D_0^2 u_2 + u_2 + 2D_0 D_2 u_0 + D_1^2 u_0 + 2D_0 D_1 u_1 + \\ + 2D_0 u_1 + 2D_1 u_0] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Приравнивая теперь коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (5.50)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2D_0 u_0, \quad (5.51)$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - 2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 u_1 - 2D_1 u_0. \quad (5.52)$$

Как указывалось в § 4.5, решение уравнения (5.50) удобнее представить в комплексной форме

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (5.53)$$

Тогда уравнение (5.51) переписывается в виде

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(D_1 A + A) e^{iT_0} + (\text{к. с.}), \quad (5.54)$$

где комплексно-сопряженное слагаемое в данном случае будет равно $2i(D_1 \bar{A} + \bar{A}) \exp(-iT_0)$.

Требование отсутствия секулярных членов в выражении для u_1 приводит к условию, чтобы каждый из коэффициентов при $\exp(iT_0)$ и $\exp(-iT_0)$ независимо друг от друга равнялся нулю. Обращение в нуль коэффициента при $\exp(iT_0)$ дает

$$D_1 A + A = 0. \quad (5.55)$$

Это же условие для коэффициента при $\exp(-iT_0)$ приводит к соотношению, комплексно-сопряженному с (5.55), и, следовательно, не содержит никаких дополнительных ограничений, поскольку если равенство (5.55) удовлетворяется, то комплексно-сопряженное с ним будет удовлетворяться автоматически. С учетом (5.55) уравнение (5.54) переписывается в виде

$$D_0^2 u_1 + u_1 = 0, \quad (5.56)$$

причем, согласно принятому нами ранее подходу, по которому решения соответствующих однородных уравнений не принимаются во внимание, за исключением уравнения для порядка ε^0 , решение (5.56) запишется как

$$u_1 = 0. \quad (5.57)$$

Решение уравнения (5.55) имеет вид

$$A = B(T_2) e^{-T_1}, \quad (5.58)$$

где постоянная интегрирования $B(T_2)$ (поскольку в уравнение (5.55) входит только производная по T_1) является функцией переменной T_2 . Она определяется из условия отсутствия членов, порождающих секулярные слагаемые в задаче второго порядка, т. е. в задаче для функции u_2 .

Подставляя выражения для u_0 и u_1 в уравнение (5.52), получаем

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -(2iD_2 A + D_1^2 A + 2D_1 A) e^{iT_0} + (\text{к. с.}). \quad (5.59)$$

Условие отсутствия секулярных членов в выражении для u_2 приводит к требованию обращения в нуль коэффициента при $\exp(iT_0)$, т. е. к соотношению

$$2iD_2A + D_1^2A + 2D_1A = 0. \quad (5.60)$$

Подстановка выражения для A из (5.58) в уравнение (5.60) дает уравнение

$$2iD_2Be^{-T_1} - Be^{-T_1} = 0,$$

или

$$2iD_2B - B = 0, \quad (5.61)$$

решением которого является функция

$$B = ce^{-(1/2) iT_2}, \quad (5.62)$$

где c — произвольная комплексная постоянная, поскольку B зависит только от переменной T_2 .

Подставляя найденное выражение для B в формулу (5.58), находим

$$A = ce^{-T_1 - (1/2) iT_2}, \quad (5.63)$$

так что (5.53) приобретает вид

$$u_0 = ce^{-T_1 + i[T_0 - (1/2) T_2]} + \bar{c}e^{-T_1 - i[T_0 - (1/2) T_2]}.$$

Представляя постоянную c в форме $\frac{1}{2} a \exp(i\beta)$, перепишем выражение для u_0 в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} ae^{-T_1} e^{i[T_0 - (1/2) T_2 + \beta]} + \frac{1}{2} ae^{-T_1} e^{-i[T_0 - (1/2) T_2 + \beta]} = \\ &= \frac{1}{2} ae^{-T_1} \{e^{i[T_0 - (1/2) T_2 + \beta]} + e^{-i[T_0 - (1/2) T_2 + \beta]}\} = \\ &= ae^{-T_1} \cos\left(T_0 - \frac{1}{2} T_2 + \beta\right), \end{aligned}$$

или, после возвращения к исходной переменной t ,

$$u_0 = ae^{-\varepsilon^2 t} \cos\left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \beta\right). \quad (5.64)$$

Подставляя теперь соответствующие выражения для u_0 и u_1 из формул (5.64) и (5.57) в разложение (5.48), приходим окончательно к разложению

$$u = ae^{-\varepsilon^2 t} \cos\left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \beta\right) + O(\varepsilon^2), \quad (5.65)$$

которое уже является равномерным по t и полностью соответствует разложению (5.44) с точностью до членов порядка ε^2 . Таким образом, в данном случае метод многих масштабов позволяет не только построить полное описание переходного процесса, но и найти приближенное выражение для частоты колебаний нашей системы.

5.5. Метод усреднения

В случае $\varepsilon = 0$ решение уравнения (5.2) может быть записано как

$$u = a \cos(t + \beta), \quad (5.66)$$

где a и β — произвольные постоянные. При этом дифференцирование (5.66) по t дает

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta). \quad (5.67)$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ мы также будем считать, что решение исходной задачи дается выражением (5.66) с условием (5.67), но при этом предполагается, что величины a и β зависят от времени.

Поскольку $a = a(t)$ и $\beta = \beta(t)$, то дифференцирование (5.66) по t дает

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{a} \cos(t + \beta) - a(1 + \dot{\beta}) \sin(t + \beta) = \\ &= -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Сравнивая соотношения (5.67) и (5.68), можно сделать вывод, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (5.69)$$

Дифференцирование (5.67) по t дает

$$\ddot{u} = -\dot{a} \sin(t + \beta) - a(1 + \dot{\beta}) \cos(t + \beta). \quad (5.70)$$

Далее, подставляя (5.66), (5.67) и (5.70) в исходное уравнение (5.2), получаем

$$\begin{aligned} &-\dot{a} \sin(t + \beta) - a \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) - \\ &-2\varepsilon a \sin(t + \beta) + a \cos(t + \beta) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = -2\varepsilon a \sin(t + \beta). \quad (5.71)$$

Умножая теперь равенства (5.69) и (5.71) соответственно на $\cos(t + \beta)$ и $\sin(t + \beta)$, складывая полученные результаты и учитывая, что $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, находим

$$\dot{a} = -2\varepsilon a \sin^2(t + \beta) = -\varepsilon a + \varepsilon a \cos(2t + 2\beta). \quad (5.72)$$

Подстановка (5.72) в соотношение (5.69) дает

$$-2\varepsilon a \sin^2(t + \beta) \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (5.73)$$

Если $a \neq 0$, то из (5.73) следует, что

$$\dot{\beta} = -2\varepsilon \sin(t + \beta) \cos(t + \beta) = -\varepsilon \sin(2t + 2\beta). \quad (5.74)$$

Как уже отмечалось в § 4.6, при решении уравнений (5.72) и (5.74) в случае малых ε мы можем воспользоваться двумя различными подходами. С одной стороны, для построения первого приближения можно усреднить правые и левые части уравнений (5.72) и (5.74) по промежутку $[0, \pi]$, а с другой — мы можем сохранить в этих уравнениях лишь медленно меняющиеся члены. Используя

второй из этих подходов, в качестве первого приближения получаем

$$\dot{a} = -\varepsilon a, \quad (5.75)$$

$$\dot{\beta} = 0. \quad (5.76)$$

Решениями уравнений (5.75), (5.76) являются функции

$$a = a_0 e^{-\varepsilon t} \quad \text{и} \quad \beta = \beta_0, \quad (5.77)$$

где a_0 и β_0 — произвольные постоянные. Тогда из (5.66) следует, что

$$u = a_0 e^{-\varepsilon t} \cos(t + \beta_0), \quad (5.78)$$

причем это выражение полностью соответствует (5.44) с точностью до членов порядка ε . Поэтому первое приближение метода усреднения хотя и позволяет определить переходные характеристики нашей системы, но не дает возможности найти поправки к ее частоте, которые в данном случае имеют более высокий порядок, чем первый. Следовательно, для нахождения этих поправок необходимо построить решения уравнений (5.72) и (5.74) с точностью до членов более высокого порядка. Это можно осуществить, например, с помощью обобщенного метода усреднения (см. § 7.6).

Упражнения

5.1. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\eta\dot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции u .

5.2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (\varepsilon \gg 1).$$

Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции u .

5.3. Рассмотреть следующее уравнение:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon\eta u^2 \dot{u} + \varepsilon u^3 = 0.$$

Показать, что в первом приближении

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\varepsilon),$$

и получить соответствующие уравнения для нахождения a и β с помощью метода многих масштабов и метода усреднения.

5.4. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для общего решения уравнения

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta + \frac{4 \sin^3 \theta}{1 + 4(1 - \cos \theta)} \dot{\theta} = 0$$

при малых, но конечных θ .

5.5. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \frac{\mu \dot{u}}{1 - u^2} = 0.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых μ .

5.6. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^5 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С САМОВОЗБУЖДЕНИЕМ

В отличие от предыдущей главы, в которой рассматривались системы с положительным затуханием, в этой главе мы займемся исследованием систем, обладающих отрицательным затуханием. А именно, мы рассмотрим системы с самовозбуждением, имеющие одну степень свободы. Такие системы описываются уравнениями типа

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + ku^* = \mu f^* \left(u^*, \frac{du^*}{dt^*} \right) \frac{du^*}{dt^*}, \quad (6.1)$$

где μ — некоторый положительный параметр, а функция f^* положительна при малых u^* .

С целью упрощения математических выкладок будем рассматривать уравнение следующего специального вида:

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + ku^* = \mu \left[1 - \alpha \left(\frac{du^*}{dt^*} \right)^2 \right] \frac{du^*}{dt^*} \quad (6.2)$$

с положительным α . Это уравнение называется обычно уравнением Рэлея. Как уже указывалось ранее, прежде чем приступить к анализу уравнения (6.2), необходимо привести его к безразмерному виду. С этой целью, выбрав в качестве исходных масштабов задачи некоторое характерное смещение u_0^* и собственную частоту соответствующей линейной системы $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, введем следующие безразмерные переменные:

$$u = u^* / u_0^* \quad \text{и} \quad t = t^* \sqrt{k/m}.$$

Тогда уравнение (6.2) преобразуется к виду

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left(1 - \frac{\alpha u_0^{*2} k}{m} \dot{u}^2 \right) \dot{u}, \quad (6.3)$$

где $\varepsilon = \mu / \sqrt{k m}$. Выбирая величину u_0^* таким образом, чтобы $\alpha u_0^{*2} k = \frac{1}{3} m$, можно записать уравнение (6.3) в стандартной форме

$$\ddot{u} + u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right). \quad (6.4)$$

Дифференцируя уравнение (6.4) по времени, имеем

$$\ddot{\dot{u}} + \dot{u} = \varepsilon (\ddot{u} - \dot{u}^2 \dot{u}). \quad (6.5)$$

Если положить $\dot{u} = v$, то (6.5) можно представить в виде

$$\ddot{v} + v = \varepsilon(1 - v^2)\dot{v}. \quad (6.6)$$

Полученное уравнение обычно называется *уравнением Ван-дер-Поля*.

В этой главе мы рассмотрим методы нахождения приближенных решений уравнения (6.4), а следовательно, и уравнения (6.6) при малых ε . Начнем, как обычно, с построения прямого разложения решения, после чего обсудим вопрос о его равномерности. Далее мы покажем, что ни методика Линдштедта—Пуанкаре, ни метод перенормировки не позволяют построить описание переходных режимов системы. В заключение покажем, что эти переходные режимы могут быть описаны с помощью метода многих масштабов и метода усреднения.

6.1. Прямое разложение

Будем искать прямое разложение решения (6.4) в виде

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots, \quad (6.7)$$

ограничиваясь членами первого порядка малости по ε . Подстановка (6.7) в уравнение (6.4) дает

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots = \varepsilon(\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots) - \\ - \frac{1}{3} \varepsilon (\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots)^3. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Используя биномиальную формулу для разложения кубического члена в (6.8) и сохраняя члены порядка ε , находим

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \varepsilon(\ddot{u}_1 + u_1) + \dots = \varepsilon\left(\dot{u}_0 - \frac{1}{3} \dot{u}_0^3\right) + \dots \quad (6.9)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях (6.9) ведет к уравнениям

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (6.10)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \dot{u}_0 - \frac{1}{3} \dot{u}_0^3, \quad (6.11)$$

которые могут быть решены последовательно относительно u_0 и u_1 .

Общее решение уравнения (6.10) можно представить в виде

$$u_0 = a \cos(t + \beta), \quad (6.12)$$

где a и β — произвольные постоянные. Тогда (6.11) переходит в уравнение

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a \sin(t + \beta) + \frac{1}{3} a^3 \sin^3(t + \beta). \quad (6.13)$$

Используя тригонометрическую формулу (А.16)

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta,$$

перепишем (6.13) как

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \left(\frac{1}{4} a^2 - 1 \right) a \sin(t + \beta) - \frac{1}{12} a^3 \sin(3t + 3\beta). \quad (6.14)$$

Поскольку уравнение (6.14) линейно, то его частное решение может быть представлено как сумма двух частных решений следующих уравнений:

$$\ddot{u}_1^{(1)} + u_1^{(1)} = \left(\frac{1}{4} a^2 - 1 \right) a \sin(t + \beta) \quad (6.15)$$

и

$$\ddot{u}_1^{(2)} + u_1^{(2)} = -\frac{1}{12} a^3 \sin(3t + 3\beta). \quad (6.16)$$

Частное решение первого из них (см. формулы (Б.81) и (Б.82) приложения Б) есть

$$u_{1\text{частн}}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a t \cos(t + \beta), \quad (6.17)$$

частное решение второго (формулы (Б.68) и (Б.69)) —

$$u_{1\text{частн}}^{(2)} = \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta), \quad (6.18)$$

откуда

$$\begin{aligned} u_{1\text{частн}} &= u_{1\text{частн}}^{(1)} + u_{1\text{частн}}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a t \cos(t + \beta) + \\ &+ \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Как уже указывалось в § 4.1, в случае если a и β считаются функциями ε , нам не нужно учитывать решение соответствующего однородного уравнения, так что решение уравнения (6.14) будет даваться именно формулой (6.19). Подставляя (6.12) и (6.19) в разложение (6.7), получаем

$$\begin{aligned} u &= a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a t \cos(t + \beta) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{96} a^3 \sin(3t + 3\beta) \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.20)$$

Построенное таким образом прямое разложение неравномерно при $t \geq 0$ (ε^{-1}), поскольку при этом поправочный член из-за присутствия в нем секулярного слагаемого оказывается по величине порядка первого члена разложения или даже больше его. Эта неравномерность хорошо иллюстрируется на рис. 6.1, где решение,

подсчитанное по формуле (6.20), сравнивается с решением, полученным с помощью численного интегрирования уравнения (6.4). В начальные моменты времени прямое разложение решения и численное решение близки между собой. Однако по мере возрастания t аналитическое решение все более уходит от численного решения, которое приближается к некоторому периодическому решению с амплитудой, равной примерно 2 независимо от выбора начальных условий. Это периодическое решение, к которому стремится численное решение, называется *предельным циклом*. На рис. 6.2 показан типичный ход численных решений на фазовой плоскости (плоскости uv , где $v = \dot{u}$) для нескольких значений параметра ε и различных начальных условий. При этом, когда ε мало, предельный цикл имеет амплитуду, приблизительно равную 2, независимо от выбора начальных условий.

Следует отметить, что секулярный член в (6.20) пропадает, если

$$\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)a = 0. \quad (6.21)$$

Если исключить тривиальный случай $a = 0$, то соотношение (6.21) удовлетворяется при $a = \pm 2$. При положительных по определению амплитудах ($a = 2$) разложение (6.20) принимает вид

$$u = 2 \cos(t + \beta) + \frac{1}{12}\varepsilon \sin(3t + 3\beta) + \dots \quad (6.22)$$

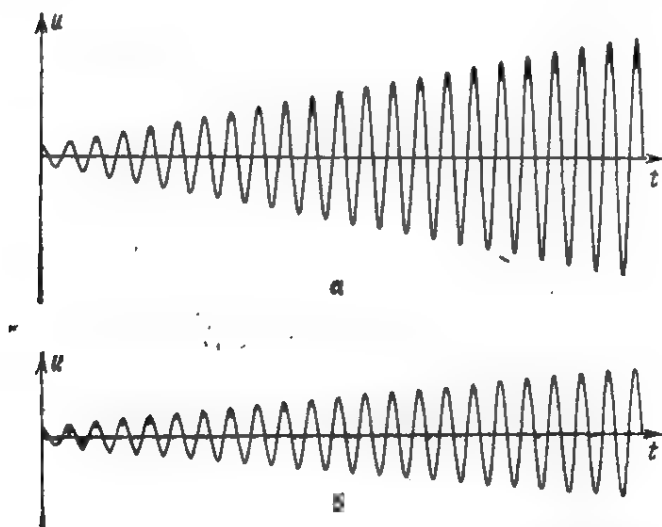


Рис. 6.1. Сравнение прямого разложения (а) с точным решением (б) при $u(0) = 0.5$, $\dot{u}(0) = 0$ и $\varepsilon = 0.1$.

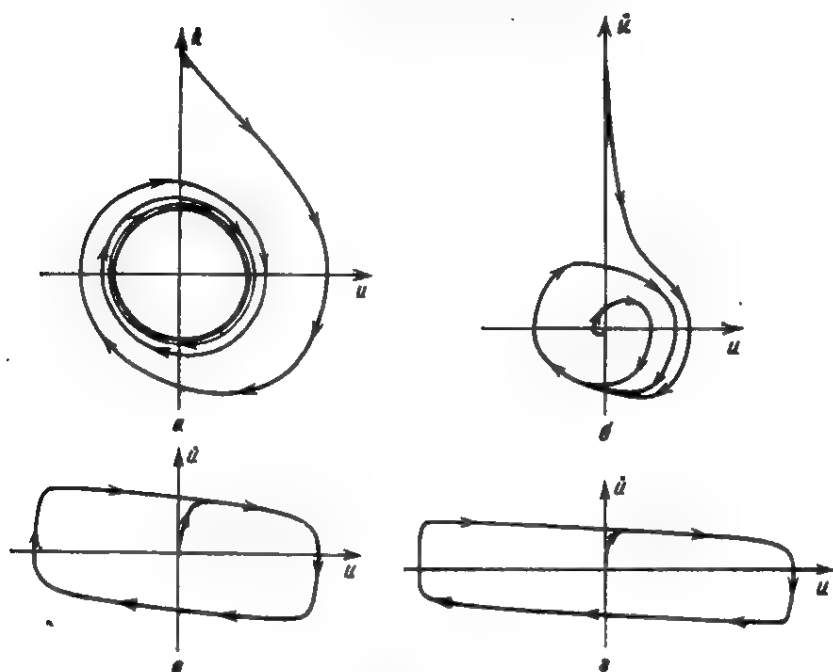


Рис. 6.2. Фазовые плоскости для уравнения Рэлея: а) $\varepsilon = 0.01$; б) $\varepsilon = 0.1$; в) $\varepsilon = 1$; г) $\varepsilon = 10.0$.

Последняя формула представляет собой периодическое решение, амплитуда которого, с точностью до малых первого порядка, равна 2, т. е. дает нам предельный цикл.

6.2. Метод перенормировки

В этом параграфе для преобразования разложения (6.20) используем метод перенормировки. Так, полагая

$$\tau = \omega t = (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots) t, \quad (6.23)$$

имеем

$$t = \tau (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^{-1} = \tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots \quad (6.24)$$

Подстановка (6.24) в разложение (6.20) дает

$$\begin{aligned} u = & a \cos(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \\ & + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a (\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \cos(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{96} a^3 \sin(3\tau + 3\beta - 3\varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

Используя разложения в ряды Тейлора вида (4.86), перепишем (6.25) как

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \left(\omega_1 a \tau \sin(\tau + \beta) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a \tau \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{96} a^3 \sin(3\tau + 3\beta) \right) + \dots \quad (6.26)$$

Если ω_1 принимает действительные значения, то условие отсутствия секулярных членов в (6.26) приводит к соотношениям

$$\omega_1 a = 0, \quad (6.27)$$

$$\left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a = 0. \quad (6.28)$$

Так как в случае нетривиального решения $a \neq 0$, то из соотношений (6.27) и (6.28) следует, что $\omega_1 = 0$ и $a = 2$. (Случай $a = -2$ может быть отброшен, если считать амплитуду положительной.) При этом из формулы (6.23) получаем, что $\tau = t + O(\varepsilon^2)$, и (6.26) переходит в разложение

$$u = 2 \cos(t + \beta) + \frac{1}{12} \varepsilon \sin(3t + 3\beta) + \dots, \quad (6.29)$$

представляющее собой предельный цикл.

Возникает вопрос, нельзя ли нам все же построить равномерно пригодное разложение, воспользовавшись введенным в § 5.3 допущением о том, что ω_n могут принимать комплексные значения. Для ответа на этот вопрос представим разложение (6.26) в комплексной форме. С этой целью положим

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ и } \sin \theta = -\frac{i}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

и перепишем разложение (6.26) в виде

$$u = \frac{1}{2} a e^{i(\tau + \beta)} + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) - i \omega_1 \right] a \tau e^{i(\tau + \beta)} - \frac{i}{192} a^3 e^{3i(\tau + \beta)} \right\} + (\text{к. с.}) + \dots \quad (6.30)$$

Требование отсутствия секулярных членов в (6.30) дает

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} i \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right), \quad (6.31)$$

и, следовательно,

$$u = \frac{1}{2} a e^{i(\tau + \beta)} + (\text{к. с.}) + \dots \quad (6.32)$$

При этом из (6.23) и (6.31) имеем

$$\tau = t - \frac{1}{2} i \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) t + \dots, \quad (6.33)$$

так что разложение (6.32) принимает вид

$$u = \frac{1}{2} a \exp \left\{ i \left[t - \frac{1}{2} i \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) t + \beta + \dots \right] \right\} + (\text{к. с.}) + \dots = \\ = \frac{1}{2} a \exp \left[\frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) t \right] \exp [i(t + \beta)] + (\text{к. с.}) + \dots$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u = a \exp \left[\frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) t \right] \cos(t + \beta) + \dots \quad (6.34)$$

Из формулы (6.34) следует, что при $t \rightarrow \infty$ $u \rightarrow \infty$, если $|a| < 2$, и $u \rightarrow 0$, если $|a| > 2$. Однако это неверно, поскольку из рис. 6.1 и рис. 6.2 видно, что численные решения уравнения (6.4) стремятся к значению, приблизительно равному 2 независимо от начальных условий, а следовательно, и от величины a . Таким образом, предложенный вариант методики Линдштедта—Пуанкаре и метода перенормировки, при котором допускаются комплексные значения ω_n , может приводить к ошибочным результатам, как это и произошло в данном случае. В связи с этим следует избегать применения указанных методов для исследования решений, отличных от периодических.

6.3. Метод многих масштабов

Для того чтобы построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (6.4) с помощью метода многих масштабов, введем масштабы $T_0 = t$ и $T_1 = \varepsilon t$. При этом производные по времени преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots,$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$, а уравнение (6.4) примет вид

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + u = \varepsilon \left[D_0 u - \frac{1}{3} (D_0 u)^3 \right] + \dots \quad (6.35)$$

Будем искать решение уравнения (6.35) в форме

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (6.36)$$

Подставляя разложение (6.36) в (6.35) и приравнявая коэффициенты при ε^0 и ε^1 в левой и правой частях, получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (6.37)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + D_0 u_0 - \frac{1}{3} (D_0 u_0)^3. \quad (6.38)$$

Как и ранее, общее решение уравнения (6.37) запишем в комплексной форме

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0}. \quad (6.39)$$

Тогда (6.38) приобретает вид

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2iA' e^{iT_0} + 2i\bar{A}' e^{-iT_0} + iA e^{iT_0} - i\bar{A} e^{-iT_0} - \\ - \frac{1}{3} (iA e^{iT_0} - i\bar{A} e^{-iT_0})^3,$$

или

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -i(2A' - A + A^2 \bar{A}) e^{iT_0} + \frac{1}{3} iA^3 e^{3iT_0} + (\text{к. с.}). \quad (6.40)$$

Требование отсутствия секулярных членов в решении для u_1 приводит к соотношению

$$2A' - A + A^2 \bar{A} = 0. \quad (6.41)$$

Как и ранее, представим A в форме

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}, \quad (6.42)$$

где a и β — действительные функции переменной T_1 . При этом решение (6.39) приобретает вид

$$u_0 = \frac{1}{2} a e^{i(T_0 + \beta)} + \frac{1}{2} a e^{-i(T_0 + \beta)},$$

или

$$u_0 = a \cos(T_0 + \beta). \quad (6.43)$$

Подстановка (6.42) в условие (6.41) дает

$$a' e^{i\beta} + i a \beta' e^{i\beta} - \frac{1}{2} a e^{i\beta} + \frac{i}{8} a^3 e^{i\beta} = 0.$$

Опуская общий множитель $\exp(i\beta)$ и отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$a' = \frac{1}{2} a - \frac{1}{8} a^3, \quad (6.44)$$

$$\beta' = 0. \quad (6.45)$$

Решение (6.45) имеет вид

$$\beta = \beta_0 = \text{const.} \quad (6.46)$$

Уравнение же (6.44) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$dT_1 = \frac{8da}{4a - a^3} = \frac{8da}{a(2-a)(2+a)}. \quad (6.47)$$

Разлагая правую часть (6.47) на простейшие дроби, находим

$$dT_1 = \frac{2da}{a} + \frac{da}{2-a} - \frac{da}{2+a}. \quad (6.48)$$

Интегрирование (6.48) дает

$$T_1 + c = 2 \ln a - \ln |2 - a| - \ln (2 + a),$$

или

$$T_1 + c = \ln \frac{a^3}{|4 - a^2|},$$

где c — произвольная постоянная. Отсюда

$$\frac{a^3}{4 - a^2} = e^{T_1 + c} = e^{et + c}. \quad (6.49)$$

Решая уравнение (6.49) относительно a^2 , получаем

$$a^2 = \frac{4 \exp(et + c)}{1 + \exp(et + c)} = \frac{4}{1 + \exp(-et - c)}. \quad (6.50)$$

Подставляя выражения (6.46) и (6.50) в решение (6.43) и полагая $T_0 = t$, находим

$$u_0 = 2 [1 + e^{-et - c}]^{-1/2} \cos(t + \beta_0) + \dots \quad (6.51)$$

Наконец, подстановка (6.51) в (6.36) дает нам следующее разложение первого порядка для общего решения уравнения (6.4):

$$u = 2 [1 + \exp(-et - c)]^{-1/2} \cos(t + \beta_0) + \dots \quad (6.52)$$

Используя начальные условия

$$u(0) = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad (6.53)$$

из разложения (6.52) находим

$$a_0 = 2 [1 + e^{-c}]^{-1/2} \cos \beta_0, \quad (6.54)$$

$$0 = -2 [1 + e^{-c}]^{-1/2} \sin \beta_0 + O(\varepsilon). \quad (6.55)$$

При этом из соотношения (6.55) имеем $\sin \beta_0 = O(\varepsilon)$, или $\beta_0 = 0 + O(\varepsilon)$, а из соотношения (6.54)

$$a^2 = 4 [1 + e^{-c}]^{-1}. \quad (6.56)$$

Выражая отсюда $\exp(-c)$, находим

$$e^{-c} = \frac{4}{a_0^2} - 1. \quad (6.57)$$

Таким образом, разложение (6.52) приобретает вид

$$u = 2 \left[1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-et} \right]^{-1/2} \cos t + \dots \quad (6.58)$$

Из формулы (6.58) следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$u \rightarrow 2 \cos t + O(\varepsilon) \quad (6.59)$$

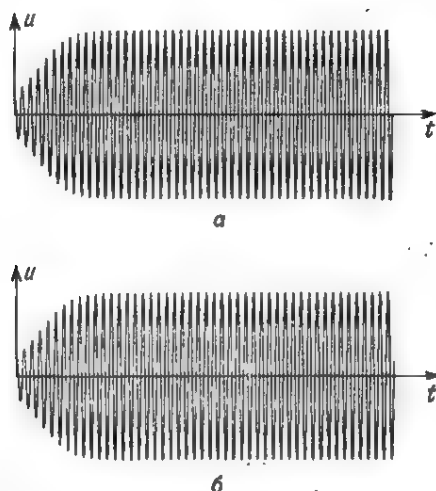


Рис. 6.3. Сравнение приближенного (а) и точного (б) решений при $u(0) = 0.5$, $\dot{u}(0) = 0$ и $\varepsilon = 0.1$.

независимо от значения a , если, конечно, $a \neq 0$. Этот результат вполне соответствует характеру численных решений, представленных на рис. 6.1 и рис. 6.3. Кроме того, из рис. 6.3 видно, что результаты расчетов по формуле (6.58) оказываются в хорошем соответствии с численными решениями уравнения (6.4).

Вместе с тем из формулы (6.58) ясно, что решение u нельзя представить в виде $a \cos(t + \beta)$, где a — экспоненциальная функция времени. В то же время, согласно методике Линдштедта—Пуанкаре и методу перенормировки, даже если предположить ω комплексным, амплитуда a обязательно будет представлять собой экспоненциальную функцию. Это означает, что с помощью указанных методов невозможно построить хорошее приближение к решению исходной задачи. С другой стороны, метод многих масштабов, который сводит исходную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения к системе уравнений в частных производных, допускает достаточно широкий произвол при выборе формы приближенного решения, что позволяет с помощью этого метода получать весьма удачные аппроксимации.

6.4. Метод усреднения

Как указывалось в § 4.6 и 5.5, для того, чтобы применить метод усреднения к уравнению (6.4), нам необходимо воспользоваться идеей вариации произвольных постоянных и ввести преобразования

$$u(t; \varepsilon) = a(t) \cos[t + \beta(t)], \quad (6.60)$$

$$\dot{u}(t; \varepsilon) = -a(t) \sin[t + \beta(t)]. \quad (6.61)$$

Как и ранее, дифференцируя (6.60) по t , получаем

$$\dot{a} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta). \quad (6.62)$$

При этом из соотношений (6.61) и (6.62) следует, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (6.63)$$

Дифференцирование (6.61) по t дает

$$\ddot{a} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta). \quad (6.64)$$

Подставляя выражения (6.60), (6.61) и (6.64) в исходное уравнение (6.4), находим

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = ea \sin(t + \beta) - \frac{1}{3} ea^3 \sin^3(t + \beta). \quad (6.65)$$

Разрешая теперь (6.63) и (6.65) относительно \dot{a} и $\dot{\beta}$, получаем следующие уравнения в вариациях:

$$\dot{a} = e \left[a \sin(t + \beta) - \frac{1}{3} a^3 \sin^3(t + \beta) \right] \sin(t + \beta), \quad (6.66)$$

$$a\dot{\beta} = e \left[a \sin(t + \beta) - \frac{1}{3} a^3 \sin^3(t + \beta) \right] \cos(t + \beta). \quad (6.67)$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \sin^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3),$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \sin^3 \theta \cos \theta = \frac{1}{8} (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta),$$

перепишем уравнения (6.66) и (6.67) в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} = ea \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} a^2 \right) \cos(2t + 2\beta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{24} a^2 \cos(4t + 4\beta) \right], \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\dot{\beta} = e \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} a^2 \right) \sin(2t + 2\beta) + \frac{1}{24} a^2 \sin(4t + 4\beta) \right]; \quad (6.69)$$

кроме того, при выводе (6.69) используется предположение, что $a \neq 0$.

Как известно, в первом приближении мы сохраняем только медленно меняющиеся члены, т. е. члены, не содержащие тригонометрических функций. Таким образом, в первом приближении уравнения (6.68) и (6.69) заменяются усредненными уравнениями

$$\dot{a} = \frac{1}{2} ea \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right), \quad (6.70)$$

$$\dot{\beta} = 0, \quad (6.71)$$

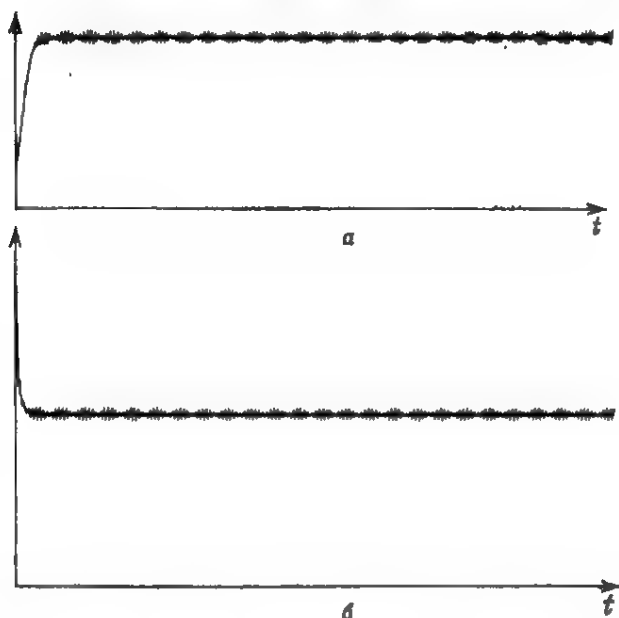


Рис. 6.4. Сравнение решений проварьированных уравнений (6.68) и (6.69) с решениями усредненного уравнения (6.70) при $\varepsilon = 0.3$ в случае: а) $a(0) = 0.5$, $\beta(0) = 0$; б) $a(0) = 4.0$, $\beta(0) = 0$.

которые полностью совпадают с уравнениями (6.44) и (6.45), полученными с помощью метода многих масштабов.

На рис. 6.4 приведено сравнение решений уравнений в вариациях (6.68) и (6.69) с решениями усредненного уравнения (6.70) при начальных условиях

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0. \quad (6.72)$$

Ясно, что решения усредненных уравнений представляют собой средние значения решений уравнений в вариациях.

Упражнения

6.1. Рассмотреть уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{u} + u = \varepsilon(1 - u^2)\dot{u}.$$

а) Построить двучленное прямое разложение и исследовать его неравномерность.

б) Преобразовать это разложение в равномерно пригодное, используя метод перенормировки.

в) Используя метод многих масштабов и метод усреднения, получить равномерно пригодное разложение первого порядка.

г) Сравнить результаты пп. б) и в) и указать ограничения метода перенормировки.

6.2. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка, описывающее переходный режим для решения уравнения

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon [\dot{y} - \dot{y}^3 + \dot{y}^2 u] \quad (\varepsilon \ll 1).$$

6.3. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x} + x - \frac{1}{2} (\dot{x} - |\dot{x}|) \delta(x - x_0) = 0,$$

где x_0 — постоянная и $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка при малых, но конечных x .

6.4. Рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_0^2 y = 2\varepsilon [(1 - v) \dot{y} - \dot{y} u], \\ \dot{v} + v = u^2. \end{cases}$$

Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для y и v .

6.5. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{y} + y = \varepsilon (1 - u^4) \dot{y} \quad \text{при } \varepsilon \ll 1.$$

6.6. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения

$$\ddot{y} + y - \varepsilon (1 - u^2) \dot{y} + \varepsilon u^3 = 0 \quad \text{при } \varepsilon \ll 1.$$

СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ И КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассмотрим свободные колебания частицы массы m , находящейся под действием силы тяжести и связанной с пружиной, сила упругости которой меняется по нелинейному закону (рис. 7.1). Уравнение движения такой системы имеет вид

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + f(x^*) = mg, \quad (7.1)$$

где g — ускорение силы тяжести, а $f(x^*)$ — нелинейная возвращающая сила пружины. Пусть $f(x^*)$ представляет собой полином третьей степени от x^* вида

$$f(x^*) = k_1 x^* + k_3 x^{*3}, \quad (7.2)$$

где $k_1 > 0$. Подстановка (7.2) в уравнение (7.1) дает

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + k_1 x^* + k_3 x^{*3} = mg. \quad (7.3)$$

Опуская в уравнении (7.3) член, описывающий ускорение системы, можно найти координаты x_s^* ее положений равновесия из соотношения

$$k_1 x_s^* + k_3 x_s^{*3} = mg. \quad (7.4)$$

В этой главе мы будем исследовать малые колебания нашей системы около одного из этих положений равновесия. С этой целью положим в (7.3)

$$x^* = x_s^* + u^*; \quad (7.5)$$

в результате имеем

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 (x_s^* + u^*) + k_3 (x_s^* + u^*)^3 = mg. \quad (7.6)$$

Возводя в куб и используя (7.4), перепишем уравнение (7.6) в виде

$$m \frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + (k_1 + 3k_3 x_s^{*2}) u^* + 3k_3 x_s^* u^{*2} + k_3 u^{*3} = 0. \quad (7.7)$$

Как и ранее, введем следующие безразмерные переменные:

$$u = u^*/x_s^*, \quad t = \omega t^*,$$

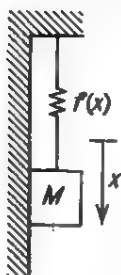


Рис. 7.1. Масса, связанная с нелинейной пружиной, при наличии силы тяжести.

где $\omega = \sqrt{(k_1 + 3k_3 x_s^2)/m}$ — собственная частота соответствующей линейной задачи, предполагаемая вещественной. Тогда уравнение (7.7) принимает вид

$$\ddot{u} + u + 3\alpha u^2 + \alpha u^3 = 0, \quad (7.8)$$

где $\alpha = k_3 x_s^2 / m \omega^2$, причем мы будем считать, что $\alpha = O(1)$. В отличие от уравнения Дюффинга уравнение (7.8) содержит как квадратичные, так и кубические члены. В дальнейшем вместо (7.8) будем исследовать несколько более общее уравнение, а именно

$$\ddot{u} + u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 = 0 \quad (7.9)$$

с постоянными α_2 и α_3 .

В следующем параграфе мы строим прямое разложение второго порядка для решения уравнения (7.9). В § 7.2 и 7.3 это разложение преобразуется в равномерно пригодное с помощью метода перенормировки и методики Линдштедта—Пуанкаре. В § 7.4 равномерно пригодное разложение строится с помощью метода многих масштабов. В § 7.5 мы покажем, что первое приближение, полученное по методу усреднения, приводит к неполному решению. Поэтому в § 7.6 мы опишем обобщенный метод усреднения, что позволит получить для решения уравнения (7.9) равномерно пригодное разложение второго порядка. Наконец, в § 7.7 изложим метод Крылова—Боголюбова—Митропольского.

7.1. Прямое разложение

Уравнение (7.9) не содержит явно малого параметра, поэтому, для того чтобы получить прямое разложение решения в случае малых, но конечных амплитуд, нам нужно ввести малый параметр в исходное уравнение. С этой целью будем искать разложение решения (7.9) в форме

$$u = \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots, \quad (7.10)$$

где ε — малый безразмерный параметр, являющийся мерой амплитуды колебаний. Мы используем этот параметр в качестве вспо-

могательного средства, с тем чтобы произвести «предварительный учет» порядков величин, входящих в уравнение, а затем положим его равным единице и будем считать малой амплитуду.

Подстановка (7.10) в уравнение (7.9) дает

$$\begin{aligned} & \epsilon \ddot{y}_1 + \epsilon^2 \ddot{y}_2 + \epsilon^3 \ddot{y}_3 + \dots + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots \\ & \dots + \alpha_2 (\epsilon u_1 + \epsilon u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots)^2 + \alpha_3 (\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots)^3 = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Возводя в соответствующую степень ряды, стоящие в скобках в (7.11), и сохраняя члены до порядка $O(\epsilon^3)$ включительно, получаем

$$\begin{aligned} & \epsilon (\ddot{y}_1 + u_1) + \epsilon^2 (\ddot{y}_2 + u_2 + \alpha_2 u_1^2) + \\ & + \epsilon^3 (\ddot{y}_3 + u_3 + 2\alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_3 u_1^3) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих степенях ϵ , имеем набор уравнений

$$\ddot{y}_1 + u_1 = 0, \quad (7.13)$$

$$\ddot{y}_2 + u_2 = -\alpha_2 u_1^2, \quad (7.14)$$

$$\ddot{y}_3 + u_3 = -2\alpha_2 u_1 u_2 - \alpha_3 u_1^3, \quad (7.15)$$

которые могут быть решены последовательно относительно неизвестных u_1 , u_2 и u_3 .

Общее решение (7.13) представим в виде

$$u_1 = a \cos(t + \beta), \quad (7.16)$$

где a и β — постоянные. При этом (7.14) принимает вид

$$\ddot{y}_2 + u_2 = -\alpha_2 a^2 \cos^2(t + \beta) = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta). \quad (7.17)$$

Как и ранее, мы не включаем в выражение для u_2 решение соответствующего однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения (7.17) можно найти как сумму частных решений следующих уравнений:

$$\ddot{y}_2^{(1)} + u_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2, \quad (7.18)$$

$$\ddot{y}_2^{(2)} + u_2^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta). \quad (7.19)$$

Частным решением первого из них будет

$$u_{2\text{частн}}^{(1)} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2, \quad (7.20)$$

а частным решением второго (см. формулы (B.68) и (B.69)) —

$$u_{2\text{частн}}^{(2)} = \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta). \quad (7.21)$$

Таким образом, имеем

$$u_2 = u_{2\text{частн}}^{(1)} + u_{2\text{частн}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta). \quad (7.22)$$

Подстановка выражений (7.16) и (7.22) в уравнение (7.15) дает

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + u_2 = & -2\alpha_2 a \cos(t + \beta) \left[-\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta) \right] - \\ & - \alpha_3 a^3 \cos^3(t + \beta), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + u_2 = & \left(\frac{5}{6} \alpha_2^2 - \frac{3}{4} \alpha_3 \right) a^3 \cos(t + \beta) - \\ & - \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3t + 3\beta). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Поскольку уравнение (7.23) линейно, то

$$u_3 = u_{3\text{частн}}^{(1)} + u_{3\text{частн}}^{(2)}, \quad (7.24)$$

где $u_{3\text{частн}}^{(1)}$ и $u_{3\text{частн}}^{(2)}$ — частные решения уравнений

$$\ddot{u}_3^{(1)} + u_3^{(1)} = \left(\frac{5}{6} \alpha_2^2 - \frac{3}{4} \alpha_3 \right) a^3 \cos(t + \beta), \quad (7.25)$$

$$\ddot{u}_3^{(2)} + u_3^{(2)} = - \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3t + 3\beta). \quad (7.26)$$

При этом из формул (B.69) и (B.76) следует, что

$$u_{3\text{частн}}^{(1)} = \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 t \sin(t + \beta), \quad (7.27)$$

$$u_{3\text{частн}}^{(2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3t + 3\beta). \quad (7.28)$$

Подставляя теперь решения (7.27) и (7.28) в (7.24), находим

$$\begin{aligned} u_3 = & \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 t \sin(t + \beta) + \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3t + 3\beta). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Наконец, подставляя (7.16), (7.22) и (7.29) в (7.10), получаем следующее прямое разложение третьего порядка (с точностью до членов порядка $O(\epsilon^3)$):

$$\begin{aligned} u = & \epsilon a \cos(t + \beta) + \frac{1}{6} \alpha_2 \epsilon^2 a^2 [\cos(2t + 2\beta) - 3] + \\ & + \epsilon^3 a^3 \left[\left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) t \sin(t + \beta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) \cos(3t + 3\beta) \right] + \dots \end{aligned} \quad (7.30)$$

Заметим, что функция u зависит от ϵ и a только через произведение ϵa . Это дает возможность положить $\epsilon = 1$ и рассматривать a в качестве параметра возмущения. Вместе с тем прямое разложение (7.30) становится непригодным при $t \geq O(\epsilon^{-1} a^{-1})$, поскольку при этом второй поправочный член становится величиной одного порядка с первым из-за наличия в нем секулярного слагаемого. Попытаемся теперь преобразовать разложение (7.30) в равномерно пригодное, используя для этого метод перенормировки.

7.2. Метод перенормировки

Как указывалось в § 4.3 и 4.4, равномерно пригодное разложение для решения уравнения (7.9) может быть построено либо с помощью применения методики Линдштедта—Пуанкаре непосредственно к дифференциальному уравнению, либо путем использования метода перенормировки для разложения (7.30). И в том, и в другом случае мы вводим замену $\tau = \omega t$, где ω — «нелинейная» частота в уравнении (7.9). Далее, мы раскладываем ω в ряд по степеням ϵ , причем первый член ряда оказывается частотой линейных колебаний (в нашем случае равной единице). Итак, представим частоту ω в виде разложения

$$\omega = 1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (7.31)$$

Отметим, что в это разложение мы включили только члены второго порядка, поскольку секулярное слагаемое в (7.30) содержится в члене третьего порядка. Далее, имеем

$$\begin{aligned} t = (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)^{-1} \tau = & [1 - (\epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) + \\ & + (\epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots)^2] \tau. \end{aligned}$$

Сохраняя члены порядка $O(\epsilon^2)$, получаем

$$t = \tau - \epsilon \omega_1 \tau + \epsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots \quad (7.32)$$

Подстановка (7.32) в (7.30) дает

$$\begin{aligned}
 u = & \varepsilon a \cos [\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] + \\
 & + \frac{1}{6} \alpha_2 \varepsilon^2 a^2 \{ \cos [2\tau + 2\beta - 2\varepsilon \omega_1 \tau + 2\varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] - 3 \} + \\
 & + \varepsilon^3 a^3 \left\{ \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) [\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] \times \right. \\
 & \times \sin [\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] + \\
 & + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) \times \\
 & \times \cos [3\tau + 3\beta - 3\varepsilon \omega_1 \tau + 3\varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] \left. \right\} + \dots.
 \end{aligned} \quad (7.33)$$

Исследуем теперь разложение (7.33) при малых ε и фиксированном τ . Раскладывая тригонометрические функции в ряды Тейлора, находим

$$\begin{aligned}
 & \cos [\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] = \\
 & = \cos (\tau + \beta) + [\varepsilon \omega_1 \tau - \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau] \sin (\tau + \beta) - \\
 & - \frac{1}{2!} [\varepsilon \omega_1 \tau - \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots]^2 \cos (\tau + \beta) = \\
 & = \cos (\tau + \beta) + \varepsilon \omega_1 \tau \sin (\tau + \beta) - \varepsilon^2 [(\omega_1^2 - \omega_2) \tau \sin (\tau + \beta) + \\
 & + \frac{1}{2} \omega_1^2 \tau^2 \cos (\tau + \beta) + \dots],
 \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned}
 & \cos [2\tau + 2\beta - 2\varepsilon \omega_1 \tau + 2\varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] = \\
 & = \cos (2\tau + 2\beta) + [2\varepsilon \omega_1 \tau - 2\varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau] \sin (2\tau + 2\beta) + \dots = \\
 & = \cos (2\tau + 2\beta) + 2\varepsilon \omega_1 \tau \sin (2\tau + 2\beta) + \dots,
 \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\sin [\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] = \sin (\tau + \beta) + \dots, \quad (7.36)$$

$$\cos [3\tau + 3\beta - 3\varepsilon \omega_1 \tau + 3\varepsilon^2 (\omega_1^2 - \omega_2) \tau + \dots] = \cos (3\tau + 3\beta) + \dots. \quad (7.37)$$

Подставляя выражения (7.34)—(7.37) в (7.33) и сохраняя члены до третьего порядка включительно, получаем

$$\begin{aligned}
 u = & \varepsilon a \cos (\tau + \beta) + \varepsilon^2 [\omega_1 a \tau \sin (\tau + \beta) + \\
 & + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos (2\tau + 2\beta) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2] + \\
 & + \varepsilon^3 \left\{ -\frac{1}{2} \omega_1^2 a \tau^2 \cos (\tau + \beta) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 - a(\omega_1^2 - \omega_2) \right] \tau \sin(\tau + \beta) + \\
& + \frac{1}{3} \alpha_2 \omega_1 a^2 \tau \sin(2\tau + 2\beta) + \\
& + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3\tau + 3\beta) \Big\} + \dots \quad (7.38)
\end{aligned}$$

Для того чтобы избавиться от секулярного члена порядка $O(\epsilon^2)$, необходимо (в случае $a \neq 0$) положить ω_1 равным нулю. При этом исчезают и все секулярные члены третьего порядка, кроме одного, который пропадает при условии

$$\left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^3 + a\omega_2 = 0. \quad (7.39)$$

Отсюда

$$\omega_2 = - \left(\frac{5}{12} \alpha_2^2 - \frac{3}{8} \alpha_3 \right) a^2. \quad (7.40)$$

После уничтожения секулярных членов разложение (7.38) принимает вид

$$u = \epsilon a \cos(\tau + \beta) + \frac{1}{6} \epsilon^2 a^2 \alpha_2 [\cos(2\tau + 2\beta) - 3] + \dots, \quad (7.41)$$

где

$$\tau = \omega t = \left[1 + \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \epsilon^2 a^2 \right] t + \dots \quad (7.42)$$

Отметим, что секулярный член порядка ϵ^3 в (7.38) используется для определения ω_2 . Остальные члены порядка ϵ^3 ограничены при $\tau \rightarrow \infty$; они не включаются в (7.41), поскольку разложение проводится до членов второго порядка, так что ошибка представляет собой величину $O(\epsilon^3)$ для всех $t \leq O(\epsilon^{-1})$. Более подробно этот вопрос обсуждался ранее в § 4.5.

Обращаясь вновь к разложению (7.30), отметим, что первый секулярный член появляется лишь в членах порядка ϵ^3 . Таким образом, еще заранее мы могли бы заключить, что $\omega_1 = 0$, поскольку член $\epsilon \omega_1$ в разложении (7.31) порождает секулярные члены второго, а не третьего порядка. Использование этого факта позволило бы значительно сократить объем вычислений. Покажем теперь, что методика Линдштедта—Пуанкаре требует проведения еще меньшего объема вычислений, чем метод перенормировки.

7.3. Методика Линдштедта—Пуанкаре

Используя в уравнении (7.9) преобразование $\tau = \omega t$, получаем

$$\omega^2 u'' + u + \alpha_2 u^3 + \alpha_3 u^5 = 0, \quad (7.43)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по τ . Далее, раскладываем ω и u в ряды по степеням ε :

$$u = \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \varepsilon^3 u_3(\tau) + \dots, \quad (7.44)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots. \quad (7.45)$$

Как указывалось в предыдущих главах, первый член разложения для ω представляет собой частоту линейных колебаний, в нашем случае равную единице. Подставляя (7.44) и (7.45) в уравнение (7.43), имеем

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 (\varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \varepsilon^3 \ddot{u}_3 + \dots) + \varepsilon u_1 + \\ + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots + \alpha_2 (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)^2 + \\ + \alpha_3 (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)^3 = 0. \end{aligned}$$

Используя биномиальную формулу для разложения квадратичного и кубического членов и сохраняя члены до третьего порядка включительно, находим

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_1^2 + 2\varepsilon^2 \omega_2) (\varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \varepsilon^3 \ddot{u}_3) + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \\ + \alpha_2 (\varepsilon^2 u_1^2 + 2\varepsilon^3 u_1 u_2) + \alpha_3 \varepsilon^3 u_1^3 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Перемножая выражения в скобках и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 0, \quad (7.46)$$

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -2\omega_1 \ddot{u}_1 - \alpha_2 \ddot{u}_1^2, \quad (7.47)$$

$$\ddot{u}_3 + u_3 = -2\omega_1 \ddot{u}_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_2) \ddot{u}_1 - 2\alpha_2 u_1 \ddot{u}_2 - \alpha_3 \ddot{u}_1^3. \quad (7.48)$$

Общее решение уравнения (7.46) может быть представлено как

$$u_1 = a \cos(\tau + \beta), \quad (7.49)$$

где a и β — постоянные. Тогда (7.47) переписывается в виде

$$\ddot{u}_2 + u_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \beta) - \alpha_2 a^2 \cos^2(\tau + \beta),$$

или

$$\ddot{u}_2 + u_2 = 2\omega_1 a \cos(\tau + \beta) - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \cos(2\tau + 3\beta). \quad (7.50)$$

Для того чтобы в решении u_2 отсутствовали секулярные слагаемые, необходимо положить $\omega_1 = 0$. При этом решение (7.50) строится аналогично тому, как это проводилось в § 7.1; оно имеет вид

$$u_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\tau + 2\beta). \quad (7.51)$$

Подставляя решения (7.49) и (7.51) в уравнение (7.48) и учитывая тот факт, что $\omega_1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} u_3'' + u_3 &= 2\omega_2 a \cos(\tau + \beta) - \\ &- 2\alpha_2 a \cos(\tau + \beta) \left[-\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos(2\tau + 2\beta) \right] - \\ &- \alpha_3 a^3 \cos^3(\tau + \beta). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Используя теперь, как и в § 7.1, соответствующие тригонометрические тождества, перепишем (7.52) в виде

$$\begin{aligned} u_3'' + u_3 &= \left(2\omega_2 a - \frac{3}{4} \alpha_3 a^3 + \frac{5}{6} \alpha_2^2 a^3 \right) \cos(\tau + \beta) - \\ &- \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos(3\tau + 3\beta). \end{aligned} \quad (7.53)$$

При этом требование отсутствия секулярных членов приводит к соотношению

$$2\omega_2 a - \frac{3}{4} \alpha_3 a^3 + \frac{5}{6} \alpha_2^2 a^3 = 0,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{3}{8} \alpha_3 a^2 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 a^2. \quad (7.54)$$

Отметим, что подстановка выражений (7.49) и (7.51) в (7.44) приводит к разложению (7.41), а подстановка (7.54) в (7.45) с учетом преобразования $\tau = \omega t$ и соотношения $\omega_1 = 0$ дает (7.42). Таким образом, использование методики Линдштедта—Пуанкаре приводит к тому же самому разложению, что и методика перенормировки, но при заметно меньшем объеме вычислений.

7.4. Метод многих масштабов

В этом параграфе мы построим равномерно пригодное разложение третьего порядка с помощью метода многих масштабов, используя для того три переменные: $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$. При этом для производных по времени получаем

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (7.55)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (7.56)$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$. С помощью (7.56) преобразуем уравнение (7.9) к виду

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + \varepsilon^2 (D_1^2 u + 2D_0 D_2 u) + u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots = 0. \quad (7.57)$$

Приближенное решение уравнения (7.57) будем искать в форме

$$u = \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (7.58)$$

Подставляя разложение (7.58) в (7.57) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , находим

$$D_0^2 u_1 + u_1 = 0, \quad (7.59)$$

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u - \alpha_2 u_1^2, \quad (7.60)$$

$$D_0^2 u_3 + u_3 = -D_1^2 u_1 - 2D_0 D_2 u_1 - 2D_0 D_1 u_2 - 2\alpha_2 u_1 u_2 - \alpha_3 u_1^3. \quad (7.61)$$

Решение уравнения (7.59) может быть представлено как

$$u_1 = A(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (7.62)$$

При этом (7.60) принимает вид

$$D_0^2 u_2 + u_2 = -2iD_1 A e^{iT_0} + 2iD_1 \bar{A} e^{-iT_0} - \alpha_2 (A^2 e^{2iT_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2iT_0}). \quad (7.63)$$

Для того чтобы избавиться от секулярных слагаемых в u_2 , положим

$$D_1 A = 0, \text{ или } A = A(T_2), \quad (7.64)$$

Ограничиваясь, как и в предыдущем параграфе, нахождением лишь частного решения уравнения (7.63), можно получить его с помощью принципа суперпозиции. В результате имеем

$$u_2 = \frac{1}{3} \alpha_2 A^2 e^{2iT_0} + \frac{1}{3} \alpha_2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0} - 2\alpha_2 A\bar{A}. \quad (7.65)$$

Подстановка (7.62), (7.64) и (7.65) в уравнение (7.61) дает

$$D_0^2 u_3 + u_3 = -2iA' e^{iT_0} + 2i\bar{A}' e^{-iT_0} - 2\alpha_2 (A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0}) \times \\ \times \left(\frac{1}{3} \alpha_2 A^2 e^{2iT_0} + \frac{1}{3} \alpha_2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0} - 2\alpha_2 A\bar{A} \right) - \alpha_3 (A e^{iT_0} + \bar{A} e^{-iT_0})^3, \quad (7.66)$$

где штрихом обозначается дифференцирование по переменной T_2 . При выводе (7.66) мы использовали уравнение (7.64), из которого следует, что $D_1 u_1 = D_2 u_2 = 0$. Воспользовавшись биномиальной формулой, перепишем уравнение (7.66) в виде

$$D_0^2 u_3 + u_3 = \left[-2iA' + \frac{10}{3} \alpha_2 A^2 \bar{A} - 3\alpha_3 A^2 \bar{A} \right] e^{iT_0} - \\ - \left(\frac{2}{3} \alpha_2^2 + \alpha_3 \right) A^3 e^{3iT_0} + (\text{к. с.}). \quad (7.67)$$

При этом условие отсутствия секулярных членов приводит к соотношению

$$-2iA' + \left(\frac{10}{3} \alpha_2^2 - 3\alpha_3 \right) A^2 \bar{A} = 0. \quad (7.68)$$

Представляя теперь комплексную амплитуду A в форме

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}, \quad (7.69)$$

где a и β — вещественные постоянные, приведем (7.68) к виду

$$-ia'e^{i\beta} + a\beta'e^{i\beta} + \left(\frac{5}{12}\alpha_2^2 - \frac{3}{8}\alpha_3\right)a^3e^{i\beta} = 0,$$

или,
$$-ia' + a\beta' + \left(\frac{5}{12}\alpha_2^2 - \frac{3}{8}\alpha_3\right)a^3 = 0. \quad (7.70)$$

Отделяя вещественную и мнимую части в равенстве (7.70), имеем

$$a' = 0, \quad (7.71)$$

$$a\beta' = \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2\right)a^3. \quad (7.72)$$

При этом из (7.71) следует, что $a = a_0 = \text{const}$, а из (7.72) (при $a \neq 0$), что

$$\beta = \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2\right)a_0^2 T_2 + \beta_0, \quad (7.73)$$

где β_0 — произвольная постоянная.

Подставляя (7.69) в формулы (7.62) и (7.65) и вспоминая, что $T_0 = t$, получаем

$$u_1 = a \cos(t + \beta), \quad (7.74)$$

$$u_2 = \frac{1}{6}\alpha_2 a^2 \cos(2t + 2\beta) - \frac{1}{2}\alpha_2 a^2. \quad (7.75)$$

Разложение (7.58) в этом случае принимает вид

$$u = \varepsilon a \cos(t + \beta) + \frac{1}{6}\varepsilon^2 a^2 \alpha_2 [\cos(2t + 2\beta) - 3] + \dots \quad (7.76)$$

С помощью формулы (7.74) и с учетом того, что $a = a_0$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$, можно переписать (7.76) в виде

$$u = \varepsilon a_0 \cos(\omega t + \beta_0) + \frac{1}{6}\varepsilon^2 a_0^2 \alpha_2 [\cos(2\omega t + 2\beta_0) - 3] + \dots, \quad (7.77)$$

где
$$\omega = 1 + \left(\frac{3}{8}\alpha_3 - \frac{5}{12}\alpha_2^2\right)\varepsilon^2 a_0^2, \quad (7.78)$$

что полностью согласуется с разложениями (7.41) и (7.42), полученными с помощью метода перенормировки и методики Линдштедта—Пуанкаре. Применим теперь к (7.9) первое приближение метода усреднения.

7.5. Метод усреднения

Как и ранее, для преобразования исходной функции u воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, положив

$$u = ea \cos(t + \beta), \quad (7.79)$$

$$\dot{u} = -ea \sin(t + \beta), \quad (7.80)$$

где e — малый безразмерный параметр, являющийся мерой амплитуды колебаний. При этом для нелинейной задачи величины a и β считаются переменными. Дифференцирование формулы (7.79) по аргументу t дает

$$\dot{u} = -ea \sin(t + \beta) + e\dot{a} \cos(t + \beta) - ea\dot{\beta} \sin(t + \beta). \quad (7.81)$$

Сравнивая (7.80) и (7.81), заключаем, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (7.82)$$

Аналогично, дифференцируя выражение (7.80) по t , имеем

$$\ddot{u} = -ea \cos(t + \beta) - e\dot{a} \sin(t + \beta) - ea\dot{\beta} \cos(t + \beta). \quad (7.83)$$

Подстановка (7.79) и (7.83) в исходное уравнение (7.9) дает

$$\begin{aligned} \dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = \alpha_2 ea^2 \cos^2(t + \beta) + \\ + \alpha_3 e^2 a^3 \cos^3(t + \beta). \end{aligned} \quad (7.84)$$

Разрешая уравнения (7.82) и (7.84) относительно \dot{a} и $\dot{\beta}$, находим

$$\begin{aligned} \dot{a} = \alpha_2 ea^2 \sin(t + \beta) \cos^3(t + \beta) + \alpha_3 e^2 a^3 \sin(t + \beta) \times \\ \times \cos^3(t + \beta), \end{aligned} \quad (7.85)$$

$$\dot{\beta} = \alpha_2 ea \cos^3(t + \beta) + \alpha_3 e^2 a^2 \cos^4(t + \beta). \quad (7.86)$$

Кроме того, при выводе (7.86) предполагается, что a отлично от нуля.

Поскольку a мало, то производные \dot{a} и $\dot{\beta}$ представляют собой медленно меняющиеся функции t . При этом в качестве первого приближения можно попытаться усреднить (7.85) и (7.86) по переменной t . Преобразуя с этой целью уравнения (7.85) и (7.86) с помощью известных тригонометрических формул, получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} = \frac{1}{4} \alpha_2 ea^2 [\sin(t + \beta) + \sin(3t + 3\beta)] + \\ + \frac{1}{8} \alpha_3 e^2 a^3 [2 \sin(2t + 2\beta) + \sin(4t + 4\beta)], \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = \frac{1}{4} \alpha_3 ea [3 \cos(t + \beta) + \cos(3t + 3\beta)] + \\ + \frac{1}{8} \alpha_3 e^2 a^2 [\cos(4t + 4\beta) + 4 \cos(2t + 2\beta) + 3]. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Сохраняя в правых частях уравнений (7.87) и (7.88) только медленно меняющиеся слагаемые, находим окончательно

$$\dot{a} = 0, \quad (7.89)$$

$$\dot{\beta} = \frac{3}{8} \alpha_3 \varepsilon^2 a^2. \quad (7.90)$$

В то время как соотношения (7.89) и (7.71) полностью согласуются между собой, уравнение (7.90) не совпадает с уравнением (7.72), полученным с помощью метода многих масштабов, поскольку в нем отсутствует член $\frac{5}{12} \alpha_2 \varepsilon^2 a^2$. Подробно прослеживая ход решения в предыдущем параграфе, можно обнаружить, что этот член является результатом взаимодействия приближений первого и второго порядков, которое не принималось во внимание при выводе (7.89) и (7.90). Чтобы учесть указанный эффект, нам нужно ввести в рассмотрение высшие приближения для a и β в (7.87) и (7.88). Это достигается с помощью обобщенного метода усреднения, описываемого ниже, или его варианта — метода Крылова—Боголюбова—Митропольского, рассматриваемого в § 7.7.

7.6. Обобщенный метод усреднения

Для того чтобы продемонстрировать применение этого метода, введем новую переменную

$$\varphi = t + \beta, \quad (7.91)$$

переписав соотношения (7.87) и (7.88) в виде

$$\dot{a} = \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a^2 (\sin \varphi + \sin 3\varphi) + \frac{1}{8} \alpha_3 \varepsilon^2 a^3 (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi), \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = 1 + \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \alpha_3 a^2 (\cos 4\varphi + \\ + 4 \cos 2\varphi + 3). \end{aligned} \quad (7.93)$$

Приближенное решение (7.92) и (7.93) будем искать в следующей форме:

$$a = a_0(t) + \varepsilon a_1(a_0, \varphi_0) + \varepsilon^2 a_2(a_0, \varphi_0) + \dots, \quad (7.94)$$

$$\varphi = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(a_0, \varphi_0) + \varepsilon^2 \varphi_2(a_0, \varphi_0) + \dots, \quad (7.95)$$

$$\dot{a}_0 = \varepsilon A_1(a_0) + \varepsilon^2 A_2(a_0) + \dots, \quad (7.96)$$

$$\dot{\varphi}_0 = 1 + \varepsilon \Phi_1(a_0) + \varepsilon^2 \Phi_2(a_0) + \dots. \quad (7.97)$$

Функции a_1, a_2, \dots и $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ представляют собой быстро меняющиеся функции φ_0 , в то время как a_0 и, следовательно, A_n и Φ_n — медленно меняющиеся функции t .

Используя правило дифференцирования сложной функции, представим первые производные выражений (7.94) и (7.95) в виде

$$\dot{a} = \dot{a}_0 + \varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial a_0} \dot{a}_0 + \varepsilon \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} \dot{\varphi}_0 + \varepsilon^2 \frac{\partial a_2}{\partial a_0} \dot{a}_0 + \varepsilon^2 \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_0} \dot{\varphi}_0 + \dots, \quad (7.98)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_0} \dot{a}_0 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \dot{\varphi}_0 + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_0} \dot{a}_0 + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} \dot{\varphi}_0 + \dots \quad (7.99)$$

Подставляя разложения (7.96) и (7.97) в (7.98) и (7.99) и сохраняя члены вплоть до второго порядка, получаем

$$\dot{a} = \varepsilon \left(A_1 + \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} \right) + \varepsilon^2 \left(A_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_0} + A_1 \frac{\partial a_1}{\partial a_0} + \Phi_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} \right) + \dots, \quad (7.100)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = 1 + \varepsilon \left(\Phi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \right) + \varepsilon^2 \left(\Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} + A_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_0} + \right. \\ \left. + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \right) + \dots. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Далее, необходимо подставить разложения (7.94) и (7.95) в (7.92) и (7.93) и разложить правую часть при малых ε , сохраняя члены до второго порядка включительно. При этом для правой части соотношения (7.92) имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon a^2 (\sin \varphi + \sin 3\varphi) = \\ & = \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1)^2 [\sin (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1) + \sin (3\varphi_0 + 3\varepsilon \varphi_1)] + \dots = \\ & = \varepsilon (a_0^2 + 2\varepsilon a_0 a_1) [\sin \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 \cos \varphi_0 + \sin 3\varphi_0 + 3\varepsilon \varphi_1 \cos 3\varphi_0] + \dots = \\ & = \varepsilon a_0^2 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + 2\varepsilon^2 a_0 a_1 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \\ & + \varepsilon^2 a_0^2 \varphi_1 (\cos \varphi_0 + 3 \cos 3\varphi_0) + \dots, \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$\varepsilon^2 a^3 (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) = \varepsilon^2 a_0^3 (2 \sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0) + \dots, \quad (7.103)$$

а для правой части (7.93) —

$$\begin{aligned} \varepsilon a (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) &= \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1) [3 \cos (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1) + \\ &+ \cos (3\varphi_0 + 3\varepsilon \varphi_1)] + \dots = \\ &= \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1) [3 \cos \varphi_0 - 3\varepsilon \varphi_1 \times \\ &\times \sin \varphi_0 + \cos 3\varphi_0 - 3\varepsilon \varphi_1 \sin 3\varphi_0] + \\ &+ \dots = \\ &= \varepsilon a_0 (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0) + \varepsilon^2 a_1 \times \\ &\times (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0) - 3\varepsilon^2 a_0 \varphi_1 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.104)$$

и

$$\varepsilon^2 a^2 (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3) = \varepsilon^2 a_0^2 (\cos 4\varphi_0 + 4 \cos 2\varphi_0 + 3) + \dots \quad (7.105)$$

Подставляя выражения (7.100)—(7.105) в (7.92) и (7.93) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим

$$A_1 + \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{4} \alpha_2 a_0^2 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0), \quad (7.106)$$

$$\begin{aligned} A_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_0} + A_1 \frac{\partial a_1}{\partial a_0} + \Phi_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{2} \alpha_2 a_0 a_1 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \\ + \frac{1}{4} \alpha_2 a_0^2 \varphi_1 (\cos \varphi_0 + 3 \cos 3\varphi_0) + \frac{1}{8} \alpha_3 a_0^3 (2 \sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0), \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$\Phi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{4} \alpha_2 a_0 (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0), \quad (7.108)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} + A_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{4} \alpha_2 a_1 (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0) - \\ - \frac{3}{4} \alpha_2 a_0 \varphi_1 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \frac{1}{8} \alpha_3 a_0^2 (\cos 4\varphi_0 + 4 \cos 2\varphi_0 + 3). \end{aligned} \quad (7.109)$$

Для того чтобы выделить быстро и медленно меняющиеся члены в формулах (7.106)—(7.109), используем метод разделения переменных. При этом для медленно меняющихся членов в (7.106) и (7.108) имеем

$$A_1 = \Phi_1 = 0. \quad (7.110)$$

Аналогично, для быстро меняющихся членов получаем

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{4} \alpha_2 a_0^2 (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0), \quad (7.111)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{4} \alpha_2 a_0 (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0). \quad (7.112)$$

Частные решения уравнений (7.111) и (7.112) имеют вид

$$a_1 = -\frac{1}{4} \alpha_2 a_0^2 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) \quad (7.113)$$

и

$$\varphi_1 = \frac{1}{4} \alpha_2 a_0 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right). \quad (7.114)$$

Подставляя теперь выражения (7.110), (7.113) и (7.114) в уравнения (7.107) и (7.109), находим

$$\begin{aligned} A_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_0} = & -\frac{1}{8} \alpha_2^2 a_0^3 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \\ & + \frac{1}{16} \alpha_2^2 a_0^3 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right) (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \\ & + \frac{1}{8} \alpha_3 a_0^3 (2 \sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0), \end{aligned} \quad (7.115)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} = & -\frac{1}{16} \alpha_2^2 a_0^2 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) (3 \cos \varphi_0 + \cos 3\varphi_0) - \\ & - \frac{3}{16} \alpha_2^2 a_0^2 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right) (\sin \varphi_0 + \sin 3\varphi_0) + \\ & + \frac{1}{8} \alpha_3 a_0^2 (\cos 4\varphi_0 + 4 \cos 2\varphi_0 + 3). \end{aligned} \quad (7.116)$$

С помощью известных тригонометрических формул (см. приложение А) перепишем соотношения (7.115) и (7.116) в виде

$$\begin{aligned} A_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_0} = & \frac{1}{16} a_0^3 \left[\left(4\alpha_3 - \frac{9}{2} \alpha_2^2 \right) \sin 2\varphi_0 + \right. \\ & \left. + \left(2\alpha_3 + \frac{10}{3} \alpha_2^2 \right) \sin \varphi_0 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \sin 6\varphi_0 \right], \end{aligned} \quad (7.117)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} = & \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) a_0^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_3 - \frac{3}{16} \alpha_2^2 \right) a_0^2 \cos 2\varphi_0 + \\ & + \left(\frac{1}{8} \alpha_3 + \frac{1}{4} \alpha_2^2 \right) a_0^2 \cos 4\varphi_0 + \frac{1}{48} \alpha_2^2 a_0^2 \cos 6\varphi_0. \end{aligned} \quad (7.118)$$

Поскольку мы разыскиваем только разложение второго порядка, нет необходимости решать уравнения (7.117) и (7.118) относительно a_2 и φ_2 . Для этого требуется только выделить в (7.117) и (7.118) медленно меняющиеся слагаемые и тем самым определить A_1 и Φ_1 , которые в этом случае имеют вид

$$A_1 = 0, \quad (7.119)$$

$$\Phi_1 = \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) a_0^2. \quad (7.120)$$

Подстановка выражений (7.113) и (7.114) в (7.94) и (7.95) дает

$$a = a_0 - \frac{1}{4} \alpha_2 a_0^2 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) + \dots, \quad (7.121)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{4} \alpha_2 a_0 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right) + \dots \quad (7.122)$$

Подставляя теперь выражения (7.110), (7.119) и (7.120) в (7.96) и (7.97), получаем

$$\dot{a}_0 = 0, \quad (7.123)$$

$$\dot{\varphi}_0 = 1 + \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \varepsilon^2 a_0^2. \quad (7.124)$$

Решение (7.123) имеет вид $a_0 = \text{const}$; при этом из уравнения (7.124) следует

$$\varphi_0 = t + \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \varepsilon^2 a_0^2 t + \beta_0, \quad (7.125)$$

где β_0 — постоянная интегрирования. Наконец, подстановка разложений (7.121) и (7.122) в (7.79) дает

$$u = \varepsilon \left[a_0 - \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a_0^2 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) + \dots \right] \times \\ \times \cos \left[\varphi_0 + \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a_0 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right) + \dots \right]. \quad (7.126)$$

Для того чтобы сравнить построенное решение с приближенными решениями, полученными по методу многих масштабов и с помощью методики Линдштедта—Пуанкаре, нужно разложить $\cos [\varphi_0 + O(\varepsilon)]$ в (7.126) при малых ε с точностью до членов порядка ε , в результате чего получим

$$u = \varepsilon \left[a_0 - \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a_0^2 \left(\cos \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 3\varphi_0 \right) \right] \left[\cos \varphi_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon a_0 \sin \varphi_0 \left(3 \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi_0 \right) \right] + \dots = \\ = \varepsilon a_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon^2 a_0^2 \left[\cos^2 \varphi_0 + \frac{1}{3} \cos \varphi_0 \cos 3\varphi_0 + \right. \\ \left. + 3 \sin^2 \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin \varphi_0 \sin 3\varphi_0 \right] + \dots = \\ = \varepsilon a_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{4} \alpha_2 \varepsilon^2 a_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi_0 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi_0 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\varphi_0 \right] + \dots,$$

или

$$u = \varepsilon a_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 a_0^2 \alpha_2 (\cos 2\varphi_0 - 3) + \dots \quad (7.127)$$

Разложение, даваемое формулами (7.125) и (7.127), в точности совпадает с разложениями (7.77) и (7.78), полученными по методу многих масштабов. Оценка же объема вычислений, проделанных здесь, и вычислений, проведенных в § 7.2 и 7.4, позволяет сделать вывод, что метод перенормировки и метод многих масштабов имеют в этом отношении преимущество перед обобщенным методом усреднения.

7.7. Метод Крылова—Боголюбова—Митропольского

В этом параграфе мы опишем еще один вариант обобщенного метода усреднения, называемый обычно асимптотическим методом Крылова—Боголюбова—Митропольского.

Если пренебречь нелинейными членами, то решение уравнения (7.9) можно записать в виде

$$u = \varepsilon a \cos(t + \beta), \quad (7.128)$$

где a и β — некоторые постоянные, а ε — малый безразмерный параметр, определяющий амплитуду колебаний. При учете же нелинейных членов мы рассматриваем (7.128) лишь как первый член в приближенном решении (7.9), причем a и β считаются теперь не постоянными, а медленно меняющимися функциями времени. Кроме того, введем так называемую быструю переменную $\varphi = t + \beta$. В результате будем искать приближенное решение уравнения (7.9) в виде

$$u = \varepsilon a \cos \varphi + \varepsilon^2 u_2(a, \varphi) + \varepsilon^3 u_3(a, \varphi) + \dots \quad (7.129)$$

Поскольку a и β представляют собой медленно меняющиеся функции t , представим их рядами по степеням ε с коэффициентами, зависящими от «медленной» переменной a . Таким образом, мы можем записать

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad (7.130)$$

$$\dot{\varphi} = 1 + \varepsilon \Phi_1(a) + \varepsilon^2 \Phi_2(a) + \dots \quad (7.131)$$

Иначе говоря, этот метод можно рассматривать как многомасштабную процедуру с выбранными масштабами времени a и φ .

С помощью правила дифференцирования сложной функции выразим производные по t через новые независимые переменные a и φ :

$$\frac{d}{dt} = \dot{a} \frac{\partial}{\partial a} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (7.132)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \dot{a}^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \ddot{a} \frac{\partial}{\partial a} + 2\dot{a}\dot{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \dot{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \ddot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (7.133)$$

При этом дифференцирование (7.130) по t дает

$$\ddot{a} = \varepsilon A_1' \dot{a} + \varepsilon^2 A_2' \dot{a} + \dots, \quad (7.134)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по a . Подставляя теперь (7.130) в соотношение (7.134), имеем

$$\ddot{a} = \varepsilon A_1' (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) + \varepsilon^2 A_2' (\varepsilon A_1 + \dots) + \dots,$$

или

$$\ddot{a} = \varepsilon^2 A_1 A_1' + O(\varepsilon^3). \quad (7.135)$$

Аналогично, дифференцирование (7.131) по t дает

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon \Phi_1' \dot{a} + \varepsilon^2 \Phi_2' \dot{a} + \dots \quad (7.136)$$

Подставляя (7.130) в (7.136), имеем

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon \Phi_1'(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) + \varepsilon^2 \Phi_2'(\varepsilon A_1 + \dots) + \dots,$$

или

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon^2 A_1 \Phi_1' + O(\varepsilon^3). \quad (7.137)$$

Наконец, подставляя (7.130), (7.131), (7.135) и (7.137) в формулы (7.132) и (7.133), находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial a} + (1 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + (\varepsilon^2 A_1 A_1' + \dots) \frac{\partial}{\partial a} + \\ &\quad + 2(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)(1 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \\ &\quad + (1 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varepsilon^2 A_1' \Phi_1' + \dots \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon \left(A_1 \frac{\partial}{\partial a} + \Phi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left(A_2 \frac{\partial}{\partial a} + \Phi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (7.138)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2\varepsilon \left(\Phi_1 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} \right) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[(\Phi_1^2 + 2\Phi_2) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2(A_2 + A_1 \Phi_1) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + A_1^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + A_1 A_1' \frac{d}{da} + A_1 \Phi_1' \frac{d}{d\varphi} \right] + \dots. \end{aligned} \quad (7.139)$$

При этом уравнение (7.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2\varepsilon \left[\Phi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial \varphi} \right] + \varepsilon^2 \left[(\Phi_1^2 + 2\Phi_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2(A_2 + \right. \\ \left. + A_1 \Phi_1) \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial \varphi} + A_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + A_1 A_1' \frac{\partial u}{\partial a} + A_1 \Phi_1' \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + u + \alpha_2 u^2 + \\ + \alpha_3 u^3 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (7.140)$$

Подставляя разложение (7.129) в уравнение (7.140) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + u_2 - 2\Phi_1 a \cos \varphi - 2A_1 \sin \varphi + \alpha_2 a^2 \cos^2 \varphi = 0, \quad (7.141)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + u_3 + 2\Phi_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \varphi} - (\Phi_1^2 + 2\Phi_2) a \cos \varphi - \\ - 2(A_2 + A_1 \Phi_1) \sin \varphi + A_1 A_1' \cos \varphi - A_1 \Phi_1' a \sin \varphi + \\ + 2\alpha_2 u_2 a \cos \varphi + \alpha_3 a^3 \cos^3 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.142)$$

Далее, с помощью тригонометрического тождества (A13) перепишем (7.141) в виде

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + u_2 = 2\Phi_1 a \cos \varphi + 2A_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \cos 2\varphi. \quad (7.143)$$

Для того чтобы исключить секулярные члены из решения u_2 , потребуем, чтобы

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = 0. \quad (7.144)$$

Тогда, как и ранее, решение (7.143) может быть представлено в виде

$$u_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos 2\varphi. \quad (7.145)$$

Подстановка (7.144) и (7.145) в уравнение (7.142) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + u_3 = & 2\Phi_2 a \cos \varphi + 2A_2 \sin \varphi - 2\alpha_2 a \cos \varphi \times \\ & \times \left[-\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 + \frac{1}{6} \alpha_2 a^2 \cos 2\varphi \right] - \alpha_2 a^3 \cos^3 \varphi. \end{aligned} \quad (7.146)$$

С помощью соответствующих тригонометрических формул (см. приложение А) перепишем теперь (7.146) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varphi^2} + u_3 = & \left(2\Phi_2 - \frac{3}{4} \alpha_2 a^2 + \frac{5}{6} \alpha_2^2 a^2 \right) a \cos \varphi + 2A_2 \sin \varphi - \\ & - \left(\frac{1}{4} \alpha_3 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 \right) a^3 \cos 3\varphi. \end{aligned} \quad (7.147)$$

Условие отсутствия секулярных членов в решении u_3 дает

$$A_2 = 0, \quad \Phi_2 = \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) a^2. \quad (7.148)$$

Наконец, подстановка (7.144) и (7.148) в разложения (7.130) и (7.131) приводит к уравнениям

$$\dot{a} = 0, \quad (7.149)$$

$$\dot{\varphi} = 1 + \left(\frac{3}{8} \alpha_3 - \frac{5}{12} \alpha_2^2 \right) \varepsilon^2 a^2 + \dots, \quad (7.150)$$

которые полностью совпадают с уравнениями (7.123) и (7.124), полученными с помощью обобщенного метода усреднения, а следовательно, и с решением, построенным по методу многих масштабов.

Упражнения

7.1. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{x} - 2x - x^2 + x^3 = 0.$$

Показать, что положения равновесия системы, описываемой этим уравнением, определяются координатами $x = 0, -1, 2$. Положить $x = 2 + u$ и найти уравнение для функции u . Затем построить равномерно пригодное разложение второго порядка при малых, но конечных амплитудах с помощью:

- а) метода Линдштедта—Пуанкаре,
- б) метода многих масштабов,
- в) обобщенного метода усреднения.

7.2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{y} - u + u^3 = 0.$$

Показать, что точка $u = 1$ является положением равновесия системы. Построить равномерно пригодное разложение второго порядка, описывающее малые колебания около точки $u = 1$. *Указание:* положить $u = 1 + x$, получить уравнение относительно x и затем использовать либо метод Линдштедта—Пуанкаре, либо метод многих масштабов, либо обобщенный метод усреднения.

7.3. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{y} - u + u^6 = 0.$$

Показать, что точка $u = 1$ является положением равновесия данной системы. Найти разложение второго порядка для малых, но конечных колебаний вблизи точки $u = 1$.

7.4. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{x} + x - \frac{3}{16(1-x)} = 0.$$

Показать, что положения равновесия описываемой системы определяются координатами $x = 1/4$ и $x = 3/4$. Изучить характер движения около этих положений равновесия. Построить разложения второго порядка для решения в окрестности устойчивого положения равновесия (т. е. соответствующего колебательным движениям).

7.5. Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения

$$\ddot{y} + u + \varepsilon^2 u^3 + \varepsilon \dot{y}^2 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

7.6. Найти равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения

$$\ddot{y} + u + \varepsilon u^3 + \varepsilon \dot{y}^2 = 0 \quad (\varepsilon \ll 1).$$

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

В этой главе мы рассмотрим системы с одной степенью свободы, движущиеся под действием произвольных нелинейных сил. Иначе говоря, будем исследовать уравнение

$$\ddot{u} + u = \varepsilon f(u, \dot{u}), \quad (8.1)$$

где ε — малый безразмерный параметр, точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени t и u — безразмерная зависимая переменная. В этой главе, не ограничиваясь случаем, когда $f(u, \dot{u})$ является аналитической функцией своих аргументов, мы будем предполагать, что она представляет собой произвольную кусочно-непрерывную функцию. При этом уравнения, рассмотренные в четырех предшествующих главах, оказываются частными случаями уравнения (8.1).

Как и ранее, начнем с построения прямого разложения первого порядка и обсудим вопрос о его неравномерности. В § 8.2 полученное прямое разложение преобразуется в равномерное с помощью метода перенормировки. В § 8.3 и 8.4 мы используем соответственно метод многих масштабов и метод усреднения. Наконец, в § 8.5 полученные результаты распространяются на случай неаналитических функций f , а также применяются для описания некоторых систем, рассмотренных в предыдущих главах.

8.1. Прямое разложение

Как и в предыдущих главах, будем искать разложение первого порядка в виде

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (8.2)$$

Подстановка (8.2) в уравнение (8.1) дает

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots = \varepsilon f[u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \dot{u}_0 + \\ + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots] = \varepsilon f(u_0, \dot{u}_0) + \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

Приравнявая коэффициенты при ε^0 и ε^1 в обеих частях соотношения (8.1), получаем

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (8.4)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = f(u_0, \dot{u}_0). \quad (8.5)$$

Общее решение уравнения (8.4) можно записать в виде

$$u_0 = a \cos(t + \beta), \quad (8.6)$$

где a и β — произвольные постоянные. При этом уравнение (8.5) принимает вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 = f[a \cos(t + \beta), -a \sin(t + \beta)]. \quad (8.7)$$

Чтобы найти частное решение уравнения (8.7), правую часть этого уравнения удобно представить в виде ряда Фурье. Заметим, что правая часть (8.7) является периодической функцией с периодом 2π . Следовательно, ее ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} & f[a \cos(t + \beta), -a \sin(t + \beta)] = \\ & = f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos(nt + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin(nt + n\beta), \end{aligned} \quad (8.8)$$

где

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) d\varphi, \quad (8.9)$$

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (8.10)$$

$$g_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (8.11)$$

С помощью разложения (8.8) уравнение (8.7) можно переписать как

$$\ddot{u}_1 + u_1 = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(nt + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin(nt + n\beta). \quad (8.12)$$

Поскольку уравнение (8.12) линейно, мы можем использовать принцип суперпозиции и найти частное решение в виде суммы частных решений, соответствующих отдельным слагаемым в правой части. Из формул (Б.69), (Б.76), (Б.78) и (Б.82) (см. приложение Б) следует, что частным решением уравнения (8.12) будет

$$\begin{aligned} u_1 = & f_0 + \frac{1}{2} f_1 t \sin(t + \beta) - \frac{1}{2} g_1 t \cos(t + \beta) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [f_n \cos(nt + n\beta) + g_n \sin(nt + n\beta)]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Как и ранее, мы не включаем в u_1 общее решение однородного уравнения. Подстановка выражений (8.6) и (8.13) в (8.2) дает

$$u = a \cos(t + \beta) + \varepsilon \left\{ f_0 + \frac{1}{2} f_1 t \sin(t + \beta) - \frac{1}{2} g_1 t \cos(t + \beta) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [f_n \cos(nt + n\beta) + g_n \sin(nt + n\beta)] \right\} + \dots \quad (8.14)$$

Отметим, что прямое разложение (8.14) становится непригодным при $t \geq 0$ (ε^{-1}) из-за наличия секулярных членов. Ниже мы преобразуем это прямое разложение в равномерное с помощью метода перенормировки.

8.2. Метод перенормировки

Чтобы сделать разложение (8.14) равномерно пригодным, используем замену переменных

$$\tau = \omega t, \quad \omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (8.15)$$

Тогда

$$t = \omega^{-1} \tau = \tau (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^{-1} = (1 - \varepsilon \omega_1) \tau + \dots \quad (8.16)$$

Подстановка соотношения (8.16) в (8.14) дает

$$u = a \cos(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \varepsilon \left\{ f_0 + \frac{1}{2} f_1 (\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \times \right. \\ \times \sin(\tau + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) - \frac{1}{2} g_1 (\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \cos(\tau + \\ \left. + \beta - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [f_n \cos(n\tau + n\beta - \varepsilon \omega_1 n\tau + \dots) + \right. \\ \left. + g_n \sin(n\tau + n\beta - \varepsilon \omega_1 n\tau + \dots)] \right\} + \dots \quad (8.17)$$

Используя разложения

$$\begin{aligned} \cos(n\tau + n\beta - \varepsilon \omega_1 n\tau + \dots) &= \\ &= \cos(n\tau + n\beta) + \varepsilon \omega_1 n\tau \sin(n\tau + n\beta) + \dots, \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \sin(n\tau + n\beta - \varepsilon \omega_1 n\tau + \dots) &= \\ &= \sin(n\tau + n\beta) - \varepsilon \omega_1 n\tau \cos(n\tau + n\beta) + \dots, \end{aligned} \quad (8.19)$$

перепишем (8.17) в виде

$$u = a \cos(\tau + \beta) + \varepsilon \left\{ f_0 + \left(\frac{1}{2} f_1 + \omega_1 a \right) \tau \sin(\tau + \beta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_1 \tau \cos(\tau + \beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [f_n \cos(n\tau + n\beta) + \right. \\ \left. + g_n \sin(n\tau + n\beta)] \right\} + \dots \quad (8.20)$$

Требование отсутствия вековых членов в (8.20) дает

$$\omega_1 a + \frac{1}{2} f_1(a) = 0, \quad (8.21)$$

$$g_1(a) = 0. \quad (8.22)$$

Из уравнения (8.22) можно найти те значения амплитуды a , при которых существуют периодические решения. При этом из соотношений (8.15) и (8.21) следует, что указанные периодические решения имеют частоты

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon}{2a} f_1(a) + \dots \quad (8.23)$$

С помощью формул (8.10) и (8.11) переписываем соотношения (8.22) и (8.23) для периодических решений в виде

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (8.24)$$

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi + \dots \quad (8.25)$$

В частности, для уравнения Дюффинга (4.7) $f = -u^3$, и соотношения (8.24) и (8.25) принимают вид

$$\int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (8.26)$$

$$\omega = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^4 \varphi d\varphi + \dots = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + \dots; \quad (8.27)$$

при этом интегралы в (8.26) и (8.27) вычисляются по формулам (А.31) и (А.37) приложения А. Отметим, что условие (8.26) выполняется при произвольной амплитуде a . Что же касается соотношения (8.27), то оно полностью совпадает с (4.80).

В уравнении Рэлея (6.4) $f = \dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3$, и соотношения (8.24) и (8.25) принимают вид

$$\int_0^{2\pi} \left(-a \sin \varphi + \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = 0,$$

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \left(-a \sin \varphi + \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi + \dots$$

Вычисляя интегралы с помощью формулы (A.32), имеем

$$-a + \frac{1}{4} a^3 = 0, \quad (8.28)$$

$$\omega = 1 + O(\varepsilon^2), \quad (8.29)$$

что полностью совпадает с соответствующими выражениями (6.27) и (6.28).

8.3. Метод многих масштабов

Для построения равномерно пригодного разложения первого порядка методом многих масштабов введем вместо переменной t две новые переменные: $T_0 = t$ и $T_1 = \varepsilon t$. Тогда производные по t примут вид

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots,$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$. Таким образом, уравнение (8.1) перейдет в уравнение вида

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + \dots + u = \varepsilon f[u, D_0 u + \varepsilon D_1 u + \dots]. \quad (8.30)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (8.30) в форме

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (8.31)$$

Подстановка разложения (8.31) в уравнение (8.30) дает

$$\begin{aligned} D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots = \\ = \varepsilon f[u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, D_0 u_0 + \varepsilon D_1 u_0 + \varepsilon D_0 u_1 + \dots] = \\ = \varepsilon f(u_0, D_0 u_0) + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этого уравнения, получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (8.32)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + f(u_0, D_0 u_0). \quad (8.33)$$

Для того чтобы иметь возможность использовать ряды Фурье (8.8), общее решение уравнения (8.32) удобно представить в действительной форме

$$u_0 = a \cos (T_0 + \beta). \quad (8.34)$$

При этом

$$D_0 u_0 = -a \sin (T_0 + \beta),$$

$$D_1 D_0 u_0 = -a' \sin (T_0 + \beta) - a\beta' \cos (T_0 + \beta),$$

а уравнение (8.33) принимает вид

$$D_1^2 u_1 + u_1 = 2a' \sin (T_0 + \beta) + 2a\beta' \cos (T_0 + \beta) + f[a \cos (T_0 + \beta), -a \sin (T_0 + \beta)]. \quad (8.35)$$

Используя представление функции f в виде ряда Фурье (8.8), перепишем уравнение (8.35) следующим образом:

$$D_1^2 u_1 + u_1 = 2a' \sin (T_0 + \beta) + 2a\beta' \cos (T_0 + \beta) + f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos (nT_0 + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin (nT_0 + n\beta). \quad (8.36)$$

Для того чтобы в решении u_1 отсутствовали секулярные слагаемые, необходимо выполнение условий

$$2a' + g_1(a) = 0, \quad (8.37)$$

$$2a\beta' + f_1(a) = 0. \quad (8.38)$$

Подстановка выражений (8.10) и (8.11) в условия (8.37) и (8.38) приводит к соотношениям

$$a' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (8.39)$$

$$a\beta' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (8.40)$$

Подставляя теперь (8.34) в разложение (8.31) и полагая $T_0 = t$, находим, что в первом приближении решение имеет вид

$$u = a \cos (t + \beta) + \dots, \quad (8.41)$$

где a и β даются формулами (8.39) и (8.40). В § 8.5 мы применим полученное приближенное решение (8.41) к ряду частных случаев, а в следующем параграфе выведем формулы (8.39)—(8.41) с помощью метода усреднения.

8.4. Метод усреднения

Прежде всего в соответствии с идеей вариации произвольных постоянных мы должны совершить переход от искомой функции u к новым переменным — амплитуде a и фазе β :

$$u(t) = a(t) \cos [t + \beta(t)] \quad (8.42)$$

так, чтобы выполнялось равенство

$$\dot{u}(t) = -a(t) \sin [t + \beta(t)], \quad (8.43)$$

т. е. чтобы u и \dot{u} имели тот же вид, что и в невозмущенном случае, когда $\varepsilon = 0$. Дифференцируя формулу (8.42) по t , получаем

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -a \sin (t + \beta) + \dot{a} \cos (t + \beta) - \\ & - a\dot{\beta} \sin (t + \beta). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Из сравнения выражений (8.43) и (8.44) можно заключить, что

$$\dot{a} \cos (t + \beta) - a\dot{\beta} \sin (t + \beta) = 0. \quad (8.45)$$

Дифференцируя еще раз по t соотношение (8.43), имеем

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & -a \cos (t + \beta) - \dot{a} \sin (t + \beta) - \\ & - a\ddot{\beta} \cos (t + \beta). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Подстановка (8.42), (8.43) и (8.46) в уравнение (8.1) дает

$$\begin{aligned} & \dot{a} \sin (t + \beta) + a\dot{\beta} \cos (t + \beta) = \\ & = -\varepsilon f [a \cos (t + \beta), -a \sin (t + \beta)]. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Умножая соотношения (8.45) и (8.47) на $\cos (t + \beta)$ и $\sin (t + \beta)$ соответственно и складывая полученные результаты, находим

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\varepsilon \sin (t + \beta) f [a \cos (t + \beta), \\ & -a \sin (t + \beta)]. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Далее, подставляя (8.48) в соотношение (8.45) и разрешая его относительно величины $a\dot{\beta}$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & -\varepsilon \cos (t + \beta) f [a \cos (t + \beta), \\ & -a \sin (t + \beta)]. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Заменяя функцию f ее рядом Фурье (8.8), перепишем теперь уравнения (8.48) и (8.49) в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\varepsilon \sin (t + \beta) \left[f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos (nt + n\beta) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin (nt + n\beta) \right], \end{aligned} \quad (8.50)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & -\varepsilon \cos (t + \beta) \left[f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \cos (nt + n\beta) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin (nt + n\beta) \right]. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Используя известные тригонометрические формулы, преобразуем уравнения (8.50) и (8.51) к виду

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\varepsilon f_0(a) \sin(t + \beta) - \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \{ \sin[(n+1)t + (n+1)\beta] - \\ & - \sin[(n-1)t + (n-1)\beta] \} - \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \{ \cos[(n-1)t + \\ & + (n-1)\beta] - \cos[(n+1)t + (n+1)\beta] \}, \end{aligned} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & -\varepsilon f_0(a) \cos(t + \beta) - \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \{ \cos[(n+1)t + (n+1)\beta] + \\ & + \cos[(n-1)t + (n-1)\beta] \} - \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \{ \sin[(n+1)t + \\ & + (n+1)\beta] + \sin[(n-1)t + (n-1)\beta] \}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Как и в предыдущих случаях, в первом приближении мы сохраняем только медленно меняющиеся слагаемые в правых частях (8.52) и (8.53). Эти слагаемые представляют собой члены, явно не зависящие от t . Таким образом,

$$\dot{a} = -\frac{1}{2} \varepsilon g_1(a), \quad (8.54)$$

$$a\dot{\beta} = -\frac{1}{2} \varepsilon f_1(a), \quad (8.55)$$

что полностью соответствует формулам (8.39) и (8.40), полученным с помощью метода многих масштабов.

8.5. Приложения

В качестве первого приложения рассмотрим уравнение Дюффинга (4.7). В этом случае $f = -u^3$, и формулы (8.39) и (8.40) принимают вид

$$a' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (8.56)$$

$$a\beta' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} a^3; \quad (8.57)$$

точно такой же результат был получен нами в гл. 4. Интегрирование уравнений (8.56) и (8.57), как и других аналогичных соот-

ношений, рассматриваемых в этом параграфе, осуществляется с помощью соответствующих формул, представленных в § А.3 приложения А.

В качестве второго примера рассмотрим линейный осциллятор с затуханием, описываемый уравнением (5.2). В этом случае $f = -2\dot{u}$, и формулы (8.39) и (8.40) принимают вид

$$a' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2a \sin^2 \varphi d\varphi = -a, \quad (8.58)$$

$$a\beta' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (8.59)$$

что полностью согласуется с соответствующим приближением первого порядка, полученным в гл. 5.

Рассмотрим теперь уравнение Рэля (6.4). В этом случае $f = \dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3$, и уравнения (8.39) и (8.40) принимают вид

$$a' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-a \sin \varphi + \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} a - \frac{1}{8} a^3, \quad (8.60)$$

$$a\beta' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-a \sin \varphi + \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (8.61)$$

т. е. мы сразу приходим к результату, полученному в гл. 6.

В качестве четвертого приложения рассмотрим уравнение (7.9). Это уравнение не содержит малого параметра явно. Вводя его с помощью соотношения $u = \varepsilon v$, получаем

$$\ddot{v} + v + \varepsilon \alpha_2 v^3 + \varepsilon^2 \alpha_3 v^5 = 0. \quad (8.62)$$

Таким образом, $f = -\alpha_2 v^3$, и система уравнений (8.39), (8.40) приобретает вид

$$a' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_2 a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (8.63)$$

$$a\beta' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_2 a^3 \cos^3 \varphi d\varphi = 0. \quad (8.64)$$

Аналогичный результат мы имели в гл. 7. Отметим, что влияние нелинейности на амплитуду и фазу в данном случае сказывается лишь во втором приближении.

В следующих двух примерах обратимся к рассмотрению неаналитических функций \dot{f} . В первом случае исследуем уравнение

$$\ddot{u} + u = -\varepsilon \dot{u} |\dot{u}|. \quad (8.65)$$

При этом $\dot{f} = -\dot{u} |\dot{u}|$, и система уравнений (8.39), (8.40) записывается в форме

$$a' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 \varphi |\sin \varphi| d\varphi, \quad (8.66)$$

$$a\beta' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sin \varphi \cos \varphi |\sin \varphi| d\varphi. \quad (8.67)$$

Для того чтобы выполнить интегрирование в (8.66) и (8.67), заметим, что $\sin \varphi \geq 0$ при $0 < \varphi < \pi$ и $\sin \varphi < 0$ при $\pi < \varphi < 2\pi$. Следовательно, в первом промежутке $|\sin \varphi| = \sin \varphi$, а во втором $|\sin \varphi| = -\sin \varphi$. Поэтому промежуток интегрирования в интегралах (8.66) и (8.67) мы разобьем на два, заменяя $|\sin \varphi|$ соответственно на $\sin \varphi$ и $-\sin \varphi$. Тогда уравнение (8.66) переписется в виде

$$\begin{aligned} a' &= -\frac{a^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi + \frac{a^2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{a^2}{8\pi} \int_0^{\pi} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) d\varphi + \frac{a^2}{8\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{8\pi} \left(3 \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos 3\varphi \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{a^2}{8\pi} \left(3 \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos 3\varphi \right) \Big|_{\pi}^{2\pi}, \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad a' = -\frac{4}{3\pi} a^2. \quad (8.68)$$

Аналогичным образом, уравнение (8.67) представим как

$$\begin{aligned} a\beta' &= -\frac{a^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{a^2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{a^2}{6\pi} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{6\pi} \sin^3 \varphi \Big|_{\pi}^{2\pi}, \end{aligned}$$

$$\text{или} \quad a\beta' = 0. \quad (8.69)$$

Из уравнения (8.69) имеем $\beta = \beta_0$, где β_0 — произвольная постоянная. Уравнение (8.68) интегрируется с помощью разделения переменных:

$$-\frac{da}{a^3} = \frac{4}{3\pi} dT_1, \quad (8.70)$$

откуда
$$\frac{1}{a} + c = \frac{4}{3\pi} T_1 = \frac{4}{3\pi} \varepsilon t, \quad (8.71)$$

где c — постоянная интегрирования. В случае если $a(0) = a_0$, имеем $c = -1/a_0$, и соотношение (8.71) принимает вид

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} + \frac{4}{3\pi} \varepsilon t,$$

откуда
$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{4}{3\pi} \varepsilon t a_0}. \quad (8.72)$$

В заключение рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + u = -\varepsilon u |u|. \quad (8.73)$$

В этом случае $f = -u |u|$, и уравнения (8.39) и (8.40) принимают вид

$$a' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \cos \varphi |\cos \varphi| \sin \varphi d\varphi, \quad (8.74)$$

$$a\beta' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \varphi |\cos \varphi| d\varphi. \quad (8.75)$$

Заметим, что $\cos \varphi \geq 0$ при $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ и $\cos \varphi < 0$ при $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Так как подынтегральные функции в (8.74) и (8.75) периодичны с периодом 2π , то значения интегралов не меняются при сдвиге промежутка интегрирования. Поэтому мы можем заменить промежуток интегрирования $[0, 2\pi]$ на промежуток $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ и разбить этот новый промежуток на два, заменяя $|\cos \varphi|$ в первом случае на $\cos \varphi$, а во втором на $-\cos \varphi$. Таким образом, уравнение (8.74) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a^3}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi - \frac{a^3}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{a^3}{6\pi} \cos^3 \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{a^3}{6\pi} \cos^3 \varphi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}, \end{aligned}$$

или

$$a' = 0. \quad (8.76)$$

Действуя аналогичным образом, уравнение (8.75) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a\beta' &= \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi - \frac{a^2}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) d\varphi - \frac{a^2}{8\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{8\pi} \left(3 \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{a^2}{8\pi} \left(3 \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi \right) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}, \\ \text{или} \quad a\beta' &= \frac{4}{3\pi} a^2. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Решением уравнения (8.76) будет $a = a_0 = \text{const}$. При этом если $a_0 \neq 0$, то из уравнения (8.77) имеем

$$\beta = \frac{4}{3\pi} a_0 T_1 + \beta_0 = \frac{4}{3\pi} \varepsilon t a_0 + \beta_0, \quad (8.78)$$

где β_0 — произвольная постоянная. Тогда из формулы (8.41) следует, что в первом приближении

$$u = a_0 \cos \left[\left(1 + \frac{4}{3\pi} \varepsilon a_0 \right) t + \beta_0 \right] + \dots \quad (8.79)$$

Приведенные примеры показывают, что метод многих масштабов и метод усреднения могут эффективно использоваться для построения равномерно пригодных разложений первого порядка в случае слабо нелинейных колебательных систем.

Упражнения

8.1. Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для решений следующих уравнений:

а) $\ddot{u} + u + \varepsilon u |u| = 0$,

б) $\ddot{u} + u + \varepsilon (\sin \dot{u} + 2\mu_1 \dot{u}) = 0$,

в) $\ddot{u} + u + \varepsilon (\sin \dot{u} + \mu_2 \dot{u} | \dot{u} |) = 0$,

г) $\ddot{u} + u + \varepsilon (2\mu_1 \dot{u} + \mu_2 \dot{u} | \dot{u} |) = 0$,

д) $\ddot{u} + u + \varepsilon (2\mu_1 \dot{u} + \sin \dot{u} + \mu_2 \dot{u} | \dot{u} |) = 0$.

8.2. Рассмотреть свободные колебания системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + F(u) = 0,$$

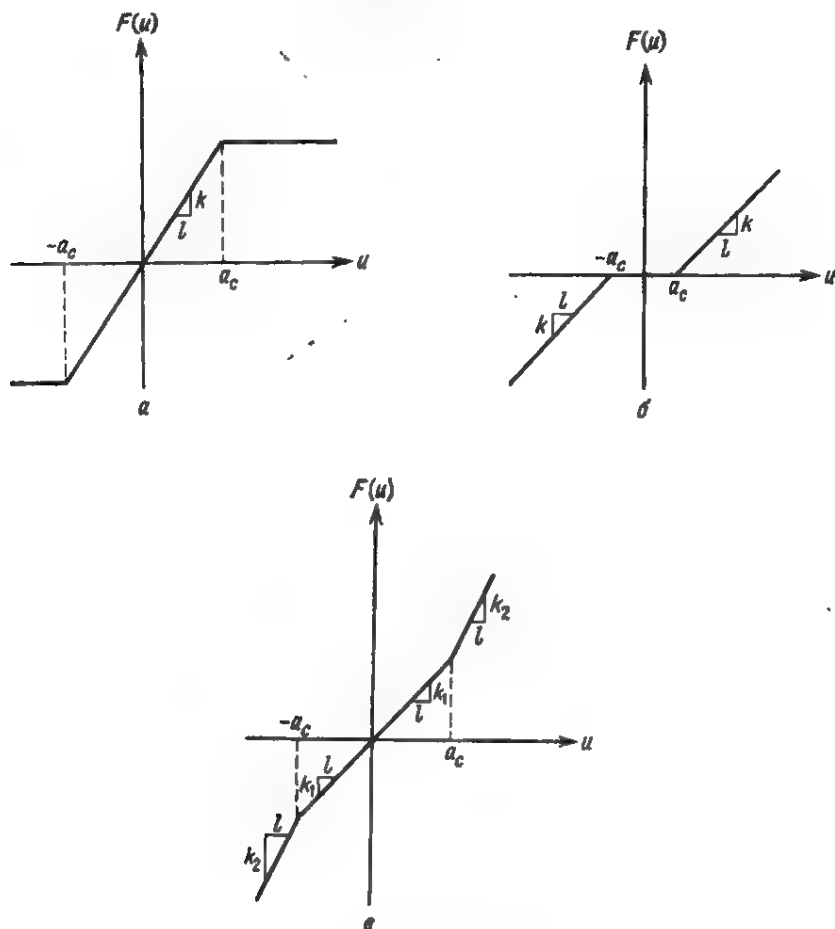


Рис. 8.1. Упражнение 8.2.

где функция $F(u)$ задана графически на рис. 8.1 для трех различных случаев. Показать, что в первом приближении

$$а) \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{a_c}{a} \right) + \frac{a_c}{a} \left(1 - \frac{a_c^2}{a^2} \right)^{1/2} \right],$$

$$б) \quad \omega_0^2 = k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{a_c}{a} \right) + \frac{a_c}{a} \left(1 - \frac{a_c^2}{a^2} \right)^{1/2} \right],$$

$$в) \quad \omega_0^2 = k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \left[\arcsin \left(\frac{a_c}{a} \right) + \frac{a_c}{a} \left(1 - \frac{a_c^2}{a^2} \right)^{1/2} \right].$$

УРАВНЕНИЕ ДЮФФИНГА СЛУЧАЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В отличие от пяти предыдущих глав, где мы имели дело только со свободными колебаниями, эту и последующую главы посвятим анализу вынужденных колебаний. Для того чтобы сравнить указанные два случая колебаний, обратимся к системе, которая уже исследована в одной из предыдущих глав, а именно к системе, описываемой уравнением Дюффинга (4.5), и попытаемся найти реакцию такой системы на синусоидальное внешнее воздействие. Иначе говоря, объектом нашего исследования будет уравнение

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_3 u^{*3} = F^* \cos \omega^* t^*, \quad (9.1)$$

где F^* и ω^* — постоянные величины. Как и в гл. 4, введем безразмерные переменные, используя для этого характерные масштабы времени T^* и длины U^* , т. е.

$$t = \frac{t^*}{T^*}, \quad u = \frac{u^*}{U^*}.$$

Тогда уравнение (9.1) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + k_1 T^{*2} u + k_3 T^{*2} U^{*2} u^3 = \frac{F^* T^{*2}}{U^*} \cos \omega^* T^* t. \quad (9.2)$$

Выберем величину T^* таким образом, чтобы выполнялось соотношение $k_1 T^{*2} = 1$, или

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{k_1}} = \frac{1}{\omega_0^*},$$

где ω_0^* — собственная частота соответствующей линейной задачи. Далее, положим

$$\varepsilon = k_3 T^{*2} U^{*2}, \quad F = \frac{F^* T^{*2}}{U^*}, \quad \omega = \omega^* T^* = \frac{\omega^*}{\omega_0^*}.$$

При этом уравнение (9.2) перепишется в виде

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = F \cos \omega t. \quad (9.3)$$

Отметим, что величина ω представляет собой отношение частоты внешнего воздействия к собственной частоте соответствующей линейной системы. Ниже вместо уравнения (9.3) мы будем рассматривать более общее уравнение

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon \dot{u} \dot{u} + \varepsilon u^3 = F \cos \omega t, \quad (9.4)$$

где μ — некоторая положительная постоянная. При этом уравнение (9.4) учитывает дополнительно затухание колебаний под действием малой вязкости.

В данной главе будем искать приближенное решение уравнения (9.4) с точностью до членов первого порядка малости по ε . Прежде всего построим прямое разложение и, исследовав его, найдем условия, при которых это разложение становится неприменимым. Эти условия определяют нам так называемые резонансные значения частоты ω . В § 9.2 и 9.3, используя соответственно метод многих масштабов и метод усреднения, построим разложения первого порядка для всех резонансных случаев с учетом слабого вязкого затухания.

9.1. Прямое разложение

Будем искать прямое разложение решения (9.4) в виде

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (9.5)$$

Подстановка разложения (9.5) в уравнение (9.4) дает

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + 2\varepsilon \mu (\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \dots) + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 = F \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{u}_0 + u_0 - F \cos \omega t + \varepsilon (\ddot{u}_1 + u_1 + 2\mu \dot{u}_0 + u_0^3) + \dots = 0. \quad (9.6)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 и ε , имеем

$$\ddot{u}_0 + u_0 = F \cos \omega t, \quad (9.7)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\mu \dot{u}_0 - u_0^3. \quad (9.8)$$

Уравнение (9.7) представляет собой линейное неоднородное уравнение, так что его общее решение можно искать в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения, определяемого видом правой части. Решение соответствующего (9.7) однородного уравнения может быть записано как

$$u_{0, \text{одн}} = a \cos(t + \beta), \quad (9.9)$$

где a и β — постоянные, а частное решение, согласно формуле (Б.69) приложения Б, имеет вид

$$u_{0, \text{ч}} = \frac{F}{1 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (9.10)$$

Поэтому

$$u_0 = a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t, \quad (9.11)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2} (1 - \omega^2)^{-1} F. \quad (9.12)$$

Подстановка (9.11) в уравнение (9.8) дает

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 = & 2\mu [a \sin(t + \beta) + \\ & + 2\Lambda\omega \sin \omega t] - [a \cos(t + \beta) + \\ & + 2\Lambda \cos \omega t]^3 = 2\mu a \sin(t + \beta) + \\ & + 4\mu\Lambda\omega \sin \omega t - a^3 \cos^3(t + \beta) - \\ & - 6a^2\Lambda \cos^2(t + \beta) \cos \omega t - \\ & - 12a\Lambda^2 \cos(t + \beta) \cos^2 \omega t - 8\Lambda^3 \cos^3 \omega t. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Далее, используя известные тригонометрические формулы (см. приложение А), перепишем (9.13) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 = & 2\mu a \sin(t + \beta) + 4\mu\Lambda\omega \sin \omega t - \frac{a^3}{4} \cos(3t + 3\beta) - \\ & - \left(\frac{3}{4}a^3 + 6a\Lambda^2\right) \cos(t + \beta) - 2\Lambda^3 \cos 3\omega t - (6\Lambda^3 + 3a^2\Lambda) \cos \omega t - \\ & - \frac{3}{2}a^2\Lambda \cos[(2 + \omega)t + 2\beta] - \frac{3}{2}a^2\Lambda \cos[(2 - \omega)t + 2\beta] - \\ & - 3a\Lambda^2 \cos[(1 + 2\omega)t + \beta] - 3a\Lambda^2 \cos[(1 - 2\omega)t + \beta]. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Как и ранее, решение однородного уравнения мы включаем только в члены первого порядка. Поскольку уравнение (9.14) линейно, его частное решение может быть представлено в виде суммы частных решений, соответствующих отдельным слагаемым в правой части. Из формул § Б.4 следует, что

$$\begin{aligned} u_1 = & -\mu a t \cos(t + \beta) + \frac{4\mu\Lambda\omega}{1 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{1}{32} a^3 \cos(3t + 3\beta) - \\ & - \left(\frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2\right) t \sin(t + \beta) - \frac{2\Lambda^3}{1 - 9\omega^2} \cos 3\omega t - \\ & - \frac{6\Lambda^3 + 3a^2\Lambda}{1 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{3a^2\Lambda}{2(\omega^2 + 4\omega + 3)} \cos[(2 + \omega)t + 2\beta] + \\ & + \frac{3a^2\Lambda}{2(\omega^2 - 4\omega + 3)} \cos[(2 - \omega)t + 2\beta] + \frac{3a\Lambda^2}{4(\omega^2 + \omega)} \times \\ & \times \cos[(1 + 2\omega)t + \beta] + \frac{3a\Lambda^2}{4(\omega^2 - \omega)} \cos[(1 - 2\omega)t + \beta]. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Подставляя выражения (9.11) и (9.15) в (9.5) и используя соотношение (9.12), получаем

$$\begin{aligned} u = & a \cos(t + \beta) + \frac{F}{1 - \omega^2} \cos \omega t + \varepsilon \left\{ -\mu a t \cos(t + \beta) + \right. \\ & + \frac{2\mu\omega F}{(1 - \omega^2)^2} \sin \omega t + \frac{1}{32} a^3 \cos(3t + 3\beta) - \\ & - \frac{3}{4} a \left[\frac{1}{2} a^2 + \frac{F^2}{(1 - \omega^2)^2} \right] t \sin(t + \beta) - \\ & - \frac{F^3}{4(1 - \omega^2)^2(1 - 9\omega^2)} \cos 3\omega t - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3F}{2(1-\omega^2)^2} \left[a^2 + \frac{F^2}{2(1-\omega^2)^2} \right] \cos \omega t + \\
& + \frac{3a^2 F}{4(1-\omega^2)(3+4\omega+\omega^2)} \cos [(2+\omega)t + 2\beta] + \\
& + \frac{3a^2 F}{4(1-\omega^2)(3-\omega)(1-\omega)} \cos [(2-\omega)t + 2\beta] + \\
& + \frac{3aF^2}{16(1-\omega^2)^2(\omega^2+\omega)} \cos [(1+2\omega)t + \beta] + \\
& + \frac{3aF^2}{16(1-\omega^2)^2(\omega^2-\omega)} \cos [(1-2\omega)t + \beta] \Big\} + \dots \quad (9.16)
\end{aligned}$$

Заметим, что наряду с секулярными членами разложение (9.16) содержит дроби, знаменатели которых могут оказаться весьма малыми. Такие члены разложения называют *членами с малыми знаменателями*. Если условиться считать частоты колебаний положительными, то малые знаменатели возникают в тех случаях, когда $\omega \approx 1$, $\omega \approx 0$, $\omega \approx 1/3$ и $\omega \approx 3$. Эти особые частоты называются резонансными. Таким образом, прямое разложение становится непригодным по двум причинам: из-за наличия малых знаменателей и в результате появления секулярных членов.

В случае когда $\omega \approx 1$, малые знаменатели появляются уже в главном члене разложения. Поэтому при $\omega \approx 1$ говорят о *первичном*, или *главном*, *резонансе*. При $\omega \approx 0$, $1/3$ или 3 малые знаменатели появляются начиная с членов первого порядка. Резонансы, возникающие в этих случаях, называют *вторичными*. Продолжая прямое разложение до членов более высоких порядков, можно обнаружить и другие резонансы. Отметим, что появление того или иного резонанса зависит от характера нелинейности системы. В общем случае резонансные частоты легко определяются путем анализа прямого разложения, как это сделано выше для уравнения Дюффинга.

В следующих двух параграфах, используя метод многих масштабов и метод усреднения, построим равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (9.4), не содержащее секулярных членов или членов с малыми знаменателями.

9.2. Метод многих масштабов

Для того чтобы найти приближенное решение уравнения (9.4), свободное от дефектов типа секулярных членов или малых знаменателей, необходимо различать случаи вторичных и первичных резонансов. Рассмотрим их в отдельности, обратившись поначалу к исследованию вторичных резонансов.

9.2.1. вторичные резонансы

В этом случае ω отстоит достаточно далеко от 1, и малые делители появляются впервые в членах порядка ε . В дополнение к быстрому времени $T_0 = t$ введем так называемое медленное

время $T_1 = \varepsilon t$. При этом производные по t преобразуются в выражения вида

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots,\end{aligned}$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$. Поскольку физическое время t входит в исходное дифференциальное уравнение явным образом, естественно возникает вопрос, через какую переменную, T_0 или T_1 , оно должно быть выражено. Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся выяснить, в каких случаях зависимость от времени t является быстрой и в каких — медленной. В уравнении (9.4) такой проверке подлежит член $\cos \omega t$. Если частота ω достаточно далека от нуля, $\cos \omega t$ оказывается быстро меняющейся функцией, и мы пишем

$$\cos \omega t = \cos \omega T_0, \quad (9.17)$$

представляя t через T_0 . С другой стороны, если $\omega \approx 0$, функция $\cos \omega t$ будет медленно меняющейся. В этом случае пишем $\omega = \varepsilon \sigma$, где $\sigma = O(1)$, чтобы выразить явно тот факт, что частота ω мала. Тогда имеем

$$\cos \omega t = \cos \sigma \varepsilon t = \cos \sigma T_1, \quad (9.18)$$

тем самым t представляется теперь через T_1 . Таким образом, случай $\omega \approx 0$ требует, по-видимому, специального рассмотрения.

Если значение ω оказывается достаточно далеким от нуля, уравнение (9.4) можно преобразовать к виду

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + 2\varepsilon \mu D_0 u + \dots + u + \varepsilon u^3 = F \cos \omega T_0. \quad (9.19)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (9.19) в виде

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots. \quad (9.20)$$

Подставляя разложение (9.20) в (9.19) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = F \cos \omega T_0, \quad (9.21)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3. \quad (9.22)$$

Общее решение уравнения (9.21) может быть представлено либо в действительной форме

$$u_0 = a(T_1) \cos [T_0 + \beta(T_1)] + 2\Lambda \cos \omega T_0, \quad (9.23)$$

либо в комплексной

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \Lambda e^{i\omega T_0} + (\text{к. с.}), \quad (9.24)$$

$$\text{где} \quad A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}, \quad \Lambda = \frac{F}{2(1 - \omega^2)}. \quad (9.25)$$

При этом уравнение (9.22) принимает вид

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} + 2i(\bar{A}' + \mu \bar{A})e^{-iT_0} - \\ - 2i\mu\omega\Lambda e^{i\omega T_0} + 2i\mu\omega\Lambda e^{-i\omega T_0} - [Ae^{iT_0} + \Lambda e^{i\omega T_0} + \\ + \bar{A}e^{-iT_0} + \Lambda e^{-i\omega T_0}]^3,$$

или

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -[2i(A' + \mu A) + 3(A\bar{A} + 2\Lambda^2)A]e^{iT_0} - \\ - (2i\mu\omega + 6A\bar{A} + 3\Lambda^2)\Lambda e^{i\omega T_0} - A^3 e^{3iT_0} - \Lambda^3 e^{3i\omega T_0} - \\ - 3A^2 \Lambda e^{i(2+\omega)T_0} - 3\bar{A}^2 \Lambda e^{i(\omega-2)T_0} - 3A\Lambda^2 e^{i(1+2\omega)T_0} - \\ - 3A\Lambda^2 e^{i(1-2\omega)T_0} + (\text{к. с.}). \quad (9.26)$$

Как указано в предыдущем параграфе, частное решение уравнения (9.26) содержит секулярные слагаемые и члены с малыми знаменателями при ω , близких к 3, $1/3$ и 0. Рассмотрим эти случаи каждый в отдельности.

Случай $\omega \approx 3$

Для того чтобы отразить близость безразмерной частоты ω к 3, введем так называемый параметр расстройки $\sigma = O(1)$, определяемый соотношением

$$\omega = 3 + \varepsilon\sigma. \quad (9.27)$$

Подстановка (9.27) в уравнение (9.26) дает

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -[2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 6A\Lambda^2]e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} - \\ - (2i\mu\omega + 6A\bar{A} + 3\Lambda^2)\Lambda e^{3iT_0 + i\sigma\varepsilon T_0} - \Lambda^3 e^{9iT_0 + 3i\sigma\varepsilon T_0} - \\ - 3A^2 \Lambda e^{5iT_0 + i\sigma\varepsilon T_0} - 3\bar{A}^2 \Lambda e^{iT_0 + i\sigma\varepsilon T_0} - 3A\Lambda^2 e^{7iT_0 + 2i\sigma\varepsilon T_0} - \\ - 3A\Lambda^2 e^{-5iT_0 - 2i\sigma\varepsilon T_0} + (\text{к. с.}). \quad (9.28)$$

Возникающие при этом в правой части уравнения (9.28) произведения εT_0 следует выразить через медленную переменную $T_1 = \varepsilon T_0$. Поэтому уравнение (9.28) переписывается в виде

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -[-2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 6A\Lambda^2]e^{iT_0} - \\ - [A^3 + (2i\mu\omega + 6A\bar{A} + 3\Lambda^2)\Lambda e^{i\sigma T_1}]e^{3iT_0} - \Lambda^3 e^{3i\sigma T_1} e^{9iT_0} - \\ - 3A^2 \Lambda e^{i\sigma T_1} e^{5iT_0} - 3\bar{A}^2 \Lambda e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} - 3A\Lambda^2 e^{2i\sigma T_1} e^{7iT_0} - \\ - 3A\Lambda^2 e^{-2i\sigma T_1} e^{-5iT_0} + (\text{к. с.}). \quad (9.29)$$

Следует отметить, что введение параметра расстройки с помощью соотношения (9.27) привело к преобразованию слагаемого

$$-3\bar{A}^2 \Lambda \exp[i(\omega - 2)T_0],$$

которое определяло собой появление члена с малым знаменателем в прямом разложении, к виду

$$-3\bar{A}^2\Lambda \exp(i\sigma T_1) \exp(iT_0),$$

которому соответствует секулярный член относительно переменной T_0 . Подобный подход является общим для всех случаев, когда возникают члены с малыми знаменателями: с помощью параметров расстройки их преобразуют к виду, порождающему секулярные члены.

Потребовав теперь, чтобы решение u_1 не содержало секулярных слагаемых, из уравнения (9.29) получаем

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 6A\Lambda^2 + 3\bar{A}^2\Lambda e^{i\sigma T_1} = 0. \quad (9.30)$$

Заметим, что нет необходимости выписывать все члены в правой части (9.28) и (9.29). Нужно учитывать лишь те слагаемые, которые порождают в разложении секулярные члены или члены с малыми знаменателями. Как и ранее, введем на этом этапе экспоненциальное представление (9.25). В результате получим

$$ia'e^{i\beta} - a\beta'e^{i\beta} + i\mu ae^{i\beta} + \frac{3}{8}a^3e^{i\beta} + 3a\Lambda^2e^{i\beta} + \\ + \frac{3}{4}a^2\Lambda e^{i(\sigma T_1 - 3\beta)} = 0. \quad (9.31)$$

Прежде чем отделить вещественную и мнимую части уравнения (9.31), умножим его на $\exp(-i\beta')$, с тем чтобы избавиться от экспоненциальных множителей у величин a' и β' . Этот прием значительно упрощает результирующие уравнения. Действительно, умножение (9.31) на $\exp(-i\beta')$ дает

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \frac{3}{4}a\Lambda e^{i(\sigma T_1 - 3\beta)} = 0. \quad (9.32)$$

В уравнении (9.32) только один член содержит экспоненциальный множитель. Используя формулу Эйлера $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, переписываем (9.32) в виде

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \\ + \frac{3}{4}a^2\Lambda [\cos(\sigma T_1 - 3\beta) + i \sin(\sigma T_1 - 3\beta)] = 0,$$

или

$$i \left[a' + \mu a + \frac{3}{4}a^2\Lambda \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \right] - a\beta' + \\ + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \frac{3}{4}a^2\Lambda \cos(\sigma T_1 - 3\beta) = 0. \quad (9.33)$$

Поскольку комплексное выражение равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его вещественная и мнимая части, со-

отношение (9.33) эквивалентно системе двух уравнений

$$a' = -\mu a - \frac{3}{4} a^2 \Lambda \sin(\sigma T_1 - 3\beta), \quad (9.34)$$

$$a\beta' = 3a\Lambda^2 + \frac{3}{4} a^2 \Lambda \cos(\sigma T_1 - 3\beta). \quad (9.35)$$

Уравнения (9.34) и (9.35) являются искомыми уравнениями, описывающими модуляцию амплитуды и фазы того слагаемого в решении, которое определяет форму свободных колебаний.

Подставляя (9.23) в разложение (9.20) и вспоминая, что $T_0 = t$, получаем

$$u = a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t + O(\varepsilon), \quad (9.36)$$

где a и β определяются уравнениями (9.34) и (9.35). Поскольку медленное время T_1 входит явно в уравнения (9.34) и (9.35), эта система называется неавтономной. Представляется удобным исключить явную зависимость от T_1 , тем самым преобразовав уравнения (9.34) и (9.35) в так называемую автономную систему. Этого можно добиться, введя новую зависящую переменную γ по формуле

$$\gamma = \sigma T_1 - 3\beta. \quad (9.37)$$

При этом

$$\gamma' = \sigma - 3\beta'. \quad (9.38)$$

Подстановка (9.37) в уравнение (9.34) дает

$$a' = -\mu a - \frac{3}{4} a^2 \Lambda \sin \gamma. \quad (9.39)$$

Подставляя теперь уравнение (9.35) в (9.38) и используя (9.37), получаем

$$a\gamma' = \sigma a - 9a\Lambda^2 - \frac{9}{8} a^3 - \frac{9}{4} a^2 \Lambda \cos \gamma. \quad (9.40)$$

Из формулы (9.37) также следует, что

$$\beta = \frac{1}{3} \sigma T_1 - \frac{1}{3} \gamma = \frac{1}{3} \varepsilon \sigma t - \frac{1}{3} \gamma.$$

Поэтому разложение (9.36) можно переписать в виде

$$u = a \cos\left(t + \frac{1}{3} \varepsilon \sigma t - \frac{1}{3} \gamma\right) + 2\Lambda \cos \omega t + O(\varepsilon),$$

что в свою очередь, с учетом соотношения (9.27), может быть представлено как

$$u = a \cos\left(\frac{1}{3} \omega t - \gamma\right) + 2\Lambda \cos \omega t + O(\varepsilon). \quad (9.41)$$

Таким образом, в первом приближении решение u дается разложением (9.41), в котором величины a и γ определяются из автономной системы уравнений (9.39), (9.40).

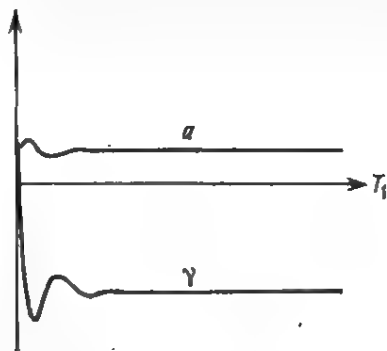


Рис. 9.1. Зависимости величин a и γ от времени t , полученные в результате численного решения уравнений (9.39)–(9.40) при $\varepsilon = 0.1$, $\Lambda = \sqrt{0.08}$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 1.0$, $a(0) = 1.0$ и $\gamma(0) = 1.0$.

На рис. 9.1 представлены зависимости a и γ от медленного времени T_1 , полученные с помощью численного интегрирования системы (9.39), (9.40). На начальном участке кривые a и γ имеют колебательный характер, однако по мере возрастания T_1 они стремятся к некоторым постоянным значениям. Эти постоянные значения обычно называют *стационарными* или *установившимися*. При этом возможны два случая: установившееся значение амплитуды будет либо равно, либо не равно нулю. При ненулевой амплитуде установившихся колебаний член, соответствующий свободным колебаниям, является периодическим с частотой, равной в точности $\omega/3$, т. е. одной трети частоты внешнего воздействия. О таком резонансе говорят как о субгармоническом резонансе на частоте одна треть. В этом случае решение u , т. е. установившаяся реакция колебательной системы на возмущение, оказывается периодическим.

Для нахождения этой установившейся реакции нет необходимости численно интегрировать систему (9.39), (9.40), описывающую изменение a и γ . Вместо этого используем тот факт, что амплитуда и фаза в стационарном режиме постоянны, и, следовательно, $a' = 0$ и $\gamma' = 0$. В результате система (9.39), (9.40) примет вид

$$\begin{aligned} -3\mu a &= \frac{9}{4} a^2 \Lambda \sin \gamma, \\ \sigma a - 9a\Lambda^2 - \frac{9}{8} a^3 &= \frac{9}{4} a^2 \Lambda \cos \gamma. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Возводя каждое из уравнений (9.42) в квадрат и складывая полученные результаты, а также учитывая тождество

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1, \quad (9.43)$$

получаем

$$9\mu^2 a^2 + \left(\sigma - 9\Lambda^2 - \frac{9}{8} a^2\right)^2 a^2 = \frac{81}{16} a^4 \Lambda^2. \quad (9.44)$$

При этом из уравнения (9.44) следует, что a либо равно нулю, либо удовлетворяет уравнению

$$9\mu^2 + \left(\sigma - 9\Lambda^2 - \frac{9}{8} a^2\right)^2 = \frac{81}{16} a^2 \Lambda^2.$$

Таким образом,

$$a^4 - \frac{16}{9} \left(\sigma - \frac{27}{4} \Lambda^2\right) a^2 + \frac{64}{81} [9\mu^2 + (\sigma - 9\Lambda^2)^2] = 0, \quad (9.45)$$

и поскольку (9.45) представляет собой квадратное уравнение относительно a^2 , его решения можно представить как

$$a^2 = \frac{8}{9} \left(\sigma - \frac{27}{4} \Lambda^2\right) \pm \frac{8}{9} \left[\left(\sigma - \frac{27}{4} \Lambda^2\right)^2 - 9\mu^2 - (\sigma - 9\Lambda^2)^2\right]^{1/2},$$

или

$$a^2 = \frac{8}{9} \left(\sigma - \frac{27}{4} \Lambda^2\right) \pm \frac{8}{3} \left[\frac{1}{4} \Lambda^2 \left(2\sigma - \frac{63}{4} \Lambda^2\right) - \mu^2\right]^{1/2}. \quad (9.46)$$

Соотношение (9.46) называют обычно амплитудно-частотной характеристикой.

Из (9.46) следует, что для существования вещественных решений подкоренное выражение и первое слагаемое в правой части этого равенства должны быть положительными, т. е.

$$\frac{1}{4} \Lambda^2 \left(2\sigma - \frac{63}{4} \Lambda^2\right) \geq \mu^2, \quad \sigma > \frac{27}{4} \Lambda^2.$$

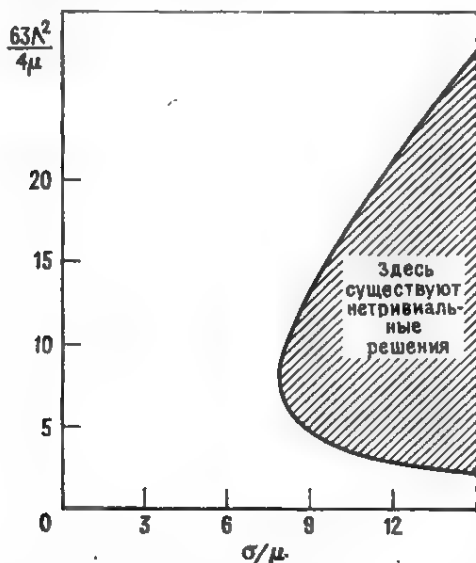


Рис. 9.2. Области, где существуют субгармонические характеристики системы.

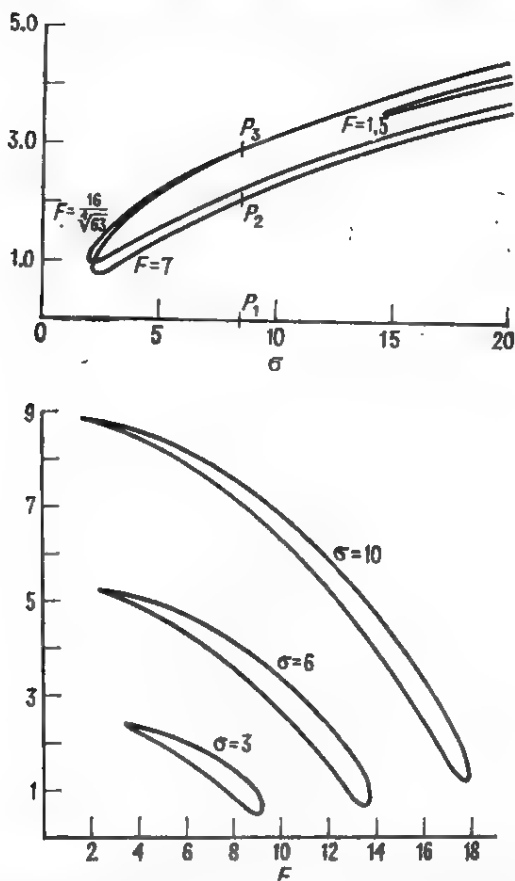


Рис. 9.3. Субгармоническая характеристика для уравнения Дюффинга: амплитуда свободных колебаний в зависимости от: а) параметра расстройки, б) амплитуды возбуждения.

Таким образом, нетривиальные решения существуют только в том случае, если выполняются неравенства

$$\frac{\sigma}{\mu} - \left(\frac{\sigma^2}{\mu^3} - 63 \right)^{1/2} < \frac{63\Lambda^2}{4\mu} < \frac{\sigma}{\mu} + \left(\frac{\sigma^2}{\mu^3} - 63 \right)^{1/2}.$$

Область, описываемая этими неравенствами, изображена на рис. 9.2. На рис. 9.3а приведено несколько амплитудно-частотных кривых, а на рис. 9.3б показана зависимость амплитуды a от амплитуды возбуждения.

Заметим, что, хотя частота возбуждения втрое больше собственной частоты системы, амплитуда отклика оказывается довольно большой. Например, весьма сильные колебания отдельных частей самолета могут возникать при работе его двигателя с угловой ча-

стотой, намного превосходящей их собственные частоты. Известен такой случай, когда вращение винтов самолета одной авиакомпании послужило причиной возбуждения субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{2}$ в крыльях, которые в свою очередь индуцировали колебания руля поворота порядка $\frac{1}{4}$. При этом колебания оказались настолько сильными, что самолет разрушился.

$$\text{Случай } \omega \approx \frac{1}{3}$$

Для того чтобы отразить близость ω к $\frac{1}{3}$, введем параметр расстройки σ , определив его равенством

$$3\omega = 1 + \varepsilon\sigma. \quad (9.47)$$

Как указывалось ранее, нет необходимости заменять величину ω на $1 + \varepsilon\sigma$ во всех членах уравнения (9.26). Замену следует провести только в тех членах, в которых возникают малые знаменатели, т. е. в членах $-\Lambda^3 \exp(\pm 3i\omega T_0)$. С этой целью запишем

$$3\omega T_0 = (1 + \varepsilon\sigma) T_0 = T_0 + \sigma\varepsilon T_0 = T_0 + \sigma T_1. \quad (9.48)$$

Далее, преобразуем уравнение (9.26) к виду

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -[2iA' + 2i\mu A + 6\Lambda^2 A + 3A^2 A] e^{iT_0} - \\ - \Lambda^3 e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}), \quad (9.49)$$

где символом (Н. С. Ч.) обозначены невыписанные члены правой части, которые не служат источником секулярных членов. Требование отсутствия секулярных членов в решении u_1 дает

$$2i(A' + \mu A) + 6\Lambda^2 A + 3A^2 \bar{A} + \Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0. \quad (9.50)$$

Обратимся вновь к экспоненциальному представлению (9.25) и перепишем условие (9.50) в виде

$$ia'e^{i\beta} - a\beta'e^{i\beta} + i\mu a e^{i\beta} + \frac{3}{8} a^3 e^{i\beta} + 3\Lambda^2 A e^{i\beta} + \Lambda^3 e^{i(\sigma T_1 - \beta)} = 0. \quad (9.51)$$

Умножая (9.51) на $\exp(-i\beta)$ с тем чтобы оставить лишь один член с соответствующим экспоненциальным множителем, получаем

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8} a^3 + 3\Lambda^2 a + \Lambda^3 e^{i(\sigma T_1 - \beta)} = 0,$$

или

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8} a^3 + 3\Lambda^2 a + \\ + \Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \beta) + i\Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \beta) = 0. \quad (9.52)$$

Отделяя вещественную и мнимую части, имеем

$$a' = -\mu a - \Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (9.53)$$

$$a\beta' = 3\Lambda^2 a + \frac{3}{8} a^3 + \Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \beta). \quad (9.54)$$

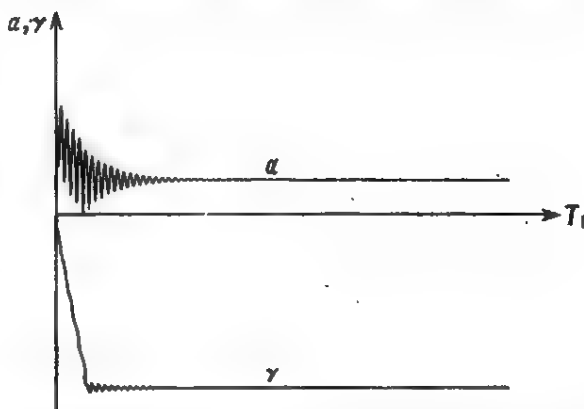


Рис. 9.4. Зависимости величин a и γ от T_1 , полученные с помощью численного решения уравнений (9.57)–(9.58) при $\varepsilon = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $\Lambda = 1.0$, $\mu = 0.1$, $a(0) = 1.1$ и $\gamma(0) = 2.5$.

Как и в предыдущем случае, преобразуем систему уравнений (9.53), (9.54) в автономную, вводя замену переменных

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta. \quad (9.55)$$

Тогда

$$\gamma' = \sigma - \beta'. \quad (9.56)$$

Подстановка (9.55) в уравнение (9.53) дает

$$a' = -\mu a - \Lambda^3 \sin \gamma, \quad (9.57)$$

а подстановка (9.54) в (9.56) с использованием (9.55) приводит к уравнению

$$a\gamma' = \sigma a - 3\Lambda^2 a - \frac{3}{8}a^3 - \Lambda^3 \cos \gamma. \quad (9.58)$$

Исключая величину β из (9.23) и (9.55), находим

$$u_0 = a \cos(T_0 + \sigma T_1 - \gamma) + 2\Lambda \cos \omega T_0,$$

или

$$u_0 = a \cos(t + \varepsilon \sigma t - \gamma) + 2\Lambda \cos \omega t. \quad (9.59)$$

Наконец, подставляя (9.59) в разложение (9.20) и используя (9.47), приходим к окончательному выражению:

$$u = a \cos(3\omega t - \gamma) + 2\Lambda \cos \omega t + O(\varepsilon). \quad (9.60)$$

Таким образом, в первом приближении решение u дается формулой (9.60), в которой величины a и γ определяются из системы (9.57), (9.58).

На рис. 9.4 представлены кривые изменения амплитуды a и фазы γ в зависимости от медленного времени T_1 , полученные с помощью численного интегрирования системы (9.57), (9.58). На начальном участке эти кривые имеют колебательный характер, однако по мере увеличения T_1 амплитуда и фаза стремятся к по-

стоянным значениям. Как и в предыдущем случае, эти постоянные значения называют стационарными или установившимися. Из уравнения (9.60) следует, что установившийся отклик системы на внешнее воздействие является периодическим. При этом для определения установившегося отклика нам вновь не нужно численно интегрировать систему (9.57), (9.58). Поскольку в установившемся режиме a и γ оказываются постоянными, то, полагая $a' = 0$ и $\gamma' = 0$ в уравнениях (9.57), (9.58), получаем

$$-\mu a = \Lambda^3 \sin \gamma, \quad (9.61)$$

$$\sigma a - 3\Lambda^2 a - \frac{3}{8} a^3 = \Lambda^3 \cos \gamma. \quad (9.62)$$

Возводя в квадрат обе части уравнений (9.61) и (9.62), складывая полученные результаты и используя (9.43), получаем следующее кубическое уравнение относительно a^2 :

$$\mu^2 a^2 + \left(\sigma - 3\Lambda^2 - \frac{3}{8} a^2 \right)^2 a^2 = \Lambda^6. \quad (9.63)$$

Это уравнение, как и (9.46), называется амплитудно-частотной характеристикой. При известной амплитуде a фаза γ может быть найдена из любого из уравнений (9.61), (9.62). При постоянных a и γ член, соответствующий свободным колебаниям, имеет частоту, равную 3ω , т. е. утроенной частоте внешнего воздействия. О таком резонансе говорят как о супергармоническом резонансе порядка три.

На рис. 9.5 приведена одна из характерных кривых реакции системы, т. е. зависимости амплитуды a от амплитуды внешнего воздействия. Отметим, что изгиб этой кривой обусловлен нелинейностью возвращающейся силы, причем этот изгиб приводит к возникновению так называемого срыва колебаний. Чтобы пояснить сказанное, представим себе, что мы исследуем колебания системы при фиксированной частоте (т. е. при постоянной σ) и медленно

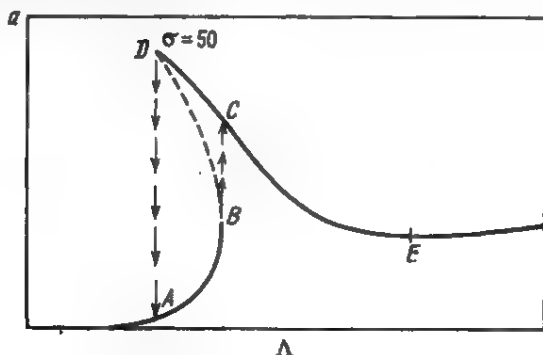


Рис. 9.5. Скачок субгармонической характеристики для уравнения Дюффинга.

меняющейся амплитуде возбуждения (т. е. F или Λ). Если колебания начинаются при малом значении Λ , соответствующем точке A , а затем Λ медленно увеличивается, то амплитуда a будет медленно возрастать вплоть до точки B . При дальнейшем увеличении Λ происходит скачок из точки B в точку C с соответствующим возрастанием амплитуды a , после чего она начнет плавно убывать с увеличением Λ до точки E . Дальнейшее увеличение Λ приводит к новому плавному нарастанию амплитуды. Если колебания начинаются в точке E и Λ уменьшается, то амплитуда начнет медленно возрастать, изображающая точка будет перемещаться через точку C и далее по верхней ветви вплоть до точки D . При дальнейшем уменьшении Λ происходит скачок из точки D в точку A (резкое уменьшение a), после чего амплитуда вновь будет плавно уменьшаться с уменьшением Λ . Заметим также, что режим, соответствующий пунктирной линии BD , не может быть реализован ни при увеличении, ни при уменьшении Λ . Следовательно, этот участок кривой соответствует неустойчивому режиму.

Случай $\omega \approx 0$

В этом случае, как указывалось ранее, функцию $\cos \omega t$ надо выразить через переменную T_1 с помощью соотношения (9.18). При этом уравнение (9.19) принимает вид

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + 2\varepsilon \mu D_0 u + \dots + u + \varepsilon u^3 = F \cos \sigma T_1. \quad (9.64)$$

Подставляя разложение (9.20) в (9.64) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этого уравнения, получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = F \cos \sigma T_1, \quad (9.65)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3. \quad (9.66)$$

Общее решение уравнения (9.65) может быть представлено в виде

$$u_0 = A e^{iT_1} + \bar{A} e^{-iT_1} + F \cos \sigma T_1. \quad (9.67)$$

Тогда уравнение (9.66) переписывается как

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A) e^{iT_1} + 2i(\bar{A}' + \mu \bar{A}) e^{-iT_1} - [A e^{iT_1} + \bar{A} e^{-iT_1} + F \cos \sigma T_1]^3,$$

или

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 = & -2i(A' + \mu A) e^{iT_1} - A^3 e^{3iT_1} - 3A^2 \bar{A} e^{iT_1} - \\ & - 3F^2 \cos^2 \sigma T_1 A e^{iT_1} - 3FA^2 \cos \sigma T_1 e^{2iT_1} - \\ & - 3FA \bar{A} \cos \sigma T_1 - \frac{1}{2} F^3 \cos^3 \sigma T_1 + (\text{к. с.}). \end{aligned} \quad (9.68)$$

Исключая секулярные члены из решения u_1 , имеем

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2 \bar{A} + 3F^2 A \cos^2 \sigma T_1 = 0. \quad (9.69)$$

Представление A в форме (9.25) дает

$$ia'e^{i\beta} - a\beta'e^{i\beta} + i\mu ae^{i\beta} + \frac{3}{8}a^3e^{i\beta} + \frac{3}{2}F^2ae^{i\beta}\cos^2\sigma T_1 = 0,$$

или

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8}a^3 + \frac{3}{2}F^2a\cos^2\sigma T_1 = 0. \quad (9.70)$$

Отделяя в соотношении (9.70) вещественную и мнимую части, приходим к системе

$$a' = -\mu a, \quad (9.71)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8}a^3 + \frac{3}{2}F^2a\cos^2\sigma T_1. \quad (9.72)$$

При этом из уравнения (9.71) следует, что

$$a = a_0 e^{-\mu T_1}, \quad (9.73)$$

где a_0 — произвольная постоянная. Далее, из уравнения (9.72) следует, что

$$\beta' = \frac{3}{8}a_0^2 e^{-2\mu T_1} + \frac{3}{2}F^2\cos^2\sigma T_1,$$

или

$$\beta' = \frac{3}{8}a_0^2 e^{-2\mu T_1} + \frac{3}{4}F^2 + \frac{3}{4}F^2\cos 2\sigma T_1, \quad (9.74)$$

откуда после интегрирования получаем

$$\beta = \frac{3}{16\mu}a_0^2 e^{-2\mu T_1} + \frac{3}{4}F^2 T_1 + \frac{3F^2}{8\sigma}\sin 2\sigma T_1 + \beta_0, \quad (9.75)$$

где β_0 — произвольная постоянная. Подставляя (9.67) в разложение (9.20) и используя показательное представление (9.25), находим

$$u = a \cos(T_0 + \beta) + F \cos \sigma T_1 + O(\varepsilon). \quad (9.76)$$

Наконец, подставляя (9.75) в (9.76) и используя соотношения $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ и $\omega = \varepsilon\sigma$, перепишем (9.76) в виде

$$u = a_0 e^{-\varepsilon\mu t} \cos \left[\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon F^2 \right) t - \frac{3}{16\mu}a_0^2 e^{-2\varepsilon\mu t} + \right. \\ \left. + \frac{3\varepsilon F^2}{8\omega} \sin 2\omega t + \beta_0 \right] + F \cos \omega t + O(\varepsilon). \quad (9.77)$$

Покажем теперь, что разложение (9.77) может быть получено как частный случай общей зависимости при ω , отличных от 1. Для этого заменим частоту ω в последних членах правой части уравнения (9.26) на величину $\varepsilon\sigma$, в результате чего получим

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -[2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 6\Lambda^2 A]e^{iT_0} - \\ - 3\Lambda\Lambda^2 e^{iT_0} [e^{2iT_1, \sigma} + e^{-2iT_1, \sigma}] + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}). \quad (9.78)$$

Исключение секулярных членов из решения уравнения (9.78) дает

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 6\Lambda^2 A + 6\Lambda A^2 \cos 2\sigma T_1 = 0. \quad (9.79)$$

Поскольку $\omega = \varepsilon\sigma$, то из (9.25) следует, что $\Lambda \approx F/2$. Тогда соотношение (9.79) принимает вид

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + \frac{3}{2}F^2 A(1 + \cos 2\sigma T_1) = 0,$$

или $2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} + 3F^2 A \cos^2 \sigma T_1 = 0$, (9.80)
что полностью совпадает с условием (9.69).

9.2.2. ПЕРВИЧНЫЙ РЕЗОНАНС

В случае первичного резонанса $\omega \approx 1$, и члены с малыми знаменателями появляются непосредственно в слагаемых порядка $O(\varepsilon^0)$ прямого разложения (9.16). Следовательно, u_0 будет резко возрастать при $\omega \rightarrow 1$. Однако при этом все большую роль начинают играть нелинейное слагаемое в возвращающей силе и член, описывающий затухание, что приводит к изменению порядков, приписываемых различным членам в уравнении (9.6). Более того, «частное решение» и «решение однородного уравнения» сливаются, так что их нельзя отличить друг от друга. В этой ситуации для нас существуют две возможности. Первая из них состоит в том, чтобы перенормировать нелинейный член и член, описывающий затухание, так, чтобы они имели порядок ε^0 и тем самым компенсировали эффект первичного резонанса на частоте возбуждения. Однако этот путь приводит к уравнению

$$\ddot{u}_0 + u_0 + 2\mu D_0 u_0 + u_0^3 - F \cos \omega T_0 = 0, \quad (9.81)$$

совпадающему с исходным нелинейным уравнением. Вторая возможность заключается в перенормировке внешнего воздействия, с тем чтобы неоднородность появлялась в членах порядка ε , т. е. одновременно с нелинейностью и затуханием. Первый член разложения оказывается при этом величиной порядка ε и описывается линейным уравнением. Именно такой подход, пригодный для слабо нелинейных систем, применяется в этой книге. Чтобы воспользоваться им в данном случае, положим $F = \varepsilon f$ и перепишем уравнение (9.4) в виде

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon u^3 = \varepsilon f \cos \omega t. \quad (9.82)$$

При ω , близких к 1, первые два члена прямого разложения (9.16) имеют примерно одинаковую частоту, так что слагаемое $a \cos(t + \beta)$, описывающее свободные колебания, «сливается» с реакцией на внешнюю силу $F(1 - \omega^2)^{-1} \cos \omega t$. Этот факт оправдывает перенормировку, проведенную в уравнении (9.82).

Для того чтобы получить приближенное решение уравнения (9.82), введем переменные $T_0 = t$ и $T_1 = \varepsilon t$ и представим $\cos \omega t$

как $\cos \omega T_0$. Тогда, как и в предыдущих случаях, уравнение (9.82) примет вид

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + 2\varepsilon \mu D_0 u + u + \dots + \varepsilon u^3 = \varepsilon f \cos \omega T_0. \quad (9.83)$$

Решение уравнения (9.83) будем искать в виде

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (9.84)$$

Подставляя разложение (9.84) в (9.83) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этого уравнения, получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0, \quad (9.85)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^3 + f \cos \omega T_0. \quad (9.86)$$

Общее решение уравнения (9.85) можно представить как

$$u_0 = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}. \quad (9.87)$$

При этом уравнение (9.86) переписывается в виде

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} + 2i(\bar{A}' + \mu \bar{A})e^{-iT_0} - \\ - (Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0})^3 + \frac{1}{2}fe^{i\omega T_0} + \frac{1}{2}fe^{-i\omega T_0},$$

или

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -(2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A})e^{iT_0} - A^3e^{3iT_0} + \\ + \frac{1}{2}fe^{i\omega T_0} + (\text{к. с.}). \quad (9.88)$$

Поскольку мы рассматриваем случай $\omega \approx 1$, то, введя параметр расстройки по формуле

$$\omega = 1 + \varepsilon\sigma, \quad (9.89)$$

получим

$$\omega T_0 = (1 + \varepsilon\sigma) T_0 = T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = T_0 + \sigma T_1. \quad (9.90)$$

Подстановка (9.90) в уравнение (9.88) дает

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -(2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A})e^{iT_0} - A^3e^{3iT_0} + \\ + \frac{1}{2}fe^{i\sigma T_1}e^{iT_0} + (\text{к. с.}). \quad (9.91)$$

Требование отсутствия секулярных членов в решении этого уравнения приводит к условию

$$2iA' + 2i\mu A + 3A^2\bar{A} - \frac{1}{2}fe^{i\sigma T_1} = 0. \quad (9.92)$$

Представляя A в форме (9.25), переписываем соотношение (9.92) в виде

$$ia'e^{i\beta} - a\beta'e^{i\beta} + i\mu ae^{i\beta} + \frac{3}{8}a^3e^{i\beta} - \frac{1}{2}fe^{i\sigma T_1} = 0,$$

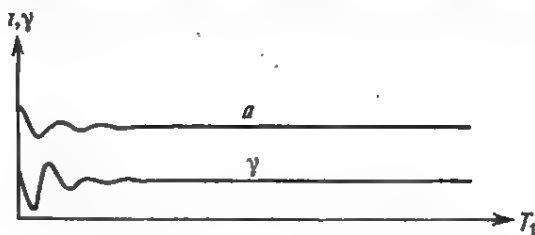


Рис. 9.6. Зависимости величин a и γ от T_1 , полученные в результате численного решения уравнений (9.98)–(9.99) при $\varepsilon = 0.5$, $\sigma = 0.05$, $f = 0.5$, $\mu = 0.1$, $a(0) = 1.1$ и $\gamma(0) = 0.5$.

или

$$ia' - a\beta' + i\mu a + \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}f \cos(\sigma T_1 - \beta) - \frac{1}{2}if \sin(\sigma T_1 - \beta). \quad (9.93)$$

Отделяя вещественную и мнимую части в соотношении (9.93), приходим к системе уравнений

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2}f \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (9.94)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}f \cos(\sigma T_1 - \beta). \quad (9.95)$$

Как и раньше, преобразуем систему (9.94), (9.95) в автономную, вводя новую неизвестную

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta, \quad (9.96)$$

при этом

$$\gamma' = \sigma - \beta'. \quad (9.97)$$

Подстановка (9.96) в (9.94) дает

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2}f \sin \gamma. \quad (9.98)$$

Подставляя выражение (9.95) в (9.97) и используя (9.96), получаем

$$a\gamma' = \sigma a - \frac{3}{8}a^3 + \frac{1}{2}f \cos \gamma. \quad (9.99)$$

Подстановка формы (9.25) в решение (9.87) приводит к выражению

$$u_0 = a \cos(T_0 + \beta).$$

При этом из разложения (9.84) следует, что

$$u = a \cos(T_0 + \beta) + O(\varepsilon).$$

Учитывая формулы (9.89), (9.96), а также равенства $T_0 = t$ и $T_1 = \varepsilon t$, перепишем последнее разложение в виде

$$u = a \cos(\omega t - \gamma) + O(\varepsilon). \quad (9.100)$$

На рис. 9.6 представлены зависимости амплитуды a и фазы γ от переменной T_1 , полученные с помощью численного интегриро-

вания системы уравнений (9.98) и (9.99). При этом поведение кривых a и γ оказывается аналогичным их поведению в случае вторичных резонансов. При $T_1 \rightarrow \infty$ a и γ стремятся к предельным значениям, которые можно найти из решения системы уравнений

$$\mu a = \frac{1}{2} f \sin \gamma, \quad (9.101)$$

$$-\sigma a + \frac{3}{8} a^3 = \frac{1}{2} f \cos \gamma. \quad (9.102)$$

Возводя соотношения (9.101) и (9.102) в квадрат и складывая полученные результаты, приходим к кубическому уравнению относительно величины a^2 вида

$$\mu^2 a^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8} a^2 \right)^2 a^2 = \frac{1}{4} f^2. \quad (9.103)$$

Уравнение (9.103) определяет зависимость a от σ , обычно называемую амплитудно-частотной характеристикой системы. Такое же название носит и кривая, изображающая эту зависимость.

На рис. 9.7 представлена типичная амплитудно-частотная характеристика. Резкое искривление этой характеристики приводит к явлению срыва. Поясним его, как и в предыдущем случае, с помощью мысленного эксперимента, в котором амплитуда внешнего воздействия поддерживается постоянной, а частота (и, следовательно, σ) медленно изменяется, возрастая или убывая по сравнению с собственной частотой линейной системы. При этом в ходе эксперимента будем следить за амплитудой гармонического отклика. Пусть начальная частота соответствует точке 1 на кривой, изображенной на рис. 9.7. При уменьшении частоты σ уменьшается, и амплитуда a медленно возрастает, следуя участку кривой 1—2—3. При дальнейшем уменьшении параметра расстройки происходит скачок из точки 3 в точку 4, сопровождающийся увеличением амплитуды, после чего с дальнейшим ростом σ амплитуда начинает медленно убывать. Если колебания начинаются в точке 5 и σ увеличивается, амплитуда a будет медленно возрастать, следуя участку кривой 5—4—6. При достижении точки 6 происходит срыв — резкое уменьшение амплитуды до значения,

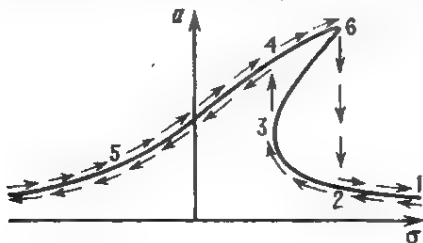


Рис. 9.7. Скачок в первичном резонансе для уравнения Дюффинга.

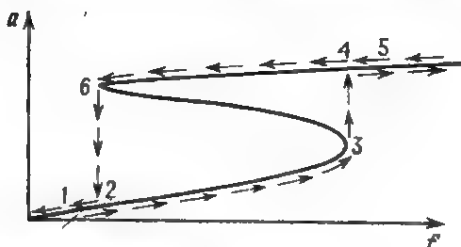


Рис. 9.8. Скачок в первичном резонансе для уравнения Дюффинга.

соответствующего точке 2, а затем медленное убывание амплитуды с ростом частоты. Максимальная амплитуда, соответствующая точке 6, достигается только при подходе к этой точке со стороны низких частот. Участок амплитудно-частотной характеристики между точками 3 и 6 соответствует неустойчивым движениям и, следовательно, не может быть воспроизведен экспериментально.

Явление срыва может наблюдаться и в случае, когда колебания возбуждаются при фиксированной частоте внешнего воздействия ω и медленно меняющейся амплитуде f . Предположим, что колебания начинаются в точке 1 на кривой, изображенной на рис. 9.8. При увеличении f амплитуда a будет медленно возрастать вплоть до точки 3. При дальнейшем увеличении f происходит скачок из точки 3 в точку 4, а затем увеличение амплитуды a с ростом f . При обратном ходе процесса изображающая точка следует участку кривой 5—4—6, а в точке 6 происходит срыв в точку 2.

9.3. Метод усреднения

Применение к рассматриваемой задаче метода усреднения также требует отдельного рассмотрения первичных и вторичных резонансов. Мы начнем со второго случая.

9.3.1. ВТОРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Как известно, при использовании метода усреднения первый шаг состоит в том, чтобы ввести вместо искомой функции u две новые зависимые переменные — амплитуду и фазу свободных колебаний системы, а затем воспользоваться идеей вариации постоянных. Итак, при $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (9.4) имеет вид

$$u = a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t, \quad (9.104)$$

где a и β — произвольные постоянные, а Λ определяется формулой (9.12). Дифференцирование выражения (9.104) по t дает

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) - 2\Lambda \omega \sin \omega t. \quad (9.105)$$

При $\varepsilon \neq 0$ мы вновь представим решение в форме (9.104) и подчиним его условию (9.105), но при этом будем считать a

и β функциями t . Дифференцирование выражения (9.104) по t в этом случае дает

$$\dot{a} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) - 2\Lambda\omega \sin \omega t. \quad (9.106)$$

Сравнивая формулы (9.105) и (9.106), находим

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (9.107)$$

Далее, дифференцируя (9.105) по t , получаем

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) - 2\Lambda\omega^2 \cos \omega t. \quad (9.108)$$

Подставляя соотношения (9.104), (9.105) и (9.108) в (9.104), имеем

$$\begin{aligned} & -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) - 2\Lambda\omega^2 \cos \omega t - \\ & - 2\epsilon\mu a \sin(t + \beta) - 4\epsilon\mu\omega\Lambda \sin \omega t + a \cos(t + \beta) + \\ & + 2\Lambda \cos \omega t + \epsilon [a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t]^3 = F \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Поскольку, согласно формуле (9.12), $2\Lambda = (1 - \omega^2)^{-1}F$, соотношение (9.109) сводится к уравнению вида

$$\begin{aligned} & \dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = -2\epsilon\mu [a \sin(t + \beta) + \\ & + 2\omega\Lambda \sin \omega t] + \epsilon [a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t]^3. \end{aligned} \quad (9.110)$$

Умножая (9.107) на $\cos(t + \beta)$, а (9.110) — на $\sin(t + \beta)$ и складывая результаты, получаем

$$\begin{aligned} & \dot{a} = -2\epsilon\mu \sin(t + \beta) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin \omega t] + \\ & + \epsilon \sin(t + \beta) [a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t]^3. \end{aligned} \quad (9.111)$$

Подставляя (9.111) в уравнение (9.107) и разрешая его относительно $a\dot{\beta}$, имеем

$$\begin{aligned} & a\dot{\beta} = -2\epsilon\mu \cos(t + \beta) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin \omega t] + \\ & + \epsilon \cos(t + \beta) [a \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos \omega t]^3. \end{aligned} \quad (9.112)$$

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений (9.111), (9.112) вместо уравнения (9.4).

Возводя в куб последние члены в уравнениях (9.111) и (9.112), перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} & \dot{a} = -2\epsilon\mu \sin(t + \beta) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin \omega t] + \epsilon \sin(t + \beta) \times \\ & \times [a^3 \cos^3(t + \beta) + 6a^2\Lambda \cos^2(t + \beta) \cos \omega t + 12a\Lambda^2 \cos(t + \beta) \times \\ & \times \cos^2 \omega t + 8\Lambda^3 \cos^3 \omega t], \end{aligned} \quad (9.113)$$

$$\begin{aligned} & a\dot{\beta} = -2\epsilon\mu \cos(t + \beta) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin \omega t] + \epsilon \cos(t + \beta) \times \\ & \times [a^3 \cos^3(t + \beta) + 6a^2\Lambda \cos^2(t + \beta) \cos \omega t + 12a\Lambda^2 \cos(t + \beta) \times \\ & \times \cos^2 \omega t + 8\Lambda^3 \cos^3 \omega t]. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Используя известные тригонометрические формулы (см. приложение А), придадим системе (9.113), (9.114) вид

$$\begin{aligned} \dot{a} = \varepsilon \bigg\{ & -\mu a + \mu a \cos(2t + 2\beta) - 2\omega\mu\Lambda \cos[(1 - \omega)t + \beta] + \\ & + 2\omega\mu\Lambda \cos[(1 + \omega)t + \beta] + \left(\frac{1}{4}a^3 + 3a\Lambda^2\right) \sin(2t + 2\beta) + \\ & + \frac{1}{8}a^3 \sin(4t + 4\beta) + \left(\frac{3}{4}a^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \sin[(1 + \omega)t + \beta] + \\ & + \left(\frac{3}{4}a^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \sin[(1 - \omega)t + \beta] + \\ & + \frac{3}{4}a\Lambda^2 \sin[(3 + \omega)t + 3\beta] + \frac{3}{4}a^2\Lambda \sin[(3 - \omega)t + 3\beta] + \\ & + \frac{3}{2}a\Lambda^2 \sin[(2 + 2\omega)t + 2\beta] + \frac{3}{2}a\Lambda^2 \sin[(2 - 2\omega)t + 2\beta] + \\ & + \Lambda^3 \sin[(1 + 3\omega)t + \beta] + \Lambda^3 \sin[(1 - 3\omega)t + \beta] \bigg\}, \quad (9.115) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = \varepsilon \bigg\{ & -\mu a \sin(2t + 2\beta) - 2\omega\mu\Lambda \sin[(\omega + 1)t + \beta] - \\ & - 2\omega\mu\Lambda \sin[(\omega - 1)t - \beta] + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2}a^3 + 3a\Lambda^2\right) \cos(2t + 2\beta) + \frac{1}{8}a^3 \cos(4t + 4\beta) + \\ & + \left(\frac{9}{4}a^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \cos[(1 + \omega)t + \beta] + \\ & + \left(\frac{9}{4}a^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \cos[(1 - \omega)t + \beta] + \\ & + \frac{3}{4}a^2\Lambda \cos[(3 + \omega)t + 3\beta] + \frac{3}{4}a^2\Lambda \cos[(3 - \omega)t + 3\beta] + \\ & + \frac{3}{2}a\Lambda^2 \cos[(2 + 2\omega)t + 2\beta] + \\ & + \frac{3}{2}a\Lambda^2 \cos[(2 - 2\omega)t + 2\beta] + 3a\Lambda^2 \cos 2\omega t + \\ & + \Lambda^3 \cos[(1 + 3\omega)t + \beta] + \Lambda^3 \cos[(1 - 3\omega)t + \beta] \bigg\}. \quad (9.116) \end{aligned}$$

В первом приближении мы должны сохранить в уравнениях (9.115), (9.116) только медленно меняющиеся слагаемые. Члены $-\varepsilon\mu a$ и $\varepsilon\left(\frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2\right)$ не зависят от частоты ω , во все же остальные члены частота ω входит явным образом. Отметим, что соответствующий член уравнения будет медленно меняющимся, если коэффициент при t (т. е. частота) мал. Анализируя правые

части уравнений (9.115), (9.116), приходим к выводу, что медленно меняющиеся члены возникают при частоте ω , близкой к значениям 0, 1, 3 и $\frac{1}{3}$. Случай $\omega \approx 1$ следует исключить из рассмотрения, поскольку при этом малый знаменатель появляется уже в главном приближении u_0 . Этот случай рассматривается в разд. 9.3.2. Остальные случаи последовательно рассмотрены ниже.

Случай ω , отличной от 0, 3 и $\frac{1}{3}$

В этом случае медленно меняющимися оказываются только члены, не зависящие от t . Поэтому из системы уравнений (9.115), (9.116) следует, что

$$\dot{a} = -\varepsilon \mu a, \quad (9.117)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 + 3\varepsilon a \Lambda^2, \quad (9.118)$$

откуда

$$\begin{aligned} a &= a_0 e^{-\varepsilon \mu t}, \\ \beta &= -\frac{3}{16\mu} a_0^2 e^{-2\varepsilon \mu t} + 3\varepsilon \Lambda^2 t + \beta_0, \end{aligned} \quad (9.119)$$

где a_0 и β_0 — произвольные постоянные.

Случай $\omega \approx 3$

В этом случае медленно меняющимися членами являются $\sin [(3 - \omega)t + 3\beta]$ в уравнении (9.115) и $\cos [(3 - \omega)t + 3\beta]$ в (9.116). Следовательно,

$$\dot{a} = -\varepsilon \mu a + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 \Lambda \sin [(3 - \omega)t + 3\beta], \quad (9.120)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 + 3\varepsilon a \Lambda^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 \Lambda \cos [(3 - \omega)t + 3\beta]. \quad (9.121)$$

Система (9.120), (9.121) совпадает с системой (9.34), (9.35), полученной по методу многих масштабов, если учесть, что $\omega - 3 = \varepsilon \sigma$.

Случай $\omega \approx \frac{1}{3}$

Здесь медленно меняющимися слагаемыми являются $\sin [(1 - 3\omega)t + \beta]$ в уравнении (9.115) и $\cos [(1 - 3\omega)t + \beta]$ в уравнении (9.116). Следовательно,

$$\dot{a} = -\varepsilon \mu a + \varepsilon \Lambda^3 \sin [(1 - 3\omega)t + \beta], \quad (9.122)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{3}{8} \varepsilon a^3 + 3\varepsilon a \Lambda^2 + \varepsilon \Lambda^3 \cos [(1 - 3\omega)t + \beta]. \quad (9.123)$$

Система (9.122), (9.123) совпадает с системой уравнений (9.53) и (9.54), полученной по методу многих масштабов, если учесть, что $3\omega - 1 = \varepsilon \sigma$.

Случай $\omega \approx 0$

В этом случае в уравнении (9.115) нет медленно меняющихся членов, а уравнение (9.116) содержит медленно меняющееся слагаемое $\cos 2\omega t$. Следовательно,

$$\dot{a} = -\epsilon \mu a, \quad (9.124)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{3}{8}\epsilon a^3 + 3\epsilon a\Lambda^2 + 3\epsilon a\Lambda^2 \cos 2\omega t, \quad (9.125)$$

что совпадает с системой (9.71), (9.72), полученной по методу многих масштабов, если учесть, что $\omega = \epsilon\sigma$ и $\Lambda \approx F/2$.

9.3.2. ПЕРВИЧНЫЙ РЕЗОНАНС

При $\epsilon = 0$ общее решение уравнения (9.82) может быть записано в виде

$$u = a \cos(t + \beta), \quad (9.126)$$

где a и β — произвольные постоянные. При этом

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta). \quad (9.127)$$

Если $\epsilon \neq 0$, по-прежнему представляем решение в форме (9.126) с наложенным на него условием (9.127), но при этом считаем, что a и β зависят от времени. Дифференцирование выражения (9.126) по t дает

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta). \quad (9.128)$$

Из сравнения формул (9.127) и (9.128) следует, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (9.129)$$

Дифференцирование (9.127) по t дает

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta). \quad (9.130)$$

Подставляя выражения (9.126), (9.127) и (9.130) в уравнение (9.82), получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = & -2\epsilon \mu a \sin(t + \beta) + \\ & + \epsilon a^3 \cos^3(t + \beta) - \epsilon f \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9.131)$$

Разрешая теперь (9.129) и (9.131) относительно \dot{a} и $a\dot{\beta}$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -2\epsilon \mu a \sin^2(t + \beta) + \\ & + \epsilon a^3 \sin(t + \beta) \cos^3(t + \beta) - \epsilon f \sin(t + \beta) \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9.132)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & -2\epsilon \mu a \sin(t + \beta) \cos(t + \beta) + \\ & + \epsilon a^3 \cos^4(t + \beta) - \epsilon f \cos(t + \beta) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9.133)$$

Используя известные тригонометрические формулы (см. приложение А), перепишем уравнения (9.132) и (9.133) в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\epsilon \mu a + \epsilon \mu a \cos(2t + 2\beta) + \frac{1}{4} \epsilon a^3 \sin(2t + 2\beta) + \\ & + \frac{1}{8} \epsilon a^3 \sin(4t + 4\beta) - \frac{1}{2} \epsilon f \sin[(1 + \omega)t + \beta] - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon f \sin[(1 - \omega)t + \beta], \end{aligned} \quad (9.134)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & -\epsilon \mu a \sin(2t + 2\beta) + \frac{3}{8} \epsilon a^3 + \frac{1}{2} \epsilon a^3 \cos(2t + 2\beta) + \\ & + \frac{1}{8} \epsilon a^3 \cos(4t + 4\beta) - \frac{1}{2} \epsilon f \cos[(1 + \omega)t + \beta] - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon f \cos[(1 - \omega)t + \beta]. \end{aligned} \quad (9.135)$$

В первом приближении следует сохранить только медленно меняющиеся слагаемые в правых частях уравнений (9.134), (9.135). В случае первичного резонанса $\omega \approx 1$, и медленно меняющимися членами являются $\sin[(1 - \omega)t + \beta]$ в (9.134) и $\cos[(1 - \omega)t + \beta]$ в (9.135). Таким образом, приходим к системе

$$\dot{a} = -\epsilon \mu a - \frac{1}{2} \epsilon f \sin[(1 - \omega)t + \beta], \quad (9.136)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{3}{8} \epsilon a^3 - \frac{1}{2} \epsilon f \cos[(1 - \omega)t + \beta], \quad (9.137)$$

которая полностью совпадает с системой (9.94), (9.95), полученной по методу многих масштабов, если учесть, что $\omega - 1 = \epsilon \sigma$.

Упражнения

9.1. Отклик системы с квадратичными нелинейностями на синусоидальное возбуждение описывается уравнением

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2\epsilon \mu \dot{u} + \epsilon \alpha u^2 + K \cos \Omega t.$$

а) Используя метод многих масштабов, показать, что

$$u_0 = A e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A} e^{i\Omega T_0} + (\text{к. с.}),$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 (A' + \mu A) e^{i\omega_0 T_0} - 2i\mu \Lambda \Omega e^{i\Omega T_0} -$$

$$- \alpha \{ A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + \Lambda^2 e^{2i\Omega T_0} + A\bar{A} + \Lambda^2 + 2\bar{A}\Lambda e^{i(\Omega - \omega_0) T_0} + \\ + 2A\Lambda e^{i(\Omega + \omega_0) T_0} \} + (\text{к. с.}).$$

Чему равно Λ ?

б) Для случая $2\Omega = \omega_0 + \epsilon \sigma$ показать, что

$$2i\omega_0 (A' + \mu A) + \alpha \Lambda^2 e^{i\sigma T_1} = 0.$$

Решить это уравнение относительно A и затем найти решение, соответствующее установившемуся режиму.

в) Для случая $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon \sigma$ показать, что

$$i\omega_0 (A' + \mu A) + \alpha \bar{A}\Lambda e^{i\sigma T_1}.$$

Решить это уравнение относительно A . Указать условия, при которых амплитуда A будет неограниченной.

9.2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + \varepsilon k \cos \Omega t.$$

Для случая $\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$, используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta),$$

где

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^2 \right) a + \frac{\varepsilon k}{2\omega_0} \sin(\varepsilon \sigma t - \beta),$$

$$a \dot{\beta} = \frac{\varepsilon k}{2\omega_0} \cos(\varepsilon \sigma t - \beta).$$

9.3. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + K \cos \Omega t,$$

где Ω не совпадает с частотами $3\omega_0$, $\omega_0/3$ и 0. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) - \frac{K}{\Omega^2 - \omega_0^2} \cos \Omega t,$$

где

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\eta - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^2 \right) a, \quad \dot{\beta} = 0.$$

Определить величину η .

9.4. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right) + K \cos \Omega t,$$

где $3\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) - \frac{K}{\Omega^2 - \omega_0^2} \cos \Omega t,$$

где

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\eta - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^2 \right) a + \Gamma \cos(\varepsilon \sigma t - \beta),$$

$$a \dot{\beta} = \varepsilon \Gamma \sin(\varepsilon \sigma t - \beta).$$

Определить величины η и Γ .

9.5. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \left(\dot{u} - \frac{1}{3} \dot{u}^3 \right),$$

где $\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon \sigma$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) - \frac{K}{\Omega^2 - \omega_0^2} \cos \Omega t,$$

где

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\eta - \frac{1}{4} \omega_0^2 a^2 \right) a + \frac{1}{4} \varepsilon \omega_0 \xi \cos(\varepsilon \sigma t - 3\beta),$$

$$a \dot{\beta} = \frac{1}{4} \varepsilon \omega_0 \xi a^2 \sin(\varepsilon \sigma t - 3\beta).$$

Определить величины η и ξ .

9.6. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + u = -\varepsilon \dot{u} |\dot{u}| + 2ek \cos \Omega t,$$

где $\Omega = 1 + \varepsilon\sigma$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(t + \beta) + \dots,$$

где

$$\dot{a} = -\frac{4ea^2}{3\pi} + ek \sin(\varepsilon\sigma t - \beta),$$

$$a\dot{\beta} = -ek \cos(\varepsilon\sigma t - \beta).$$

9.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon u^2 \dot{u} = 2ek \cos \Omega t,$$

где $\Omega = 1 + \varepsilon\sigma$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, показать, что

$$u = a \cos(t + \beta),$$

где

$$\dot{a} = -\frac{1}{4} \varepsilon a^3 + ek \sin(\varepsilon\sigma t - \beta),$$

$$a\dot{\beta} = -ek \cos(\varepsilon\sigma t - \beta).$$

9.8. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^4 = 2K \cos \Omega t.$$

Показать, что резонансы первого порядка существуют при $\Omega \approx 4\omega_0, 2\omega_0, \omega_0/4, \omega_0/2, 2\omega_0/3$ и $3\omega_0/2$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, вывести уравнения, описывающие изменения амплитуды и фазы в каждом случае.

МНОГОЧАСТОТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ

В то время как в предыдущей главе мы имели дело с одночастотным возбуждением, предметом исследования в данной главе будет многочастотное возбуждение. Для того чтобы уменьшить объем вычислений, будем рассматривать систему с квадратичной нелинейностью, находящуюся под действием двухчастотного возбуждения. Итак, обратимся к уравнению

$$\ddot{u} + u + 2\epsilon\mu\dot{u} + \epsilon u^2 = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos (\omega_2 t + \nu), \quad (10.1)$$

где ν — постоянная фаза, а F_n и ω_n — некоторые постоянные. Как и ранее, прежде всего построим прямое разложение и исследуем его равномерность, чтобы выявить малые знаменатели и, следовательно, возможные резонансы. В § 10.2, с тем чтобы построить равномерно пригодные разложения первого порядка для некоторых из этих резонансов, мы используем метод многих масштабов. В § 10.3 рассмотрим эти резонансы с помощью первого приближения метода усреднения.

10.1. Прямое разложение

Будем разыскивать (двучленное) разложение первого порядка для решения u в виде ряда по степеням ϵ

$$u(t, \epsilon) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \dots \quad (10.2)$$

Подставляя (10.2) в уравнение (10.1), имеем

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \epsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \epsilon u_1 + \dots + 2\epsilon\mu(\dot{u}_0 + \dots) + \\ + \epsilon(u_0 + \dots)^2 = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos (\omega_2 t + \nu), \\ \ddot{u}_0 + u_0 + \epsilon(u_1 + u_1 + 2\mu\dot{u}_0 + u_0^2) + \dots = \\ = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos (\omega_2 t + \nu). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Приравнивая коэффициенты при последовательных степенях ϵ в обеих частях уравнения (10.3), получаем

$$\ddot{u}_0 + u_0 = F_1 \cos \omega_1 t + F_2 \cos (\omega_2 t + \nu), \quad (10.4)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\mu\dot{u}_0 - u_0^2. \quad (10.5)$$

Общее решение уравнения (10.4) может быть получено так же, как в § 9.1 или в приложении Б. Оно имеет вид

$$u_0 = a \cos(t + \beta) + 2\Lambda_1 \cos \omega_1 t + 2\Lambda_2 \cos(\omega_2 t + \nu), \quad (10.6)$$

где a и β — произвольные постоянные, а

$$\Lambda_n = \frac{1}{2} (1 - \omega_n^2)^{-1} F_n.$$

При этом уравнение (10.5) принимает вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\mu [a \sin(t + \beta) + 2\Lambda_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + 2\Lambda_2 \omega_2 \times \\ \times \sin(\omega_2 t + \nu)] - [a \cos(t + \beta) + 2\Lambda_1 \cos \omega_1 t + \\ + 2\Lambda_2 \cos(\omega_2 t + \nu)]^2,$$

или

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\mu [a \sin(t + \beta) + 2\Lambda_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + 2\Lambda_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \nu)] - \\ - a^2 \cos^2(t + \beta) - 4\Lambda_1^2 \cos^2 \omega_1 t - 4\Lambda_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \nu) - \\ - 4a\Lambda_1 \cos(t + \beta) \cos \omega_1 t - 4a\Lambda_2 \cos(t + \beta) \cos(\omega_2 t + \nu) - \\ - 8\Lambda_1 \Lambda_2 \cos \omega_1 t \cos(\omega_2 t + \nu). \quad (10.7)$$

Используя известные тригонометрические формулы, перепишем уравнение (10.7) в виде

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\mu [a \sin(t + \beta) + 2\Lambda_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + 2\Lambda_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \nu)] - \\ - \left(\frac{1}{2} a^2 + 2\Lambda_1^2 + 2\Lambda_2^2 \right) - \frac{1}{2} a^2 \cos(2t + 2\beta) - \\ - 2\Lambda_1^2 \cos 2\omega_1 t - 2\Lambda_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\nu) - \\ - 2a\Lambda_1 \cos[(1 + \omega_1)t + \beta] - 2a\Lambda_1 \cos[(1 - \omega_1)t + \beta] + \\ + 2a\Lambda_2 \cos[(1 + \omega_2)t + \beta + \nu] - 2a\Lambda_2 \times \\ \times \cos[(1 - \omega_2)t + \beta - \nu] - 4\Lambda_1 \Lambda_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \nu] - \\ - 4\Lambda_1 \Lambda_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \nu]. \quad (10.8)$$

Как указывалось ранее, решение однородного уравнения мы учитываем только при построении решения u_0 . Частное решение уравнения (10.8) имеет вид (см. § Б.4)

$$u_1 = \left[-\mu a t \cos(t + \beta) + \frac{4\mu\Lambda_1\omega_1}{1 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + \frac{4\mu\Lambda_2\omega_2}{1 - \omega_2^2} \sin(\omega_2 t + \nu) \right] - \\ - \left(\frac{1}{2} a^2 + 2\Lambda_1^2 + 2\Lambda_2^2 \right) + \frac{1}{6} a^2 \cos(2t + 2\beta) - \\ - \frac{2\Lambda_1^2}{1 - 4\omega_1^2} \cos 2\omega_1 t - \frac{2\Lambda_2^2}{1 - 4\omega_2^2} \cos(2\omega_2 t + 2\nu) + \\ + \frac{2a\Lambda_1}{2\omega_1 + \omega_1^2} \cos[(1 + \omega_1)t + \beta] - \frac{2a\Lambda_1}{2\omega_1 - \omega_1^2} \cos[(1 - \omega_1)t + \beta] + \\ + \frac{2a\Lambda_2}{2\omega_2 + \omega_2^2} \cos[(1 + \omega_2)t + \beta + \nu] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2a\Lambda_2}{2\omega_2 - \omega_2^2} \cos[(1 - \omega_2)t + \beta + \nu] - \\
& - \frac{4\Lambda_1\Lambda_2}{1 - (\omega_1 + \omega_2)^2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \nu] - \\
& - \frac{4\Lambda_1\Lambda_2}{1 - (\omega_2 - \omega_1)^2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \nu]. \quad (10.9)
\end{aligned}$$

Подставляя (10.6) и (10.9) в уравнение (10.2) и используя определение Λ_n , имеем

$$\begin{aligned}
u = & a \cos(t + \beta) + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + \\
& + \varepsilon \left\{ -\mu a t \cos(t + \beta) + \frac{2\mu F_1 \omega_1}{(1 - \omega_1^2)^2} \sin \omega_1 t + \right. \\
& + \frac{2\mu F_2 \omega_2}{(1 - \omega_2^2)^2} \sin(\omega_2 t + \nu) - \frac{1}{2} a^2 - \frac{F_1^2}{2(1 - \omega_1^2)^2} - \\
& - \frac{F_2^2}{2(1 - \omega_2^2)^2} + \frac{1}{6} a^2 \cos(2t + 2\beta) - \\
& - \frac{F_1^2}{2(1 - \omega_1^2)^2(1 - 4\omega_1^2)} \cos 2\omega_1 t - \frac{F_2^2}{2(1 - \omega_2^2)^2(1 - 4\omega_2^2)} \times \\
& \times \cos(2\omega_2 t + 2\nu) + \frac{aF_1}{(1 - \omega_1^2)(2\omega_1 + \omega_1^2)} \cos[(1 + \omega_1)t + \beta] - \\
& - \frac{aF_1}{(1 - \omega_1^2)(2\omega_1 - \omega_1^2)} \cos[(1 - \omega_1)t + \beta] + \\
& + \frac{aF_2}{(1 - \omega_2^2)(2\omega_2 + \omega_2^2)} \cos[(1 + \omega_2)t + \beta + \nu] - \\
& - \frac{aF_2}{(1 - \omega_2^2)(2\omega_2 - \omega_2^2)} \cos[(1 - \omega_2)t + \beta - \nu] - \\
& - \frac{F_1 F_2}{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)[1 - (\omega_1 + \omega_2)^2]} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \nu] - \\
& - \left. \frac{F_1 F_2}{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)[1 - (\omega_1 - \omega_2)^2]} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \nu] \right\} + \dots \quad (10.10)
\end{aligned}$$

Уравнение (10.10) показывает, что малые знаменатели появляются в тех случаях, когда $\omega_1 \approx 1$, $\omega_1 \approx 1/2$, $\omega_1 \approx 2$, $\omega_2 \approx 1$, $\omega_2 \approx 1/2$, $\omega_2 \approx 2$, $\omega_2 + \omega_1 \approx 1$ и $\omega_2 - \omega_1 \approx 1$. Поскольку при $\omega_1 \approx 1$ и $\omega_2 \approx 1$ малые знаменатели возникают в первом члене разложения, эти случаи называются первичными, или основными, резонансами. Все остальные резонансы называются вторичными, поскольку соответствующие и малые знаменатели появляются в высших приближениях. Случаи $\omega_1 \approx 1/2$ и $\omega_2 \approx 1/2$ называются супергармоническими резонансами порядка 2, поскольку при этом в системе возбуждаются свободные колебания с частотой 1, равной приблизительно $2\omega_1$ или $2\omega_2$. Случаи $\omega_1 \approx 2$ и $\omega_2 \approx 2$ называются субгармоническими резонансами порядка

1/2, так как при этом возбуждаются свободные колебания с частотой, примерно равной $\omega_1/2$ или $\omega_2/2$. Случай $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$ называется *комбинационным резонансом суммарного типа*, а случай $\omega_2 - \omega_1 \approx 1$ — *комбинационным резонансом разностного типа*. В следующем параграфе мы покажем, как метод многих масштабов может использоваться для построения равномерно пригодных разложений в случае вторичных резонансов. Что касается основных резонансов, то их исследование проводится так же, как это описано в предыдущей главе.

10.2. Метод многих масштабов

Если ограничиться членами первого порядка, то наряду с быстрым временем $T_0 = t$ следует ввести медленное время $T_1 = \varepsilon t$. При этом

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots,\end{aligned}$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$. Тогда уравнение (10.1) примет вид

$$\begin{aligned}D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + \dots + u + 2\varepsilon \mu (D_0 u + \varepsilon D_1 u + \dots) + \varepsilon u^2 = \\ = F_1 \cos \omega_1 T_0 + F_2 \cos(\omega_2 T_0 + \nu).\end{aligned}\quad (10.11)$$

Будем разыскивать приближенное решение уравнения (10.11) в форме

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в уравнение (10.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих его частях, получаем

$$D_0^2 u_0 + u_0 = F_1 \cos \omega_1 T_0 + F_2 \cos(\omega_2 T_0 + \nu), \quad (10.13)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - u_0^2. \quad (10.14)$$

Общее решение (10.13) можно записать в следующей комплексной форме:

$$\begin{aligned}u_0 &= A(T_1) e^{i T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i T_0} + \Lambda_1 e^{i \omega_1 T_0} + \\ &+ \bar{\Lambda}_1 e^{-i \omega_1 T_0} + \Lambda_2 e^{i \omega_2 T_0} + \bar{\Lambda}_2 e^{-i \omega_2 T_0},\end{aligned}\quad (10.15)$$

$$\text{где} \quad \Lambda_1 = \frac{F_1}{2(1-\omega_1^2)}, \quad \Lambda_2 = \frac{F_2 e^{i \nu}}{2(1-\omega_2^2)}. \quad (10.16)$$

При этом уравнение (10.14) принимает вид

$$\begin{aligned}D_0^2 u_1 + u_1 &= -2i(A' + \mu A) e^{i T_0} - 2i\mu \omega \Lambda_1 e^{i \omega_1 T_0} - 2i\mu \omega_2 \Lambda_2 e^{i \omega_2 T_0} - \\ &- A^2 e^{2i T_0} - \Lambda_1^2 e^{2i \omega_1 T_0} - \Lambda_2^2 e^{2i \omega_2 T_0} - A\bar{A} - \Lambda_1^2 - \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 - \\ &- 2A\Lambda_1 e^{i(1+\omega_1)T_0} - 2A\Lambda_1 e^{i(1-\omega_1)T_0} - 2A\Lambda_2 e^{i(1+\omega_2)T_0} - \\ &- 2A\bar{\Lambda}_2 e^{i(1-\omega_2)T_0} - 2\Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_1+\omega_2)T_0} - \\ &- 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_2 e^{i(\omega_2-\omega_1)T_0} + (\text{к. с.}).\end{aligned}\quad (10.17)$$

Как и в предыдущем параграфе, частные решения уравнения (10.17) содержат секулярные члены и члены с малыми знаменателями. Для того чтобы разложение было равномерным, эти члены должны быть уничтожены с помощью подходящего выбора функции A . Тот или иной выбор A зависит от типа возникающего резонанса. Ниже мы рассмотрим два случая: а) $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$ б) $\omega_2 - \omega_1 \approx 1$ и $\omega_2 \approx 2$.

10.2.1. случай $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$

В этом случае предполагаем, что $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$, а все остальные резонансы в членах первого порядка отсутствуют. Чтобы описать близость суммы $\omega_1 + \omega_2$ к единице количественно, введем параметр расстройки σ , определив его с помощью соотношения

$$\omega_1 + \omega_2 = 1 + \varepsilon\sigma. \quad (10.18)$$

Единственными членами в уравнении (10.17), которые могут порождать малые знаменатели, являются член $-2\Lambda_1\Lambda_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0]$ и член, комплексно-сопряженный с ним. Используя соотношение (10.18), перепишем этот член в виде

$$-2\Lambda_1\Lambda_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} = -2\Lambda_1\Lambda_2 e^{i(1 + \varepsilon\sigma)T_0} = -2\Lambda_1\Lambda_2 e^{iT_0 + i\varepsilon\sigma T_1}.$$

При этом уравнение (10.17) примет вид

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} - 2\Lambda_1\Lambda_2 e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н.С.Ч.}), \quad (10.19)$$

где символ Н. С. Ч. обозначает члены, не дающие вклада в секулярные слагаемые. Требование отсутствия секулярных членов в решении уравнения (10.19) приводит к соотношению

$$2i(A' + \mu A) + 2\Lambda_1\Lambda_2 e^{i\sigma T_1} = 0,$$

или

$$A' + \mu A = i\Lambda_1\Lambda_2 e^{i\sigma T_1}. \quad (10.20)$$

В данном случае уравнение (10.20) для комплексной амплитуды, поскольку оно является линейным неоднородным уравнением первого порядка, допускает точное решение; при этом представлять A в показательной форме не требуется. Решение однородного уравнения имеет вид

$$A = ce^{-\mu T_1}, \quad (10.21)$$

где c — комплексная постоянная. Так как правая часть уравнения (10.20) содержит экспоненту, то соответствующее ей частное решение можно искать в форме

$$A = be^{i\sigma T_1}. \quad (10.22)$$

Подстановка (10.22) в уравнение (10.20) дает

$$i\sigma be^{i\sigma T_1} + \mu be^{i\sigma T_1} + i\Lambda_1\Lambda_2 e^{i\sigma T_1},$$

или

$$i\sigma b + \mu b = i\Lambda_1\Lambda_2,$$

откуда

$$b = \frac{i\Lambda_1\Lambda_2}{\mu + i\sigma}.$$

При этом общее решение уравнения (10.20) имеет вид

$$A = ce^{-\mu T_1} + \frac{i\Lambda_1\Lambda_2}{\mu + i\sigma} e^{i\sigma T_1}. \quad (10.23)$$

Подставляя выражение для A в формулу (10.15), а затем подставляя полученный результат в разложение (10.12), получаем

$$u = \left[ce^{-\mu t} + \frac{i\Lambda_1\Lambda_2}{\mu + i\sigma} e^{i\sigma t} \right] e^{it} + \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + \Lambda_2 e^{i\omega_2 t} + (\text{к. с.}) + O(\varepsilon). \quad (10.24)$$

Представим теперь постоянную c в показательной форме $c = (1/2) a_0 \exp(i\beta_0)$ и подставим выражения (10.16) для Λ_n в (10.24). В результате имеем

$$u = \frac{1}{2} e^{-\varepsilon\mu t} e^{i(t+\beta_0)} + \frac{iF_1F_2}{4(\mu + i\sigma)(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} e^{i((1+\varepsilon\sigma)t + i\nu)} + \\ + \frac{F_1}{2(1 - \omega_1^2)} e^{i\omega_1 t} + \frac{F_2}{2(1 - \omega_2^2)} e^{i(\omega_2 t + \nu)} + (\text{к. с.}) + O(\varepsilon). \quad (10.25)$$

Заметим, что $1 + \varepsilon\sigma = \omega_1 + \omega_2$ (см. (10.18)) и

$$\frac{1}{\mu + i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} e^{-i \arctg(\sigma/\mu)}.$$

Следовательно, мы можем переписать решение (10.25) в виде

$$u = a_0 e^{-\varepsilon\mu t} \cos(t + \beta_0) - \frac{F_1F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \times \\ \times \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t + \nu - \arctg \frac{\sigma}{\mu}\right] + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \\ + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon). \quad (10.26)$$

При $t \rightarrow \infty$ первый член в правой части (10.26) стремится к нулю, и u стремится к следующему установившемуся решению:

$$u = \frac{F_1F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t + \nu - \arctg \frac{\sigma}{\mu}\right] + \\ + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon). \quad (10.27)$$

10.2.2. СЛУЧАЙ $\omega_2 - \omega_1 \approx 1 \equiv \omega_1 \approx 2$

В этом случае предположим, что два резонанса существуют одновременно, а именно $\omega_2 - \omega_1 \approx 1$ и $\omega_1 \approx 2$; другими словами, имеем $\omega_1 \approx 2$ и $\omega_2 \approx 3$. Для того чтобы исследовать этот случай более подробно, введем два параметра расстройки σ_1 и σ_2 , определив их соотношениями

$$\omega_1 = 2 + \varepsilon\sigma_1, \quad \omega_2 = 3 + \varepsilon\sigma_2. \quad (10.28)$$

Подставляя (10.28) в уравнение (10.17), имеем

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} - 2\Lambda_1 \bar{A} e^{iT_0 + i\sigma T_0} - \\ - 2\Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_0} e^{iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч}),$$

или

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2i(A' + \mu A)e^{iT_0} - 2\Lambda_1 \bar{A} e^{i\sigma T_1} e^{iT_0} - \\ - 2\Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_1} e^{iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч}). \quad (10.29)$$

Уничтожая секулярные члены, получаем

$$i(A' + \mu A) + \Lambda_1 \bar{A} e^{i\sigma_1 T_1} + \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_1} = 0. \quad (10.30)$$

Уравнение (10.30) представляет собой неоднородное уравнение с переменными коэффициентами. Прежде всего преобразуем его в неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Введя с этой целью подстановку

$$A = B e^{i\lambda T_1}, \quad (10.31)$$

где λ — вещественное число, получим

$$i(B' + i\lambda B + \mu B) e^{i\lambda T_1} + \Lambda_1 \bar{B} e^{i(\sigma_1 - \lambda) T_1} + \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_1} = 0,$$

или

$$i(B' + i\lambda B + \mu B) + \Lambda_1 \bar{B} e^{i(\sigma_1 - \lambda) T_1} + \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1 - \lambda) T_1} = 0. \quad (10.32)$$

Если выбрать $\lambda = \sigma_1/2$, то коэффициенты при B и \bar{B} не будут зависеть от T_1 , и тогда уравнение (10.32) примет вид

$$i\left(B' + \frac{1}{2}i\sigma_1 B + \mu B\right) + \Lambda_1 \bar{B} + \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\sigma_2 - 3\sigma_1/2) T_1} = 0. \quad (10.33)$$

Вместо того чтобы выражать B в показательной форме, как в предыдущих случаях, представим B в виде

$$B = B_r + iB_i. \quad (10.34)$$

Возникающие при этом уравнения решаются легче, чем уравнения относительно модуля и аргумента B . Подставляя (10.34) в уравнение (10.33) и используя (10.16), с тем чтобы представить Λ_2 в показательной форме, получаем

$$iB_r' - iB_i' - \frac{1}{2}\sigma_1 B_r - \frac{1}{2}i\sigma_1 B_i + i\mu B - \mu B_i + \\ + \Lambda_1 B_r - i\Lambda_1 B_i + \Gamma \cos(\sigma T_1 + \nu) + i\Gamma \sin(\sigma T_1 + \nu) = 0, \quad (10.35)$$

$$\text{где} \quad \Gamma = \frac{\Lambda_1 F_2}{2(1 - \omega_2^2)}, \quad \sigma = \sigma_2 - \frac{3}{2}\sigma_1. \quad (10.36)$$

Отделение действительной и мнимой частей в (10.35) дает

$$B_r' + \mu B_r - \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1\right) B_i = -\Gamma \sin(\sigma T_1 + \nu), \quad (10.37)$$

$$B_i' + \mu B_i - \left(\Lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1\right) B_r = \Gamma \cos(\sigma T_1 + \nu). \quad (10.38)$$

Поскольку (10.37) и (10.38) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений относительно B_r и B_i , их общее решение можно получить как сумму общего решения однородной системы и некоторого частного решения. Общее решение однородной системы можно получить, представив B_r и B_i в виде

$$B_r = b_r e^{\gamma T_1}, \quad B_i = b_i e^{\gamma T_1}. \quad (10.39)$$

Подставляя теперь (10.39) в систему уравнений (10.37), (10.38) и приравнявая нулю ее правую часть, получаем

$$(\gamma + \mu) b_r - \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) b_i = 0, \quad (10.40)$$

$$-\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) b_r + (\gamma + \mu) b_i = 0. \quad (10.41)$$

Таким образом, наша задача свелась к решению системы двух линейных однородных алгебраических уравнений. Поскольку нас интересуют нетривиальные решения для b_r и b_i , определитель системы (10.40), (10.41)

$$\begin{vmatrix} \gamma + \mu & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \\ -\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) & \gamma + \mu \end{vmatrix}$$

должен обращаться в нуль. При этом

$$(\gamma + \mu)^2 - \Lambda_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^2 = 0. \quad (10.42)$$

Это условие можно было бы получить и путем исключения b_r и b_i из системы (10.40), (10.41). Из уравнения (10.42) следует, что

$$\gamma + \mu = \pm \sqrt{\Lambda_1^2 - \frac{1}{4} \sigma_1^2}. \quad (10.43)$$

Следовательно, существуют два возможных значения γ . Они даются формулами

$$\gamma_1 = -\mu - \sqrt{\Lambda_1^2 - \frac{1}{4} \sigma_1^2}, \quad \gamma_2 = -\mu + \sqrt{\Lambda_1^2 - \frac{1}{4} \sigma_1^2}. \quad (10.44)$$

Далее, из уравнения (10.40) получаем, что

$$b_i = \frac{\gamma + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1} b_r. \quad (10.45)$$

Поэтому если

$$B_r = b_1 e^{\gamma_1 T_1} + b_2 e^{\gamma_2 T_1}, \quad (10.46)$$

то из соотношения (10.45) имеем

$$B_i = \frac{\gamma_1 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1} b_1 e^{\gamma_1 T_1} + \frac{\gamma_2 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1} b_2 e^{\gamma_2 T_1}, \quad (10.47)$$

где b_1 и b_2 — произвольные постоянные.

Частное решение системы (10.37), (10.38) можно построить с помощью метода неопределенных коэффициентов. Поскольку правые части системы содержат синусы и косинусы аргумента $\sigma T_1 + \nu$, а уравнения системы имеют постоянные коэффициенты, будем искать ее частное решение в виде

$$B_r = c_1 \cos(\sigma T_1 + \nu) + c_2 \sin(\sigma T_1 + \nu), \quad (10.48)$$

$$B_l = c_3 \cos(\sigma T_1 + \nu) + c_4 \sin(\sigma T_1 + \nu). \quad (10.49)$$

Подставляя выражения (10.48), (10.49) в уравнения (10.37), (10.38) и приравнявая коэффициенты при $\cos(\sigma T_1 + \nu)$ и $\sin(\sigma T_1 + \nu)$ в обеих частях этих уравнений, получаем

$$\mu c_1 + \sigma c_2 - \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) c_3 = 0, \quad (10.50)$$

$$-\sigma c_1 + \mu c_2 - \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) c_4 = -\Gamma, \quad (10.51)$$

$$-\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) c_1 + \mu c_3 + \sigma c_4 = \Gamma, \quad (10.52)$$

$$-\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) c_2 - \sigma c_3 + \mu c_4 = 0. \quad (10.53)$$

Воспользовавшись правилом Крамера, найдем, что решение системы уравнений (10.50)–(10.53) имеет вид

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \sigma & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) & 0 \\ -\Gamma & \mu & 0 & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \\ \Gamma & 0 & \mu & \sigma \\ 0 & -\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) & -\sigma & \mu \end{vmatrix}, \quad (10.54)$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mu & 0 & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) & 0 \\ -\sigma & -\Gamma & 0 & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \\ -\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) & \Gamma & \mu & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & \mu \end{vmatrix}, \quad (10.55)$$

$$c_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mu & \sigma & 0 & 0 \\ -\sigma & \mu & -\Gamma & -\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \\ -\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) & 0 & \Gamma & \sigma \\ 0 & -\left(\Lambda_1 - \frac{1}{2} \sigma_1\right) & 0 & \mu \end{vmatrix}, \quad (10.56)$$

$$c_4 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mu & \sigma & -(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1) & 0 \\ -\sigma & \mu & 0 & -\Gamma \\ -(\Lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1) & 0 & \mu & \Gamma \\ 0 & -(\Lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1) & -\sigma & 0 \end{vmatrix}, \quad (10.57)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu & \sigma & -(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1) & 0 \\ -\sigma & \mu & 0 & -(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1) \\ -(\Lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1) & 0 & \mu & \sigma \\ 0 & -(\Lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1) & -\sigma & \mu \end{vmatrix}. \quad (10.58)$$

Складывая решения однородных уравнений (10.46), (10.47) с соответствующими частными решениями (10.48), (10.49), получаем следующее общее решение системы (10.37), (10.38):

$$B_r = b_1 e^{\gamma_1 T_1} + b_2 e^{\gamma_2 T_1} + c_1 \cos(\sigma T_1 + \nu) + c_2 \sin(\sigma T_1 + \nu), \quad (10.59)$$

$$B_l = \frac{\gamma_1 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1} b_1 e^{\gamma_1 T_1} + \frac{\gamma_2 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2}\sigma_1} b_2 e^{\gamma_2 T_1} + c_3 \cos(\sigma T_1 + \nu) + c_4 \sin(\sigma T_1 + \nu). \quad (10.60)$$

Из соотношений (10.31) и (10.34) и того факта, что $\lambda = \sigma_1/2$, следует, что

$$A = (B_r + iB_l) e^{(1/2) i \sigma_1 T_1}. \quad (10.61)$$

Подставляя (10.61) в формулу (10.15), а затем подставляя полученный результат в (10.12) и используя (10.16), имеем

$$u = (B_r + iB_l) e^{i[1 + (1/2)\sigma_1]t} + (B_r - iB_l) e^{-i[1 + (1/2)\sigma_1]t} + \\ + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon).$$

Так как $\omega_1 = 2 + \varepsilon\sigma$, то, следовательно,

$$u = B_r [e^{(1/2) i \omega_1 t} + e^{-(1/2) i \omega_1 t}] + iB_l [e^{(1/2) i \omega_1 t} - e^{-(1/2) i \omega_1 t}] + \\ + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon),$$

$$\text{или} \quad u = 2B_r \cos \frac{1}{2} \omega_1 t - 2B_l \sin \frac{1}{2} \omega_1 t + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \\ + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon). \quad (10.62)$$

Подстановка (10.59) и (10.60) в (10.62) позволяет получить следующее выражение для первого приближения:

$$\begin{aligned}
 u = & 2 [b_1 e^{\gamma_1 t} + b_2 e^{\gamma_2 t} + c_1 \cos(\varepsilon \sigma t + \nu) + c_2 \sin(\varepsilon \sigma t + \nu)] \cos \frac{1}{2} \omega_1 t - \\
 & - 2 \left[\frac{\gamma_1 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1} b_1 e^{\gamma_1 t} + \frac{\gamma_2 + \mu}{\Lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1} b_2 e^{\gamma_2 t} + c_3 \cos(\varepsilon \sigma t + \nu) + \right. \\
 & \left. + c_4 \sin(\varepsilon \sigma t + \nu) \right] \sin \frac{1}{2} \omega_1 t + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \\
 & + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu) + O(\varepsilon). \quad (10.63)
 \end{aligned}$$

Формула (10.63) показывает, что решение u становится неограниченным по t , если вещественная часть γ_1 или γ_2 положительна. При этом из соотношений (10.44) следует, что вещественная часть γ_1 всегда отрицательна, в то время как вещественная часть γ_2 положительна при условии

$$\Lambda_1^2 > \frac{1}{4} \sigma_1^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\Lambda_1^2 - \frac{1}{4} \sigma_1^2} - \mu > 0,$$

или

$$\Lambda_1^2 > \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \mu^2.$$

В этом случае пропорциональные $\cos(\omega_1 t/2)$ и $\sin(\omega_1 t/2)$ члены в (10.62), которые описывают свободные колебания системы, будут стремиться к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Фактически же решение u остается ограниченным, но член, описывающий свободные колебания, становится большим, и необходимо продолжить разложение до членов более высокого порядка.

10.3. Метод усреднения

Как и ранее, применение этой методики начинается с введения вместо искомой функции u двух новых зависимых переменных — амплитуды a и фазы β свободных колебаний и использования идеи вариации произвольных постоянных. С этой целью заметим, что при $\varepsilon = 0$ решение уравнения (10.1) имеет вид

$$u = a \cos(t + \beta) + \frac{F_1}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{F_2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu), \quad (10.64)$$

где a и β — произвольные постоянные. Тогда

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) - \frac{F_1 \omega_1}{1 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{F_2 \omega_2}{1 - \omega_2^2} \sin(\omega_2 t + \nu). \quad (10.65)$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ вновь представим решение в форме (10.64), подчинив его условию (10.65), но при этом будем считать амплитуду a и фазу β функциями времени t .

Дифференцирование (10.64) по t дает

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) - \frac{F_1 \omega_1}{1 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{F_2 \omega_2}{1 - \omega_2^2} \sin(\omega_2 t + \nu). \quad (10.66)$$

Сравнивая соотношения (10.65) и (10.66), заключаем, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (10.67)$$

Далее, дифференцируя (10.65) по t , находим

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) - \frac{F_1 \omega_1^2}{1 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t - \frac{F_2 \omega_2^2}{1 - \omega_2^2} \cos(\omega_2 t + \nu). \quad (10.68)$$

Подставляя выражения (10.64), (10.65) и (10.68) в уравнение (10.1), получаем

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = ef, \quad (10.69)$$

где

$$\begin{aligned} f = & -2\mu \left[a \sin(t + \beta) + \frac{F_1 \omega_1}{1 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + \frac{F_2 \omega_2}{1 - \omega_2^2} \sin(\omega_2 t + \nu) \right] + \\ & + a^2 \cos^2(t + \beta) + \frac{F_1^2}{(1 - \omega_1^2)^2} \cos^2 \omega_1 t + \frac{F_2^2}{(1 - \omega_2^2)^2} \cos^2(\omega_2 t + \nu) + \\ & + \frac{2aF_1}{1 - \omega_1^2} \cos(t + \beta) \cos \omega_1 t + \frac{2aF_2}{1 - \omega_2^2} \cos(t + \beta) \cos(\omega_2 t + \nu) + \\ & + \frac{2F_1 F_2}{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} \cos \omega_1 t \cos(\omega_2 t + \nu). \end{aligned} \quad (10.70)$$

Разрешая уравнения (10.67) и (10.69) относительно \dot{a} и $a\dot{\beta}$, имеем

$$\dot{a} = ef \sin(t + \beta), \quad (10.71)$$

$$a\dot{\beta} = ef \cos(t + \beta). \quad (10.72)$$

Подставляя в систему (10.71), (10.72) соотношение (10.70) и используя известные тригонометрические формулы (приложение А), получаем

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\epsilon \mu a + \epsilon \mu a \cos(2t + 2\beta) - \frac{\epsilon F_1 \omega_1 \mu}{1 - \omega_1^2} \{ \cos[(\omega_1 - 1)t - \beta] - \\ & - \cos[(\omega_1 + 1)t + \beta] \} - \frac{\epsilon F_2 \omega_2 \mu}{1 - \omega_2^2} \{ \cos[(\omega_2 - 1)t - \beta + \nu] - \\ & - \cos[(\omega_2 + 1)t + \beta + \nu] \} + \frac{1}{4} \epsilon a^2 \sin(t + \beta) + \\ & + \frac{1}{4} \epsilon a^2 \sin(3t + 3\beta) + \frac{\epsilon F_1^2}{2(1 - \omega_1^2)^2} \left\{ \sin(t + \beta) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sin[(1 + 2\omega_1)t + \beta] + \frac{1}{2} \sin[(1 - 2\omega_1)t + \beta] \left. \right\} + \\ & + \frac{\epsilon F_2^2}{2(1 - \omega_2^2)^2} \left\{ \sin(t + \beta) + \frac{1}{2} \sin[(1 + 2\omega_2)t + \beta + 2\nu] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sin [(1 - 2\omega_2)t + \beta - 2\nu] \Big\} + \frac{e\alpha F_1}{2(1 - \omega_1^2)} \{ \sin [(2 + \omega_1)t + 2\beta] + \\
& + \sin [(2 - \omega_1)t + 2\beta] \} + \frac{e\alpha F_2}{2(1 - \omega_2^2)} \{ \sin [(2 + \omega_2)t + 2\beta + \nu] + \\
& + \sin [(2 - \omega_2)t + 2\beta - \nu] \} + \frac{eF_1 F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} \times \\
& \times \{ \sin [(1 + \omega_1 + \omega_2)t + \beta + \nu] + \sin [(1 - \omega_1 - \omega_2)t + \beta - \nu] + \\
& + \sin [(1 + \omega_2 - \omega_1)t + \beta + \nu] + \sin [(1 - \omega_2 + \omega_1)t + \beta - \nu] \},
\end{aligned}
\tag{10.73}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\dot{\beta} = & -e\mu\alpha \sin (2t + 2\beta) - \frac{eF_1\omega_1\mu}{1 - \omega_1^2} \{ \sin [(\omega_1 + 1)t + \beta] + \\
& + \sin [(\omega_1 - 1)t - \beta] \} - \frac{eF_2\omega_2\mu}{1 - \omega_2^2} \{ \sin [(\omega_2 + 1)t + \beta + \nu] + \\
& + \sin [(\omega_2 - 1)t - \beta + \nu] \} + \frac{3}{4} \alpha^2 \cos (t + \beta) + \frac{1}{4} \alpha^2 \cos (3t + 3\beta) + \\
& + \frac{eF_1^2}{2(1 - \omega_1^2)^2} \left\{ \cos (t + \beta) + \frac{1}{2} \cos [(1 + 2\omega_1)t + \beta] + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cos [(1 - 2\omega_1)t + \beta] \Big\} + \frac{eF_2^2}{2(1 - \omega_2^2)^2} \left\{ \cos (t + \beta) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cos [(1 + 2\omega_2)t + \beta + 2\nu] + \frac{1}{2} \cos [(1 - 2\omega_2)t + \beta + 2\nu] \Big\} + \\
& + \frac{e\alpha F_1}{1 - \omega_1^2} \left\{ \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \cos [(2 + \omega_1)t + 2\beta] + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cos [(2 - \omega_1)t + 2\beta] \Big\} + \frac{e\alpha F_2}{1 - \omega_2^2} \left\{ \cos (\omega_2 t + \nu) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cos [(2 + \omega_2)t + 2\beta + \nu] + \frac{1}{2} \cos [(2 - \omega_2)t + 2\beta - \nu] \Big\} + \\
& + \frac{eF_1 F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} \{ \cos [(1 + \omega_1 + \omega_2)t + \beta + \nu] + \\
& + \cos [(1 - \omega_1 - \omega_2)t + \beta - \nu] + \cos [(1 + \omega_2 - \omega_1)t + \beta + \nu] + \\
& + \cos [(1 - \omega_2 + \omega_1)t + \beta - \nu] \}.
\end{aligned}
\tag{10.74}$$

Отметим, что в результате правые части уравнений (10.73) и (10.74) оказались весьма громоздкими. Можно было бы значительно упростить их, если представить u и \dot{u} в соотношениях (10.64) и (10.65) не в действительной, а в комплексной форме. Для этого положим

$$u = Ae^{it} + \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + \Lambda_2 e^{i\omega_2 t} + (\text{к. с.}), \tag{10.75}$$

$$\dot{u} = iAe^{it} + i\omega_1 \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_2 \Lambda_2 e^{i\omega_2 t} + (\text{к. с.}). \tag{10.76}$$

Дифференцируя u по t с учетом того, что $A = A(t)$, получаем

$$\dot{u} = iAe^{it} + \dot{A}e^{it} + i\omega_1 \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_2 \Lambda_2 e^{i\omega_2 t} + (\text{к. с.}). \tag{10.77}$$

Сравнивая (10.76) и (10.77), заключаем, что

$$\dot{A}e^{it} + \bar{\dot{A}}e^{-it} = 0. \quad (10.78)$$

Дифференцирование соотношения (10.76) по t дает

$$\ddot{u} = -Ae^{it} + i\dot{A}e^{it} - \omega_1^2 \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} - \omega_2^2 \Lambda_2 e^{i\omega_2 t} + (\text{к. с.}). \quad (10.79)$$

Подставляя теперь выражения (10.75), (10.76) и (10.79) в уравнение (10.1) и используя (10.16), находим

$$\begin{aligned} i\dot{A}e^{it} - i\bar{\dot{A}}e^{-it} = & -2i\epsilon\mu [Ae^{it} + \omega_1 \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + \omega_2 \Lambda_2 e^{i\omega_2 t}] - \\ & - \epsilon A^2 e^{2it} - \epsilon \Lambda_1^2 e^{2i\omega_1 t} - \epsilon \Lambda_2^2 e^{2i\omega_2 t} - 2\epsilon A \Lambda_1 e^{i(1+\omega_1)t} - \\ & - 2\epsilon A \Lambda_2 e^{i(1+\omega_2)t} - \epsilon A \bar{A} - \epsilon \Lambda_1^2 - \epsilon \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 - \\ & - 2\epsilon \bar{A} \Lambda_1 e^{i(\omega_1-1)t} - 2\epsilon A \Lambda_2 e^{i(\omega_2-1)t} - \\ & - 2\epsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_1+\omega_2)t} - 2\epsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_2-\omega_1)t} + (\text{к. с.}). \end{aligned} \quad (10.80)$$

Из равенства (10.78) следует, что $\dot{A} \exp(-it) = -\dot{A} \exp(it)$. Тогда из (10.80) имеем

$$\begin{aligned} i\dot{A} = & \left\{ -i\epsilon\mu [Ae^{it} + \omega_1 \Lambda_1 e^{i\omega_1 t} + \omega_2 \Lambda_2 e^{i\omega_2 t}] - \frac{1}{2} \epsilon A^2 e^{2it} - \right. \\ & - \frac{1}{2} \epsilon \Lambda_1^2 e^{2i\omega_1 t} - \frac{1}{2} \epsilon \Lambda_2^2 e^{2i\omega_2 t} - \epsilon A \Lambda_1 e^{i(\omega_1+1)t} + \epsilon A \Lambda_2 e^{i(\omega_2+1)t} - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon (A \bar{A} + \Lambda_1^2 + \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) - \epsilon \bar{A} \Lambda_1 e^{i(\omega_1-1)t} - \epsilon \bar{A} \Lambda_2 e^{i(\omega_2-1)t} - \\ & \left. - \epsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_1+\omega_2)t} - \epsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_2-\omega_1)t} + (\text{к. с.}) \right\} e^{-it}. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Наконец, представляя A в показательной форме и отделяя в соотношении (10.81) вещественную и мнимую части, приходим к системе (10.73), (10.74).

Перейдем теперь к рассмотрению случая $\omega_1 + \omega_2 = 1 + \epsilon\sigma$, обсуждавшегося в п. 10.2.1, и случая $\omega_1 = 2 + \epsilon\sigma_1$, $\omega_2 = 3 + \epsilon\sigma_2$, обсуждавшегося в п. 10.2.2.

10.3.1. случай $\omega_1 + \omega_2 \approx 1$

В первом приближении мы сохраним только медленно меняющиеся члены в правых частях уравнений (10.73), (10.74). В результате имеем

$$\dot{a} = -\epsilon\mu a + \frac{2F_1 F_2}{2(1-\omega_1^2)(1-\omega_2^2)} \sin[(1-\omega_1-\omega_2)t + \beta + \nu], \quad (10.82)$$

$$a\dot{\beta} = \frac{\epsilon F_1 F_2}{2(1-\omega_1^2)(1-\omega_2^2)} \cos[(1-\omega_1-\omega_2)t + \beta - \nu]. \quad (10.83)$$

Система уравнений (10.82), (10.83) эквивалентна уравнению (10.20), полученному с помощью метода многих масштабов. Отметим, что,

в то время как уравнение (10.20) линейно, система (10.82), (10.83) оказывается уже нелинейной. Именно по этой причине мы не представляли амплитуду A в показательной форме, а решали уравнение (10.20) в комплексном виде.

Сохраняя в уравнении (10.81) лишь медленно меняющиеся члены, находим

$$\dot{A} = -\varepsilon \mu A + i\varepsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2 - 1)t}, \quad (10.84)$$

что полностью согласуется с уравнением (10.20).

10.3.2. СЛУЧАЙ $\omega_2 - \omega_1 \approx 1$ И $\omega_1 \approx 2$

Сохраняя в правых частях уравнений (10.73) и (10.74) медленно меняющиеся члены, получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\varepsilon \mu a + \frac{\varepsilon a F_1}{2(1 - \omega_1^2)} \sin[(2 - \omega_1)t + 2\beta] + \\ & + \frac{\varepsilon F_1 F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} \sin[(1 - \omega_2 + \omega_1)t + \beta - \nu], \end{aligned} \quad (10.85)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\beta} = & \frac{\varepsilon a F_1}{2(1 - \omega_1^2)} \cos[(2 - \omega_1)t + 2\beta] + \\ & + \frac{\varepsilon F_1 F_2}{2(1 - \omega_1^2)(1 - \omega_2^2)} \cos[(1 - \omega_2 + \omega_1)t + \beta - \nu], \end{aligned} \quad (10.86)$$

которые эквивалентны уравнению (10.30), полученному с помощью метода многих масштабов. Снова отметим, что уравнение в форме (10.30) представляется более удобным для решения, чем система уравнений (10.85), (10.86).

Если сохранить только медленно меняющиеся члены непосредственно в уравнении (10.81), то результат имеет вид

$$\dot{A} = -\varepsilon \mu A + i\varepsilon \bar{A} \Lambda_1 e^{i(\omega_1 - 2)t} + i\varepsilon \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1 - 1)t}, \quad (10.87)$$

что полностью согласуется с (10.30). Вывод уравнений (10.84) и (10.87) показывает, что комплексная форма записи решения является более удобной по сравнению с действительной.

Упражнения

10.1. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, получить уравнения для амплитуд и фаз первого приближения в случае системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \dot{u}^2 + K_1 \cos \Omega_1 t + K_2 \cos \Omega_2 t, \quad \varepsilon \ll 1,$$

при условии $\Omega_2 \pm \Omega_1 \approx \omega_0$. Ограничиться случаем, когда значение частоты Ω_1 достаточно далеко от нуля.

10.2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = K_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + K_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2),$$

где ω_0 , K_n и θ_n — постоянные. При условии что значения частот Ω_n достаточно далеки от ω_0 , с помощью метода многих масштабов показать, что

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda_1 e^{i\Omega_1 T_0} + \Lambda_2 e^{i\Omega_2 T_0} + (\text{к. с.}),$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2} K_n (\omega_0^2 - \Omega_n^2)^{-1} e^{i\theta_n}.$$

Далее показать, что

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & - [2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) A] e^{i\omega_0 T_0} - \\ & - 3(2A\bar{A} + \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) \Lambda_1 e^{i\Omega_1 T_0} - 3(2A\bar{A} + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) \times \\ & \times \Lambda_2 e^{i\Omega_2 T_0} - A^3 e^{3i\omega_0 T_0} - \Lambda_1^3 e^{3i\Omega_1 T_0} - \Lambda_2^3 e^{3i\Omega_2 T_0} - \\ & - 3A^2 \Lambda_1 e^{i(2\omega_0 + \Omega_1) T_0} - 3A^2 \Lambda_2 e^{i(2\omega_0 + \Omega_2) T_0} - \\ & - 3A^2 \bar{\Lambda}_1 e^{i(2\omega_0 - \Omega_1) T_0} - 3A^2 \bar{\Lambda}_2 e^{i(2\omega_0 - \Omega_2) T_0} - \\ & - 3A\Lambda_1^2 e^{i(\omega_0 + 2\Omega_1) T_0} - 3A\Lambda_2^2 e^{i(\omega_0 + 2\Omega_2) T_0} - \\ & - 3A\bar{\Lambda}_1^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega_1) T_0} - 3A\bar{\Lambda}_2^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega_2) T_0} - \\ & - 6A\Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2) T_0} - 6A\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 e^{i(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2) T_0} - \\ & - 6A\bar{\Lambda}_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2) T_0} - 6A\Lambda_1 \bar{\Lambda}_2 e^{i(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2) T_0} - \\ & - 3\Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i(2\Omega_1 + \Omega_2) T_0} - 3\Lambda_1^2 \bar{\Lambda}_2 e^{i(2\Omega_1 - \Omega_2) T_0} - \\ & - 3\Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i(\Omega_1 + 2\Omega_2) T_0} - 3\bar{\Lambda}_1 \Lambda_2^2 e^{i(2\Omega_1 - \Omega_2) T_0} + (\text{к. с.}). \end{aligned}$$

а) Показать, что при $\Omega_2 > \Omega_1$ резонансы возникают при условиях

$$\omega_0 \approx 3\Omega_1 \text{ или } 3\Omega_2, \quad \omega_0 \approx \frac{1}{3}\Omega_1 \text{ или } \frac{1}{3}\Omega_2, \quad \omega_0 \approx \Omega_2 \pm 2\Omega_1 \text{ или } 2\Omega_1 - \Omega_2,$$

$$\omega_0 \approx 2\Omega_2 \pm \Omega_1, \quad \omega_0 \approx \frac{1}{2}(\Omega_2 \pm \Omega_1).$$

б) Показать, что резонансы разных типов существуют одновременно при условиях

$$\Omega_2 \approx 9\Omega_1 \approx 3\omega_0, \quad \Omega_2 \approx \Omega_1 \approx 3\omega_0,$$

$$\Omega_2 \approx \Omega_1 \approx \frac{1}{3}\Omega_0, \quad \Omega_2 \approx 5\Omega_1 \approx \frac{5}{3}\omega_0,$$

$$\Omega_2 \approx 7\Omega_1 \approx \frac{7}{3}\omega_0, \quad \Omega_2 \approx 2\Omega_1 \approx \frac{2}{3}\omega_0,$$

$$\Omega_2 \approx \frac{7}{3}\Omega_1 \approx 7\omega_0, \quad \Omega_2 \approx \frac{5}{3}\Omega_1 \approx 5\omega_0.$$

в) Для случая $\omega_0 = 2\Omega_1 + \Omega_2$ + ес показать, что

$$2i\omega_0 A' + (3A\bar{A} + 6\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 6\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) A + 3\Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i\sigma T_1} = 0.$$

г) Для случая $3\Omega_1 = \omega_0 + \sigma\epsilon_1$ и $\Omega_2 = 3\omega_0 + \sigma\epsilon_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) A + \Lambda_1^3 e^{i\sigma_1 T_1} + 3\Lambda_2 \bar{A}^2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

д) Для случая $3\Omega_1 = \omega_0 + \sigma\epsilon_1$ и $\Omega_2 + \Omega_1 = 2\omega_0 + \sigma\epsilon_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) A + \Lambda_1^3 e^{i\sigma_1 T_1} + 6\bar{A}\Lambda_1 \Lambda_2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

е) Для случая $3\Omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ и $\Omega_2 - \Omega_1 = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + \Lambda_1^3 e^{i\sigma_1 T_1} + 6\bar{A}\bar{\Lambda}_1\Lambda_2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

ж) Для случая $3\Omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ и $2\Omega_2 - \Omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\sigma_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + \Lambda_1^3 e^{i\sigma_1 T_1} + 3\Lambda_2^2 \bar{\Lambda}_1 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

з) Для случая $\Omega_1 = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ и $\Omega_2 - 2\Omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\sigma_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + 3\bar{A}^2 \Lambda_1 e^{i\sigma_1 T_1} + 3\Lambda_2 \bar{\Lambda}_1^2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

и) Для случая $\Omega_1 = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma_1$ и $\Omega_2 - \Omega_1 = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma_2$ показать, что

$$2i\omega_0 A' + 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + 3\bar{A}^2 \Lambda_1 e^{i\sigma_1 T_1} + 6\bar{A}\bar{\Lambda}_1\Lambda_2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0.$$

10.3. Рассмотреть уравнение из предыдущего упражнения. Пусть

$$u = A(t) e^{i\omega_0 t} + \Lambda_1 e^{i\Omega_1 t} + \Lambda_2 e^{i\Omega_2 t} + (\text{к. с.}),$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2} K_n (\omega_0^2 - \Omega_n^2)^{-1} e^{i\theta_n},$$

$$\begin{aligned} -2i\omega_0 A' = & \{ 3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A e^{i\omega_0 t} + 3(2A\bar{A} + \Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)\Lambda_1 e^{i\Omega_1 t} + \\ & + 3(2A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_2\bar{\Lambda}_2)\Lambda_2 e^{i\Omega_2 t} + A^3 e^{3i\omega_0 t} + \Lambda_1^3 e^{3i\Omega_1 t} + \\ & + \Lambda_2^3 e^{3i\Omega_2 t} + 3A^2 \Lambda_1 e^{i(2\omega_0 + \Omega_1)t} + 3A^2 \Lambda_2 e^{i(2\omega_0 + \Omega_2)t} + \\ & + 3A^2 \bar{\Lambda}_1 e^{i(2\omega_0 - \Omega_1)t} + 3A^2 \bar{\Lambda}_2 e^{i(2\omega_0 - \Omega_2)t} + 3A\Lambda_1^2 e^{i(2\Omega_1 + \omega_0)t} + \\ & + 3A\Lambda_2^2 e^{i(2\Omega_2 + \omega_0)t} + 3A\bar{\Lambda}_1^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega_1)t} + 3A\bar{\Lambda}_2^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega_2)t} + \\ & + 6A\Lambda_1\Lambda_2 e^{i(\Omega_1 + \Omega_2 + \omega_0)t} + 6A\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2 e^{-i(\Omega_1 + \Omega_2 - \omega_0)t} + \\ & + 6A\bar{\Lambda}_1\Lambda_2 e^{i(\Omega_2 - \Omega_1 + \omega_0)t} + 6A\Lambda_1\bar{\Lambda}_2 e^{i(\Omega_1 - \Omega_2 + \omega_0)t} + \\ & + 3\Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i(2\Omega_1 + \Omega_2)t} + 3\Lambda_1^2 \bar{\Lambda}_2 e^{i(2\Omega_1 - \Omega_2)t} + 3\Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i(\Omega_1 + 2\Omega_2)t} + \\ & + 3\bar{\Lambda}_1 \Lambda_2^2 e^{i(2\Omega_1 - \Omega_2)t} + (\text{к. с.}) \} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Усреднить последнее уравнение для случаев, указанных в предыдущем упражнении.

10.4. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодные разложения первого порядка для системы уравнений

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_1 u_2, \quad \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \alpha_2 u_1^2$$

в случае малых, но конечных амплитуд, а также при условии, что $\omega_2 \approx 2\omega_1$.

10.5. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить уравнения для амплитуд и фаз системы уравнений

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_1 u_2,$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \alpha_2 u_1 u_3,$$

$$\ddot{u}_3 + \omega_3^2 u_3 = \alpha_3 u_1 u_2$$

в случае малых, но конечных амплитуд, а также при условии, что $\omega_3 \approx \omega_1 + \omega_2$.

10.6. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерно пригодные разложения первого порядка для системы уравнений

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \varepsilon \alpha_1 u_1 u_2 + \varepsilon k_1 \cos \Omega_1 t,$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \varepsilon \alpha_2 u_1^2 + \varepsilon k_2 \cos \Omega_2 t$$

при условиях

а) $\omega_2 \approx 2\omega_1$ и $\Omega_1 \approx \omega_1$, б) $\omega_2 \approx 2\omega_1$ и $\Omega_2 \approx \omega_1$.

УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ.

В отличие от двух предыдущих глав, в которых внешнее воздействие входило в правые части исходных уравнений, в этой главе мы рассмотрим возбуждение, описываемое переменными коэффициентами уравнений. Такое возбуждение называется параметрическим. Простейшим уравнением, описывающим параметрическое возбуждение системы с одной степенью свободы, является уравнение Маттье

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + (\delta^* + \varepsilon^* \cos \omega^* t^*) u^* = 0. \quad (11.1)$$

Как и ранее, введем безразмерные переменные, полагая

$$u = \frac{u^*}{u_0^*}, \quad t = \frac{1}{2} \omega^* t^*,$$

где u_0^* представляет собой некоторое характерное значение u . При этом уравнение (11.1) можно записать в стандартной форме

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) u = 0, \quad (11.2)$$

$$\delta = \frac{4\delta^*}{\omega^{*2}}, \quad \varepsilon = \frac{4\varepsilon^*}{\omega^{*2}}.$$

В следующем параграфе мы построим прямое разложение второго порядка при малых ε и исследуем вопрос о его равномерности. В § 11.2 мы изложим теорию Флоке, описывающую точные решения уравнения (11.2). В § 11.3 рассмотрим так называемый метод растянутых параметров, применяемый для построения приближенных периодических решений, а в § 11.4 построим приближения к точным решениям. В § 11.5 и 11.6 мы покажем, как для получения равномерно пригодных разложений решений уравнения (11.2) могут использоваться метод многих масштабов и метод усреднения.

11.1. Прямое разложение

Будем искать прямое разложение решения уравнения (11.2) в виде следующего ряда по степеням ε :

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (11.3)$$

Подставляя (11.3) в уравнение (11.2) и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , имеем

$$\ddot{u}_0 + \delta u_0 = 0, \quad (11.4)$$

$$\ddot{u}_1 + \delta u_1 = -2u_0 \cos 2t, \quad (11.5)$$

$$\ddot{u}_2 + \delta u_2 = -2u_1 \cos 2t. \quad (11.6)$$

Общее решение уравнения (11.4) можно представить как

$$u_0 = a \cos (\omega t + \beta), \quad \delta = \omega^2, \quad (11.7)$$

где a и β — произвольные постоянные. При этом уравнение (11.5) принимает вид

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = -2a \cos (\omega t + \beta) \cos 2t,$$

или

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = -a \cos [(\omega + 2)t + \beta] - a \cos [(\omega - 2)t + \beta]. \quad (11.8)$$

Как и ранее, исключая из рассмотрения решение соответствующего однородного уравнения, запишем решение (11.8) в виде

$$u_1 = \frac{a \cos [(\omega + 2)t + \beta]}{4(1 + \omega)} + \frac{a \cos [(\omega - 2)t + \beta]}{4(1 - \omega)}. \quad (11.9)$$

При этом уравнение (11.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = & -\frac{a}{2(1 + \omega)} \cos [(\omega + 2)t + \beta] \cos 2t - \\ & -\frac{a}{2(1 - \omega)} \cos [(\omega - 2)t + \beta] \cos 2t, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = & -\frac{a}{4(1 + \omega)} \cos [(\omega + 4)t + \beta] - \frac{a}{4(1 - \omega)} \times \\ & \times \cos [(\omega - 4)t + \beta] \left[\frac{a}{4(1 + \omega)} + \frac{a}{4(1 - \omega)} \right] \cos (\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Опуская решение однородного уравнения, запишем решение (11.10) в виде

$$\begin{aligned} u_2 = & -\frac{a}{4\omega(1 - \omega^2)} t \sin (\omega t + \beta) + \frac{a \cos [(\omega + 4)t + \beta]}{32(1 + \omega)(2 + \omega)} + \\ & + \frac{a \cos [(\omega - 4)t + \beta]}{32(1 - \omega)(2 - \omega)}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Подставляя выражения (11.7), (11.9) и (11.11) в разложение (11.3), получим

$$\begin{aligned} u = & a \cos (\omega t + \beta) + \frac{1}{4} \varepsilon a \left\{ \frac{\cos [(\omega + 2)t + \beta]}{1 - \omega} + \frac{\cos [(\omega - 2)t + \beta]}{1 - \omega} \right\} + \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon^2 a \left\{ -\frac{8t \sin (\omega t + \beta)}{\omega(1 - \omega^2)} + \frac{\cos [(\omega + 4)t + \beta]}{(1 + \omega)(2 + \omega)} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos [(\omega - 4)t + \beta]}{(1 - \omega)(2 - \omega)} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (11.12)$$

Полученное прямое разложение становится непригодным при больших значениях t из-за присутствия в разложении секулярных членов. Кроме того, оно будет непригодным и при $\omega \approx 0, 1$ и 2 из-за появления малых знаменателей. Если продолжить разложение до членов высших порядков, то оказывается, что малые знаменатели возникают при $\omega \approx n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Перейдем теперь к изложению теории Флоке, описывающей точные решения уравнения (11.2).

11.2. Теория Флоке

В этом параграфе мы изучим общие свойства решений уравнения (11.2), не решая уравнения в явном виде. Информация об этих свойствах используется в последующих параграфах при построении соответствующих равномерных приближений.

Поскольку (11.2) представляет собой линейное однородное уравнение второго порядка, оно обладает двумя линейно независимыми решениями $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющими начальным условиям

$$u_1(0) = 1, \quad \dot{u}_1(0) = 0, \quad (11.13)$$

$$u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 1,$$

так как определитель Вронского (см. § Б1) отличен от нуля. Покажем теперь, что если $u_1(t)$ является решением уравнения (11.2), то и $u_1(t + \pi)$ также является решением. С этой целью заменим независимую переменную t на $z = t + \pi$. При этом уравнение (11.2) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [\delta + 2\epsilon \cos(2z - 2\pi)] u = 0,$$

$$\text{или} \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + (\delta + \epsilon z \cos 2z) u = 0, \quad (11.14)$$

так как $\cos(2z - 2\pi) = \cos 2z$. Но уравнение (11.14) совпадает с уравнением (11.2), поэтому если функция $u_1(t)$ есть решение (11.2), то функция $u_1(z) = u_1(t + \pi)$ является решением уравнения (11.14) и, следовательно, и уравнения (11.2).

Из предшествующих рассуждений следует, что если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения уравнения (11.2), то и $u_1(t + \pi)$ и $u_2(t + \pi)$ также представляют собой решения (11.2). Более того, если функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ линейно независимы, то $u_1(t + \pi)$ должно линейно зависеть от $u_1(t)$ и $u_2(t)$, поскольку уравнение второго порядка может иметь только два линейно независимых решения. Следовательно, существуют две постоянные, a_{11} и a_{12} , не обращающиеся в нуль одновременно, такие, что

$$u_1(t + \pi) = a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t). \quad (11.15)$$

Точно так же существуют две постоянные, по крайней мере одна из которых не равна нулю, такие, что

$$u_2(t + \pi) = a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t), \quad (11.16)$$

поскольку $u_2(t + \pi)$ должно линейно зависеть от $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Используя начальные условия (11.13), из соотношений (11.15) и (11.16) находим, что

$$a_{11} = u_1(\pi), \quad a_{21} = u_2(\pi). \quad (11.17)$$

Дифференцирование (11.15) и (11.16) по t дает

$$\dot{u}_1(t + \pi) = a_{11}\dot{u}_1(t) + a_{12}\dot{u}_2(t), \quad (11.18)$$

$$\dot{u}_2(t + \pi) = a_{21}\dot{u}_1(t) + a_{22}\dot{u}_2(t).$$

Подставляя условия (11.13) в (11.18), имеем

$$a_{12} = \dot{u}_1(\pi), \quad a_{22} = \dot{u}_2(\pi). \quad (11.19)$$

Таким образом, если функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ известны, то коэффициенты a_{ij} в соотношениях (11.15), (11.16) определяются однозначно по формулам (11.17) и (11.19).

Обращаясь вновь к соотношениям (11.15) и (11.16), запишем их в матричной форме

$$\mathbf{u}(t + \pi) = A\mathbf{u}(t), \quad (11.20)$$

$$\text{где} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (11.21)$$

Далее, исследуем линейное преобразование вектора $\mathbf{u}(t)$ в вектор $\mathbf{v}(t)$, а именно положим

$$\mathbf{v}(t) = P\mathbf{u}(t), \quad (11.22)$$

где P — постоянная невырожденная квадратная матрица 2-го порядка. В скалярной записи соотношение (11.22) принимает вид

$$v_1 = p_{11}u_1 + p_{12}u_2, \quad v_2 = p_{21}u_1 + p_{22}u_2. \quad (11.23)$$

При этом из (11.22) следует, что

$$\mathbf{u}(t) = P^{-1}\mathbf{v}(t), \quad (11.24)$$

где P^{-1} — матрица, обратная к P , т. е.

$$PP^{-1} = I, \quad (11.25)$$

где I — единичная матрица

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подстановка (11.24) в формулу (11.20) дает

$$P^{-1}\mathbf{v}(t + \pi) = AP^{-1}\mathbf{v}(t). \quad (11.26)$$

Умножая соотношение (11.26) слева на матрицу P и используя (11.25), получим

$$v(t + \pi) = PAP^{-1}v(t), \quad (11.27)$$

или

$$v(t + \pi) = Bv(t), \quad (11.28)$$

где

$$B = PAP^{-1}. \quad (11.29)$$

Матрицы A и B называются обычно *подобными*, так как они обладают одними и теми же собственными числами. Чтобы показать это, заметим, что

$$\begin{aligned} ||B - \lambda I| &= |PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}| = |P(A - \lambda I)P^{-1}| = \\ &= |P||A - \lambda I||P^{-1}| = |A - \lambda I|, \end{aligned} \quad (11.30)$$

поскольку $|P||P|^{-1} = 1$.

Из курса линейной алгебры известно, что всякую невырожденную постоянную матрицу P можно выбрать таким образом, чтобы матрица B имела простейшую так называемую *жорданову каноническую форму*. Эта форма определяется собственными числами и собственными векторами матрицы A . Собственные числа матрицы A (а следовательно, и матрицы B) находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$,
откуда

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (11.31)$$

Учитывая соотношения (11.17) и (11.19), а также тот факт, что вронскиан функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ равен 1, имеем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = u_1(\pi)\dot{u}_2(\pi) - u_2(\pi)\dot{u}_1(\pi) = 1.$$

При этом уравнение (11.31) принимает вид

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0, \quad (11.32)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}[u_1(\pi) + \dot{u}_2(\pi)].$$

Решения уравнения (11.32) даются выражением

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (11.33)$$

Если $\alpha \neq \pm 1$, формула (11.33) определяет два различных собственных числа

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (11.34)$$

и матрица B имеет диагональную форму

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (11.35)$$

Если $\alpha = \pm 1$, то формула (11.33) дает только одно собственное число, а именно $\lambda = \alpha = \pm 1$, и матрица B имеет либо вид

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (11.36)$$

либо вид

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 1 & \pm 1 \end{bmatrix}. \quad (11.37)$$

Если матрица B имеет форму (11.35) или (11.36), то соотношение (11.28) можно переписать в следующей скалярной форме:

$$v_1(t + \pi) = \lambda_1 v_1(t), \quad v_2(t + \pi) = \lambda_2 v_2(t), \quad (11.38)$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, если B имеет форму (11.36). Из соотношений (11.38) следует, что

$$\begin{aligned} v_1(t + 2\pi) &= \lambda_1 v_1(t + \pi) = \lambda_1^2 v_1(t), \\ v_1(t + 3\pi) &= \lambda_1 v_1(t + 2\pi) = \lambda_1^3 v_1(t), \\ v_1(t + 4\pi) &= \lambda_1 v_1(t + 3\pi) = \lambda_1^4 v_1(t), \\ &\dots \dots \dots \\ v_1(t + n\pi) &= \lambda_1^n v_1(t), \end{aligned} \quad (11.39)$$

где n — целое число. Аналогичным образом,

$$v_2(t + n\pi) = \lambda_2^n v_2(t). \quad (11.40)$$

Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$v_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & |\lambda_i| < 1, \\ \infty, & |\lambda_i| > 1 \end{cases} \quad (11.41)$$

и решение становится неограниченным по времени, если абсолютная величина любого из собственных чисел больше единицы. В случае когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, соотношение (11.38) показывает, что решения v_i периодичны с периодом π . Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то

$$\begin{aligned} v_i(t + \pi) &= -v_i(t), \\ v_i(t + 2\pi) &= -v_i(t + \pi) = v_i(t), \end{aligned} \quad (11.42)$$

т. е. решения v_i представляют собой периодические функции с периодом 2π . Таким образом, случаи $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ отделяют устойчивые решения от неустойчивых. Эти значения λ обычно называют *переходными значениями*.

Соотношения (11.38) можно использовать для того, чтобы записать решения $v_i(t)$ в так называемой *нормальной форме*, или *форме Флоке*. Для этого умножим первое из равенств (11.38) на $\exp[-\gamma_1(t + \pi)]$, где показатель γ_1 будет определен впоследствии, и получим

$$e^{-\gamma_1(t + \pi)} v_1(t + \pi) = \lambda_1 e^{-\gamma_1 \pi} e^{-\gamma_1 t} v_1(t). \quad (11.43)$$

Если положить $\lambda_1 \exp(-\gamma_1 \pi) = 1$, тогда $\exp(\gamma_1 \pi) = \lambda_1$ и

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi} \ln \lambda_1. \quad (11.44)$$

В результате соотношение (11.43) принимает вид

$$e^{-\gamma_1(t+\pi)} v_1(t+\pi) = e^{-\gamma_1 t} v_1(t). \quad (11.45)$$

Следовательно, функция $\exp(-\gamma_1 t) v_1(t)$ является периодической с периодом π , так что ее можно представить как

$$e^{-\gamma_1 t} v_1(t) = \varphi_1(t), \quad (11.46)$$

где $\varphi_1(t+\pi) = \varphi_1(t)$. Таким образом, $v_1(t)$ можно представить в нормальной форме

$$v_1(t) = e^{\gamma_1 t} \varphi_1(t), \quad (11.47)$$

где $\gamma_1 = (1/\pi) \ln \lambda_1$ — так называемый *характеристический показатель*. Аналогичным образом можно представить в нормальной форме и функцию $v_2(t)$:

$$v_2(t) = e^{\gamma_2 t} \varphi_2(t), \quad (11.48)$$

где $\varphi_2(t+\pi) = \varphi_2(t)$ и $\gamma_2 = (1/\pi) \ln \lambda_2$.

Если матрица B имеет форму (11.37), соотношение (11.28) переписывается в виде

$$v_1(t+\pi) = \lambda v_1(t), \quad (11.49a) \quad v_2(t+\pi) = \lambda v_2(t) + v_1(t), \quad (11.49b)$$

где $\lambda = \pm 1$. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно представить $v_1(t)$ в нормальной форме

$$\begin{aligned} v_1(t) &= e^{\gamma t} \varphi_1(t), \\ \varphi_1(t+\pi) &= \varphi_1(t) \quad \text{и} \quad \gamma = (1/\pi) \ln \lambda. \end{aligned} \quad (11.50)$$

При этом второе из соотношений (11.49) принимает вид

$$v_2(t+\pi) = \lambda v_2(t) + e^{\gamma \pi} \varphi_1(t). \quad (11.51)$$

Как и ранее, умножение равенства (11.51) на $\exp[-\gamma(t+\pi)]$ приводит к соотношению

$$e^{-\gamma(t+\pi)} v_2(t+\pi) = \lambda e^{-\gamma \pi} e^{-\gamma t} v_2(t) + e^{-\gamma \pi} \varphi_1(t),$$

которое может быть переписано в виде

$$e^{-\gamma(t+\pi)} v_2(t+\pi) = e^{-\gamma t} v_2(t) + \frac{1}{\lambda} \varphi_1(t). \quad (11.51a)$$

В этом случае вид решения $v_2(t)$ отличен от (11.48) из-за присутствия члена $\lambda^{-1} \varphi_1(t)$. Легко проверить, что вместо (11.48) имеем

$$v_2(t) = e^{\gamma t} \left[\varphi_2(t) + \frac{t}{\pi \lambda} \varphi_1(t) \right]. \quad (11.52)$$

В случае $|\alpha| > 1$ абсолютная величина одного из собственных чисел λ_1 будет больше единицы, в то время как абсолютная величина другого собственного числа окажется меньше единицы,

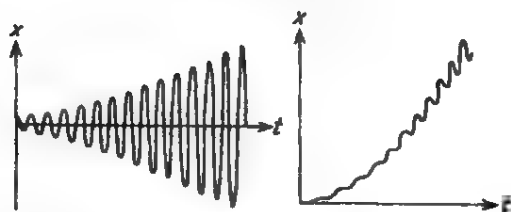


Рис. 11.1. Неограниченные решения уравнения Матье.

поскольку $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ в силу условия (11.32). Так как $\gamma_i = (1/\pi) \ln \lambda_i$, вещественная часть одного из показателей γ_i положительна, а другого — отрицательна. Поэтому из соотношений (11.41) или (11.47), (11.48) и (11.52) следует, что одно из решений неограниченно растет со временем, а другое остается ограниченным. На рис. 11.1 показаны два возможных типа неограниченных решений. Решение первого типа осциллирует с амплитудой, экспоненциально растущей со временем, а решение второго типа неосциллирующее, но также возрастает со временем экспоненциально.

В случае $|\alpha| < 1$ собственные значения λ_i представляют собой сопряженные комплексные числа, модули которых равны единице, так что вещественные части характеристических показателей γ_i оказываются равными нулю. Следовательно, нормальные решения в этом случае будут ограничены. Эти ограниченные решения являются, вообще говоря, аperiодическими, меняясь

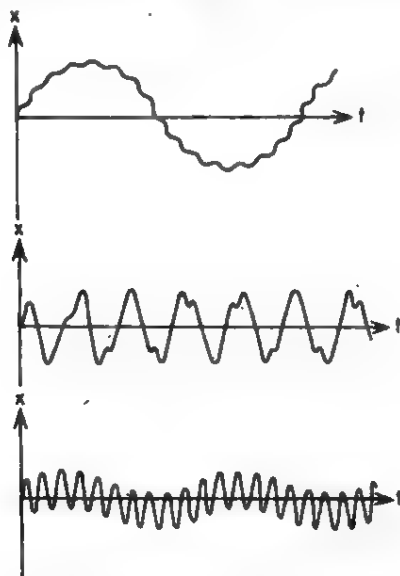


Рис. 11.2. Ограниченные решения уравнения Матье.

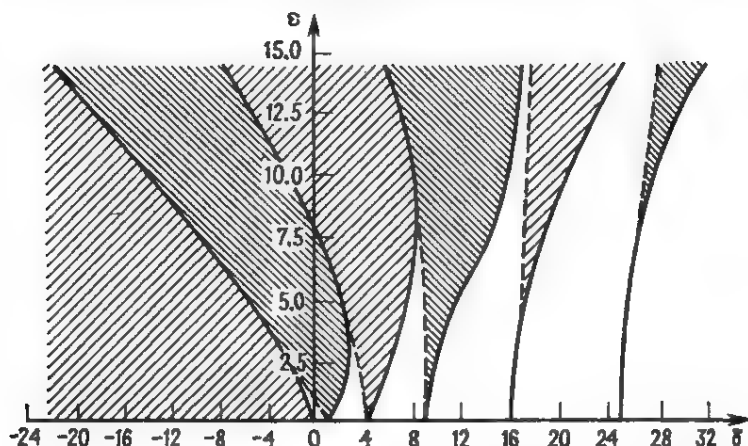


Рис. 11.3. Области устойчивости и неустойчивости (последние на рис. заштрихованы) в плоскости параметров для уравнения Матье.

с двумя частотами — мнимой частью γ и частотой возбуждения, равной 2. В зависимости от отношения этих двух частот решение может принимать разнообразные формы, кроме переходных периодических колебаний. Три возможных типа решения показаны на рис. 11.2.

Переход от устойчивых движений к неустойчивым происходит при $|\alpha| = 1$, что соответствует кратным корням $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. При этом $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ или $\gamma_1 = \gamma_2 = i\pi$. Как указывалось выше, в первом случае существует нормальное периодическое решение с периодом π , а во втором — нормальное периодическое решение с периодом 2π . Эти свойства решений уравнения Матье служат основой метода *растянутых параметров*, применяемого для определения значений δ и ε , соответствующих условию $|\alpha| = 1$ и, следовательно, переходу от устойчивости к неустойчивости. Переходные кривые, разделяющие плоскость $\varepsilon - \delta$ на области устойчивости и неустойчивости, показаны на рис. 11.3. Вдоль этих кривых по крайней мере одно из нормальных решений является периодическим с периодом π или 2π .

Характеристические показатели для уравнения (11.2) могут быть получены с помощью численного расчета двух линейно независимых решений по начальным условиям (11.13) на отрезке, равном периоду колебаний. Используя численные значения этих решений и их первых производных при $t = \pi$, можно рассчитать $\alpha = (1/2) [u_1/\pi + \dot{u}_2(\pi)]$, затем по формулам (11.34) определить λ_i и с их помощью вычислить $\gamma_i = (1/\pi) \ln \lambda_i$. Очевидно, что для каждой пары значений δ и ε эту дорогостоящую процедуру, требующую значительных затрат машинного времени, необходимо повторять. Для случая малых γ_i мы опишем в § 11.4 расчетную

схему, называемую методом Уиттекера, предназначенную для приближенного определения характеристических показателей.

Проведенный анализ показывает, что применение метода растянутых параметров или метода Уиттекера требует информации о качественном характере решения, а именно о нормальной форме решения (форме Флоке). В § 11.5 и 11.6 будет показано, что использование метода многих масштабов и метода усреднения позволяет вполне обходиться без такой информации.

11.3. Метод растянутых параметров

В § 11.1 мы выяснили, что прямое разложение становится непригодным при $\delta \approx 0, 1, 4, \dots$. Это наводит на мысль, что наряду с разложением по ε решения $u(t, \varepsilon)$ следует разложить в ряд по степеням ε в окрестностях указанных значений и параметр δ . Итак, будем искать равномерно пригодное разложение вида

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots, \quad (11.53)$$

$$\delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots, \quad (11.54)$$

определяя коэффициенты δ_n из требования периодичности приближенного решения. Получаемые в результате выражения для δ , как указывалось в предыдущем параграфе, будут определять переходные кривые, отделяющие области устойчивости и неустойчивости решения.

Подстановка разложений (11.53) и (11.54) в уравнение (11.2) дает

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + (n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) + 2\varepsilon \cos 2t (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = 0,$$

или

$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 + \varepsilon (\ddot{u}_1 + n^2 u_1 + \delta_1 u_0 + 2u_0 \cos 2t) + \varepsilon^2 (\ddot{u}_2 + n^2 u_2 + \delta_1 u_1 + \delta_2 u_0 + 2u_1 \cos 2t) + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем

$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 = 0, \quad (11.55)$$

$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -\delta_1 u_0 - 2u_0 \cos 2t, \quad (11.56)$$

$$\ddot{u}_2 + n^2 u_2 = -\delta_1 u_1 - \delta_2 u_0 - 2u_1 \cos 2t. \quad (11.57)$$

Общее решение уравнения (11.55) можно представить в виде

$$u_0 = a \cos nt + b \sin nt. \quad (11.58)$$

Из формулы (11.58) ясно, что функция u_0 является периодической с периодом π , если n четно, и с периодом 2π , если n нечетно. Поэтому далее мы последовательно рассмотрим случаи $n = 0, 1$ и 2 .

Случай $n = 0$

В этом случае решение (11.58) сводится к $u_0 = a$ ¹⁾ Тогда уравнение (11.56) принимает вид

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 a - 2a \cos 2t. \quad (11.59)$$

Требование отсутствия в правой части (11.59) слагаемого, порождающего секулярный член в решении u_1 (т. е. подчинение u_1 условию периодичности), приводит к условию

$$\delta_1 = 0. \quad (11.60)$$

В результате уравнение (11.59) сводится к виду

$$\ddot{u}_1 = -2a \cos 2t. \quad (11.61)$$

Решение уравнения (11.61), не включающее в себя решение соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$u_1 = \frac{1}{2} a \cos 2t. \quad (11.62)$$

При этом уравнение (11.57) можно представить как

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 a - a \cos^2 2t$$

и с помощью известных тригонометрических формул преобразовать его к виду

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 a - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a \cos 4t. \quad (11.63)$$

Для периодичности u_2 требуется выполнить условие

$$\delta_2 a + \frac{1}{2} a = 0,$$

откуда при $a \neq 0$ (т. е. в случае нетривиального решения) имеем

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}. \quad (11.64)$$

Используя полученные результаты, находим решение во втором приближении:

$$u = a + \frac{1}{2} \varepsilon a \cos 2t + \dots, \quad (11.65)$$

$$\delta = -(1/2) \varepsilon^2 + \dots. \quad (11.66)$$

Таким образом, переходная кривая, отделяющая области устойчивости и неустойчивости и выходящая из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, описывается уравнением (11.66). Соотношение (11.65) показывает, что на этой кривой решение периодически с периодом π .

¹⁾ Решение $u_0 = a$ не является общим решением, поскольку оно подчиняется условию ограниченности при $t \rightarrow \infty$. — Прим. перев.

Случай $n = 1$

Подставляя (11.58) в уравнение (11.56) и полагая $n = 1$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 = -\delta_1 (a \cos t + b \sin t) - 2 (a \cos t + b \sin t) \cos 2t, \\ \text{которое с помощью простых тригонометрических формул преоб-} \\ \text{разуется к виду} \\ \ddot{u}_1 + u_1 = -(1 + \delta_1) a \cos t - (\delta_1 - 1) b \sin t - \\ - a \cos 3t - b \sin 3t. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Требование исключения слагаемых, порождающих секулярные члены в u_1 , приводит к условиям

$$(\delta_1 + 1) a = 0, \quad (11.68)$$

$$(\delta_1 - 1) b = 0, \quad (11.69)$$

в результате чего уравнение (11.67) принимает вид

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a \cos 3t - b \sin 3t. \quad (11.70)$$

Условие (11.68) удовлетворяется при $\delta_1 = -1$ или при $a = 0$, а условие (11.69) — при $\delta_1 = 1$ или $b = 0$. При этом в случае $\delta_1 = -1$ для выполнения соотношения (11.69) необходимо, чтобы b равнялось нулю, а в случае $\delta_1 = 1$ для выполнения (11.68) необходимо, чтобы a равнялось нулю. Таким образом, мы имеем две возможности

$$\delta_1 = -1, \quad b = 0, \quad (11.71)$$

$$\delta_1 = 1, \quad a = 0. \quad (11.72)$$

Следовательно, решение уравнения (11.70), не содержащее решения соответствующего однородного уравнения, имеет вид

$$u_1 = \frac{1}{8} a \cos 3t \quad (11.73)$$

или

$$u_1 = \frac{1}{8} b \sin 3t. \quad (11.74)$$

Подстановка (11.71) и (11.73) в уравнение (11.57) дает

$$\ddot{u}_2 + u_2 = \frac{1}{8} a \cos 3t - \delta_2 a \cos t - \frac{1}{4} a \cos 3t \cos 2t,$$

или

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\delta_2 + \frac{1}{8}\right) a \cos t + \frac{1}{8} a \cos 3t - \frac{1}{8} a \cos 5t. \quad (11.75)$$

Требование отсутствия слагаемого, которое приводит к появлению секулярного члена в решении u_2 , дает

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}. \quad (11.76)$$

Таким образом, во втором приближении имеем

$$u = a \cos t + \frac{1}{8} \varepsilon a \cos 3t + \dots, \quad (11.77)$$

$$\delta = 1 - \varepsilon + \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (11.78)$$

Уравнение (11.78) описывает одну из ветвей переходной кривой, выходящую из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, а соотношение (11.77) показывает, что на этой кривой решение является периодическим с периодом 2π .

Аналогичным образом, подстановка (11.72) и (11.74) в уравнение (11.57) дает

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\frac{1}{8} b \sin 3t - \delta_2 b \sin t - \frac{1}{4} b \sin 3t \cos 2t,$$

или

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\delta_2 + \frac{1}{8}\right) b \sin t - \frac{1}{8} b \sin 3t - \frac{1}{8} b \sin 5t. \quad (11.79)$$

Требование отсутствия слагаемого в правой части (11.79), порождающего секулярный член в решении u_2 , приводит к условию

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}. \quad (11.80)$$

Следовательно, во втором приближении имеем также

$$u = b \sin t + \frac{1}{8} \varepsilon b \sin 3t + \dots, \quad (11.81)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \quad (11.82)$$

Уравнение (11.82) описывает вторую ветвь переходной кривой, выходящую из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, а соотношение (11.81) показывает, что и на этой ветви решение имеет период 2π .

Случай $n = 2$

Подставляя (11.58) в уравнение (11.56) и полагая $n = 2$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 4u_1 = & -\delta_1 (a \cos 2t + b \sin 2t) - \\ & - 2(a \cos 2t + b \sin 2t) \cos 2t, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 4u_1 = & -\delta_1 a \cos 2t - \delta_1 b \sin 2t - \\ & - a - a \cos 4t - b \sin 4t. \end{aligned} \quad (11.83)$$

Из условия уничтожения секулярного члена в u_1 следует, что $\delta_1 = 0$. При этом решение (11.83), не включающее в себя решение соответствующего однородного уравнения, дается формулой

$$u_1 = -\frac{1}{4} a + \frac{1}{12} a \cos 4t + \frac{1}{12} b \sin 4t. \quad (11.84)$$

Тогда уравнение (11.57) с учетом (11.84) принимает вид

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\delta_2(a \cos 2t + b \sin 2t) - 2\left(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{12}a \cos 4t + \frac{1}{12}b \sin 4t\right) \cos 2t,$$

или

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\left(\delta_2 - \frac{5}{12}\right)a \cos 2t - \left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right)b \sin 2t + (H. C. \text{ Ч}). \quad (11.85)$$

Потребовав, как обычно, исключения секулярных членов из u_2 , приходим к соотношениям

$$\left(\delta_2 - \frac{5}{12}\right)a = 0, \quad \left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right)b = 0. \quad (11.86)$$

Таким образом, существуют два решения

$$\delta_2 = \frac{5}{12}, \quad b = 0 \quad (11.87)$$

или

$$\delta_2 = -\frac{1}{12}, \quad a = 0. \quad (11.88)$$

Итак, во втором приближении имеем

$$u = a \cos 2t - \frac{1}{4}ea \left(1 - \frac{1}{3} \cos 4t\right) + \dots, \quad (11.89)$$

$$\delta = 4 + \frac{5}{12}e^2 + \dots \quad (11.90)$$

или

$$u = b \sin 2t + \frac{1}{12}eb \sin 4t + \dots, \quad (11.91)$$

$$\delta = 4 - \frac{1}{12}e^2 + \dots \quad (11.92)$$

Уравнения (11.90) и (11.92) описывают две ветви переходной кривой, выходящие из точки $e = 0$, $\delta = 4$; при этом соотношения (11.89) и (11.91) показывают, что на этих ветвях решение u периодически с периодом π .

11.4. Метод Уиттекера

В предыдущем параграфе мы установили, что метод растянутых параметров позволяет найти переходные кривые и периодические решения на этих кривых. Если же нас интересуют решения в окрестности переходных кривых, необходимо воспользоваться другим подходом. Для этого используем нормальную форму решения, или форму Флоке. Положим

$$u(t) = e^{i\omega t} \varphi(t), \quad (11.93)$$

где в соответствии с теорией Флоке $\varphi(t + \pi) = \varphi(t)$. Но дифференцирование (11.93) по t дает

$$\dot{u} = e^{\nu t} \dot{\varphi} + \gamma e^{\nu t} \varphi, \quad (11.94)$$

$$\ddot{u} = e^{\nu t} \ddot{\varphi} + 2\gamma e^{\nu t} \dot{\varphi} + \gamma^2 e^{\nu t} \varphi. \quad (11.95)$$

Подставляя выражения (11.93) и (11.95) в уравнение (11.2), имеем

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + (\delta + \gamma^2 + 2\varepsilon \cos 2t) \varphi = 0. \quad (11.96)$$

Таким образом, задача сводится к определению γ и построению периодических решений уравнения (11.96) при заданном δ . В окрестности переходной кривой величина γ мала, и поэтому будем искать разложение в форме

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots, \quad (11.97)$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots, \quad (11.98)$$

$$\gamma = \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \dots. \quad (11.99)$$

Для того чтобы дать лишь общее представление о методе Уиттекера, ограничимся нахождением членов порядка ε . Подставляя разложения (11.97)–(11.99) в уравнение (11.96), находим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \varepsilon \ddot{\varphi}_1 + 2\varepsilon \gamma_1 (\dot{\varphi}_0 + \varepsilon \dot{\varphi}_2) + (\delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \gamma_1^2 + 2\varepsilon \cos 2t) \times \\ \times (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1) + \dots = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \delta_0 \varphi_0 + \varepsilon (\ddot{\varphi}_1 + \delta_0 \varphi_1 + 2\gamma_1 \dot{\varphi}_0 + \\ + \delta_1 \varphi_0 + 2\varphi_0 \cos 2t) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (11.100)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 и ε в уравнении (11.100), получаем

$$\ddot{\varphi}_0 + \delta_0 \varphi_0 = 0, \quad (11.101)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \delta_0 \varphi_1 = -2\gamma_1 \dot{\varphi}_0 - \delta_1 \varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2t. \quad (11.102)$$

Общее решение уравнения (11.101) можно представить как

$$\varphi_0 = a \cos \sqrt{\delta_0} t + b \sin \sqrt{\delta_0} t. \quad (11.103)$$

Поскольку, согласно теории Флоке, функция φ имеет период π , то величина $\sqrt{\delta_0}$ будет равна n , где n — произвольное целое число. При этом уравнение (11.102) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + n^2 \varphi_1 = -2\gamma_1 (-an \sin nt + bn \cos nt) - \\ - \delta_1 (a \cos nt + b \sin nt) - 2(a \cos nt + b \sin nt) \cos 2t. \end{aligned} \quad (11.104)$$

В случае $n \neq 1$ источником секулярных членов в решении φ_1 оказываются первые два слагаемых правой части (11.104), пропорциональные γ_1 и δ_1 ; в случае $n = 1$ секулярный член поро-

ждается и последним слагаемым. Таким образом, уравнение (11.104) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = (2\gamma_1 a - \delta_1 b + b) \sin t - (2\gamma_1 b + \delta_1 a + a) \cos t + (\text{H. C. Ч}). \quad (11.105)$$

Уничтожая слагаемые, приводящие к появлению секулярных членов в φ_1 , имеем

$$2\gamma_1 a + (1 - \delta_1) b = 0, \quad (1 + \delta_1) a + 2\gamma_1 b = 0. \quad (11.106)$$

Условием существования нетривиального решения системы (11.106) является обращение в нуль ее определителя, т. е.

$$4\gamma_1^2 - (1 - \delta_1^2) = 0, \quad \text{или} \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{4}(1 - \delta_1^2),$$

откуда

$$\gamma_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \delta_1^2}. \quad (11.107)$$

Из первого уравнения (11.106) с учетом формулы (11.107) следует, что

$$b = -\frac{2\gamma_1}{1 - \delta_1} a = \mp \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right)^{1/2} a. \quad (11.108)$$

Следовательно, в первом приближении получаем

$$u = a_1 e^{(1/2) \varepsilon t \sqrt{1 - \delta_1^2}} \left[\cos t - \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right)^{1/2} \sin t \right] + \\ + a_2 e^{-(1/2) \varepsilon t \sqrt{1 - \delta_1^2}} \left[\cos t + \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right)^{1/2} \sin t \right] + \dots, \quad (11.109)$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий задачи.

Соотношение (11.109) представляет собой первое приближение к решению u на переходной кривой и в ее окрестности. При этом характеристические показатели оказываются равными $\pm \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{1 - \delta_1^2}$. Поэтому движение будет неограниченным при $\delta_1^2 < 1$ и конечным при $\delta_1^2 \geq 1$. Значения $\delta_1^2 = 1$, или $\delta_1 = \pm 1$, соответствуют переходу от устойчивого режима к неустойчивому. Следовательно, переходные кривые, выходящие из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, описываются в первом приближении уравнениями

$$\delta = 1 \pm \varepsilon + \dots \quad (11.110)$$

11.5. Метод многих масштабов

Хотя метод Уиттекера и позволяет получить равномерную аппроксимацию решения уравнения (11.2) на переходных кривых и в их окрестностях, однако он пригоден только для линейных задач, при решении которых можно обратиться к теории Флоке с тем, чтобы с ее помощью заранее определить форму решения. К нелинейным задачам теория Флоке неприменима, и априорная

информация о виде решения отсутствует, поэтому использовать метод Уиттекера в таких задачах не представляется возможным. Тем не менее существует эффективный метод приближенного решения и для нелинейных задач. Таким методом является метод многих масштабов, не требующий к тому же задания какой бы то ни было априорной информации о характере искомого решения.

Для того чтобы проиллюстрировать применение метода многих масштабов к уравнению (11.2), будем искать равномерно пригодное разложение решения в виде

$$u(t, \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (11.111)$$

где $T_n = \varepsilon^n t$. В этом параграфе мы получим только разложение первого порядка, оставляя построение высших приближений читателю (см. упражнения в конце данной главы). Таким образом, будем проводить вычисления с точностью до членов порядка ε и поэтому используем только два масштаба времени и соответственно две независимые переменные T_0 и T_1 . Подставляя разложение (11.111) в уравнение (11.2) с учетом формул (5.45) и (5.46), получаем

$$(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2T_0)(u_0 + \varepsilon u_1) + \dots = 0, \quad (11.112)$$

где $\cos 2t$ представлен как функция быстрого времени. Приравнявая нулю коэффициенты при ε^0 и ε , имеем

$$D_0^2 u_0 + \delta u_0 = 0, \quad (11.113)$$

$$D_0^2 u_1 + \delta u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2u_0 \cos 2T_0. \quad (11.114)$$

Общее решение уравнения (11.113) может быть представлено в комплексной форме

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega T_0}, \quad (11.115)$$

$$\text{где} \quad \omega = \sqrt{\delta} \quad \text{или} \quad \omega^2 = \delta. \quad (11.116)$$

При этом уравнение (11.114) принимает вид

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i\omega A' e^{i\omega T_0} + 2i\omega \bar{A}' e^{-i\omega T_0} - (e^{2iT_0} + e^{-2iT_0})(A e^{i\omega T_0} + \bar{A} e^{-i\omega T_0}),$$

или

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i\omega A' e^{i\omega T_0} - \bar{A} e^{i(2-\omega)T_0} - \bar{A} e^{-i(2+\omega)T_0} + (\text{к. с.}). \quad (11.117)$$

Для нас интерес представляют два случая: $1 - \omega = 0$ (1) и $1 + \omega = 0$ (2).

Случай ω , далеких от единицы

В этом случае условие уничтожения секулярных членов в решении u_1 сводится к уравнению $A' = 0$, откуда

$$A = A_0 = \text{const.} \quad (11.118)$$

Следовательно, в первом приближении имеем

$$u = A_0 e^{i\omega T_0}.$$

Если положить $A_0 = (1/2) a_0 \exp(i\beta_0)$, где a и β — вещественные постоянные, то решение u примет вид

$$u = a_0 \cos(\omega t + \beta_0), \quad (11.119)$$

из которого следует, что движение исходной системы является ограниченным.

Случай $\omega \approx 1$

В этом случае введем параметр расстройки с помощью соотношения

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 \quad (11.120)$$

и положим

$$(2 - \omega) T_0 = \omega T_0 - 2\varepsilon \omega_1 T_0 = \omega T_0 - 2\omega_1 T_1. \quad (11.121)$$

Из вида правой части уравнения (11.117) следует, что секулярные члены уничтожаются при условии

$$2i\omega A' + \bar{A} e^{-2i\omega_1 T_1} = 0. \quad (11.122)$$

Уравнение (11.122) можно решить, представляя комплексную амплитуду A либо в показательной, либо в алгебраической форме. В первом случае имеем

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}. \quad (11.123)$$

При этом уравнение (11.122) принимает вид

$$i\omega(a' + ia\beta') e^{i\beta} + \frac{1}{2} a e^{-i(\beta + 2\omega_1 T_1)} = 0,$$

или

$$i\omega(a' + ia\beta') + \frac{1}{2} a e^{-i\chi} = i\omega(a' + ia\beta') + \frac{1}{2} a \cos \chi - \frac{1}{2} ia \sin \chi = 0, \quad (11.124)$$

где

$$\chi = 2\beta + 2\omega_1 T_1. \quad (11.125)$$

Отделяя в уравнении (11.124) вещественную и мнимую части, имеем

$$\omega a' = \frac{1}{2} a \sin \chi, \quad (11.126)$$

$$\omega a\beta' = \frac{1}{2} a \cos \chi. \quad (11.127)$$

Исключение β из соотношений (11.125) и (11.127) дает

$$\omega a\chi' = 2\omega\omega_1 a + a \cos \chi. \quad (11.128)$$

Из уравнений (11.126) и (11.128) в случае $a \neq 0$ следует

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \frac{\sin \chi d\chi}{2\omega\omega_1 + \cos \chi} = -\frac{1}{2} \frac{d(\cos \chi)}{2\omega\omega_1 + \cos \chi}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$a = c [2\omega\omega_1 + \cos \chi]^{-1/2}, \quad (11.129)$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (11.129) задает связь между a и χ . При этом, для того чтобы получить зависимость a и, следовательно, χ от времени T_1 , нужно решить уравнение (11.126) или уравнение (11.128).

При изменении переменной χ от $-\infty$ до $+\infty$ $\cos \chi$ меняется от -1 до 1 . Следовательно, выражение в скобках в (11.129) будет обращаться в нуль, а амплитуда a — в бесконечность (т. е. движение становится неограниченным) при условии $2\omega\omega_1 < -1$ или $2\omega\omega_1 \geq -1$; в остальных случаях выражение в скобках в нуль не обращается и амплитуда a остается ограниченной. Таким образом, переход от устойчивого режима к неустойчивому происходит при выполнении соотношений

$$2\omega\omega_1 = 1, \quad 2\omega\omega_1 = -1.$$

При этом, поскольку $\omega \approx 1$, указанные условия дают $\omega_1 \approx 1/2$ или $\omega_1 \approx -1/2$. Следовательно, переходные кривые описываются уравнениями

$$\omega = 1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon + \dots$$

Вспоминая, что $\delta = \omega^2$, получаем для переходных кривых, выходящих из точки $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, уравнения вида

$$\delta = \left(1 \pm \frac{1}{2} \varepsilon + \dots\right)^2,$$

или

$$\delta = 1 \pm \varepsilon + \dots \quad (11.130)$$

При втором способе решения прежде всего введем в уравнение (11.122) преобразование

$$A = B e^{-i\omega_1 T_1}, \quad (11.131)$$

переводящее его в уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$2i\omega B' + 2\omega\omega_1 B + \bar{B} = 0. \quad (11.132)$$

Для решения уравнения (11.132) представим B в алгебраической форме

$$B = B_r + iB_i, \quad (11.133)$$

в результате чего получим

$$2i\omega (B_r' + iB_i') + 2\omega\omega_1 (B_r + iB_i) + B_r - iB_i = 0. \quad (11.134)$$

Отделяя в (11.134) вещественную и мнимую части, находим

$$2\omega B_r + (2\omega\omega_1 - 1) B_i = 0, \quad (11.135)$$

$$2\omega B_i - (2\omega\omega_1 + 1) B_r = 0.$$

Уравнения системы (11.135) имеют постоянные коэффициенты, поэтому решение этой системы можно искать в виде

$$B_r = b_r e^{\gamma_1 T_1}, \quad B_i = b_i e^{\gamma_1 T_1}. \quad (11.136)$$

Подстановка (11.136) в (11.135) дает

$$\begin{aligned} 2\omega\gamma_1 b_r + (2\omega\omega_1 - 1) b_i &= 0, \\ -(2\omega\omega_1 + 1) b_r + 2\omega\gamma_1 b_i &= 0. \end{aligned} \quad (11.137)$$

Нетривиальное решение системы (11.137) существует при условии обращения в нуль ее определителя:

$$4\omega^2 \gamma_1^2 + (4\omega^2 \omega_1^2 - 1) = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{4} (\omega^{-2} - 4\omega_1^2),$$

откуда

$$\gamma_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega^{-2} - 4\omega_1^2}. \quad (11.138)$$

Поскольку $\omega \approx 1$, соотношение (11.138) можно записать в виде

$$\gamma_1 \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\omega_1^2}. \quad (11.139)$$

При этом из (11.137) следует, что

$$b_i = \frac{2\omega\gamma_1}{1 - 2\omega\omega_1} b_r \approx \pm \left(\frac{1 + 2\omega_1}{1 - 2\omega_1} \right)^{1/2} b_r. \quad (11.140)$$

Подставляя выражения для A и B из формул (11.131) и (11.133) в решение (11.115) и далее — в разложение (11.111), с учетом соотношения (11.120) имеем

$$\begin{aligned} u &= (B_r + iB_i) e^{i(\omega T_0 - \omega_1 T_1)} + (B_r - iB_i) e^{-i(\omega T_0 - \omega_1 T_1)} + \dots = \\ &= (B_r + iB_i) e^{it} + (B_r - iB_i) e^{-it} + \dots = \\ &= B_r (e^{it} + e^{-it}) + iB_i (e^{it} - e^{-it}) = \\ &= 2B_r \cos t - 2B_i \sin t + \dots \end{aligned} \quad (11.141)$$

Воспользовавшись теперь выражениями (11.136) и (11.140), перепишем формулу (11.141) в виде

$$\begin{aligned} u &= a_1 e^{-(1/2) \pm i \sqrt{1 - 4\omega_1^2}} \left[\cos t - \left(\frac{1 + 2\omega_1}{1 - 2\omega_1} \right)^{1/2} \sin t \right] + \\ &+ a_2 e^{-(1/2) \pm i \sqrt{1 - 4\omega_1^2}} \left[\cos t + \left(\frac{1 + 2\omega_1}{1 - 2\omega_1} \right)^{1/2} \sin t \right] + \dots \end{aligned} \quad (11.142)$$

Разложение (11.142) полностью совпадает с разложением (11.109), полученным по методу Уиттекера, если учесть, что $2\omega_1 = \delta_1$.

11.6. Метод усреднения

Для того чтобы применить к уравнению (11.2) метод усреднения, прежде всего следует ввести вместо переменной $u(t)$ новые зависимые переменные $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, положив

$$u(t) = \alpha(t) \cos [\omega t + \beta(t)], \quad (11.143)$$

где, как и ранее, $\delta = \omega^2$. Дифференцирование (11.143) по t дает

$$\dot{u} = -\omega a \sin(\omega t + \beta) + \dot{a} \cos(\omega t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(\omega t + \beta). \quad (11.144)$$

Как и ранее, подчиняя решение условию, что

$$\dot{u} = -\omega a \sin(\omega t + \beta), \quad (11.145)$$

получаем из (11.144)

$$\dot{a} \cos(\omega t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(\omega t + \beta) = 0. \quad (11.146)$$

Дифференцирование (11.145) по t дает

$$\ddot{u} = -\omega^2 a \cos(\omega t + \beta) - \omega \dot{a} \sin(\omega t + \beta) - \omega a\dot{\beta} \cos(\omega t + \beta). \quad (11.147)$$

Подставляя выражения (11.143) и (11.147) в уравнение (11.2), имеем

$$-\omega^2 a \cos(\omega t + \beta) - \omega \dot{a} \sin(\omega t + \beta) - \omega a\dot{\beta} \cos(\omega t + \beta) + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) a \cos(\omega t + \beta) = 0.$$

Упрощая последнее уравнение, с учетом равенства $\delta = \omega^2$ получаем

$$\begin{aligned} \omega \dot{a} \sin(\omega t + \beta) + \omega a\dot{\beta} \cos(\omega t + \beta) &= \\ &= 2\varepsilon a \cos 2t \cos(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (11.148)$$

Разрешая уравнения (11.146) и (11.148) относительно \dot{a} и $\dot{\beta}$, находим

$$\begin{aligned} \omega \dot{a} &= 2\varepsilon a \cos 2t \sin(\omega t + \beta) \cos(\omega t + \beta), \\ \omega a\dot{\beta} &= 2\varepsilon a \cos 2t \cos^2(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (11.149)$$

С помощью известных формул тригонометрии перепишем (11.149) в виде

$$\omega \dot{a} = \frac{1}{2} \varepsilon a \{ \sin [2(\omega + 1)t + 2\beta] + \sin [2(\omega - 1)t + 2\beta] \}, \quad (11.150)$$

$$\omega a\dot{\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon a \{ 2 \cos 2t + \cos [2(\omega + 1)t + 2\beta] + \cos [2(\omega - 1)t + 2\beta] \}. \quad (11.151)$$

Приближенное решение имеет различный вид для ω , близких и далеких от единицы. В последнем случае все члены в правых частях уравнений (11.150) будут быстро меняющимися, так что в первом приближении имеем

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{\beta} = 0,$$

что полностью согласуется с уравнением (11.118), полученным по методу многих масштабов. При $\omega \approx 1$ функция $(\omega - 1)t + \beta$ представляет собой медленно меняющуюся функцию t . При этом

из уравнений (11.150) и (11.151) следует, что в первом приближении

$$\begin{aligned}\omega \dot{a} &= \frac{1}{2} \varepsilon a \sin [2(\omega - 1)t + 2\beta], \\ \omega a \dot{\beta} &= \frac{1}{2} \varepsilon a \cos [2(\omega - 1)t + 2\beta],\end{aligned}\quad (11.152)$$

что также согласуется с системой уравнений (11.125)–(11.127), полученной по методу многих масштабов.

Упражнения

11.1. Рассмотреть уравнение Матье

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) u = 0.$$

Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение второго порядка при $\delta \approx 0$ и $\delta \approx 4$.

11.2. Рассмотреть уравнение Матье

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) u = 0.$$

Используя метод Уиттекера, построить равномерно пригодное разложение второго порядка при $\delta \approx 0$ и $\delta \approx 4$.

11.3. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta u}{1 + \varepsilon \cos 2t} = 0.$$

а) Построить разложения второго порядка для уравнений переходных кривых вблизи точек $\delta = 0$, $\delta = 1$ и $\delta = 4$.

б) Используя метод Уиттекера, построить разложение второго порядка для решения u в окрестности этих кривых.

11.4. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{\delta - \varepsilon \cos^2 t}{1 - \varepsilon \cos^2 t} u = 0.$$

а) Построить разложения второго порядка для уравнений первых трех переходных кривых (т. е. при $\delta = 0, 1, 4$).

б) С помощью метода Уиттекера построить приближенное решение в окрестности этих кривых.

11.5. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + (\delta + \varepsilon \cos^3 t) u = 0.$$

Построить разложения второго порядка для первых трех переходных кривых с помощью метода растянутых параметров и метода Уиттекера.

11.6. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \left(\delta + \varepsilon \cos 2t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha \sin 2t + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \cos 4t \right) u = 0.$$

Найти два первых члена в уравнениях переходных кривых при $\delta \approx 1$ и $\delta \approx 4$.

11.7. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \frac{1}{4} (1 - \varepsilon \cos t)^{-3} a^{-2} [2(1 - \varepsilon \cos t)(2 - \varepsilon a^2 \cos t) + \varepsilon^2 a^2 \sin^2 t] u = 0.$$

Показать, что первые три переходные кривые описываются уравнениями

$$a = 2 \pm \frac{1}{2} \varepsilon, \quad a = 1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2.$$

11.8. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + (\omega^2 + 2\varepsilon \cos 3t) u = 0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

а) Используя метод вариации параметров, получить уравнения для амплитуды и фазы.

б) Используя метод усреднения, получить уравнения, описывающие медленные изменения амплитуды и фазы. Рассмотреть все возможные случаи.

11.9. Используя метод многих масштабов и метод усреднения, получить уравнения первого приближения для амплитуд и фаз в случае системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon u^2 \cos \Omega t,$$

где Ω существенно отлична от нуля и

а) ω_0 далека от Ω и $\Omega/3$,

б) $\omega_0 \approx \Omega$,

в) $3\omega_0 \approx \Omega$.

11.10. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2\varepsilon u^3 \cos 2t = 0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Используя метод многих масштабов и метод усреднения, получить уравнения, описывающие в первом приближении амплитуду и фазу колебаний данной системы при следующих условиях:

а) ω_0 далека от 1 и 1/2,

б) $\omega_0 \approx 1$,

в) $\omega_0 \approx 1/2$.

11.11. Параметрическое возбуждение системы с двумя степенями свободы описывается системой уравнений

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + \varepsilon \cos \Omega t (f_{11} u_1 + f_{12} u_2) = 0,$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + \varepsilon \cos \Omega t (f_{21} u_1 + f_{22} u_2) = 0.$$

Используя метод многих масштабов и метод усреднения, получить уравнения для амплитуд и фаз колебаний при условии $\Omega \approx \omega_2 \mp \omega_1$.

ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В задачах, рассмотренных в гл. 4—11, влияние возмущений было малым, однако они действовали в течение длительного времени. Поэтому соответствующие амплитуды и фазы оказывались медленно меняющимися функциями времени и их можно было исследовать путем введения медленных временных масштабов или почти тождественных преобразований координат. В этой главе мы будем рассматривать задачи с возмущениями, действующими в очень узких областях, или зонах, в которых зависимые переменные испытывают достаточно резкие изменения. Ввиду наличия малого параметра при старшей производной эти узкие зоны часто оказываются лежащими вблизи границы области, в которой решается задача. Поэтому в задачах механики жидкостей и газов такие зоны называют обычно *пограничными слоями*, в механике твердого тела — *областями краевого эффекта*, в электрических приложениях — *поверхностными*, или *скин-слоями*. Во многих физических задачах резкие изменения зависимых переменных часто происходят внутри интересующих нас областей; в таких случаях узкие зоны, где эти изменения имеют место, в механике жидкостей и газов и в механике твердого тела называются обычно *ударными слоями (скачками уплотнения)*, в квантовой механике — *точками перехода*, в математике — *стоксовыми линиями* или *поверхностями*. Указанные быстрые изменения мы не можем исследовать с помощью обычных медленных масштабов; это приводит к необходимости вводить новые — быстрые, увеличенные или растянутые — переменные.

Существует большое число методов исследования задач с пограничным слоем, как, например, метод сращиваемых асимптотических разложений, метод составных разложений, метод многих масштабов, метод ВКБ и преобразование Лангера. Два последних метода применяются только для линейных уравнений с большим параметром — мы обсудим их в гл. 14. В данной главе ограничимся лишь анализом метода сращиваемых асимптотических разложений, затем кратко рассмотрим метод составных разложений, и на одном примере исследуем возможности метода многих масштабов.

Мы начнем с анализа простого примера, имеющего точное решение; это решение удобно использовать в дальнейшем для срав-

нения и обоснования предлагаемых методов. Затем мы исследуем несколько линейных и нелинейных задач, у которых точные решения отсутствуют.

12.1. Простой пример

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon^2) y' + (1 - \varepsilon^2) y = 0, \quad (12.1)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (12.2)$$

где ε — малый безразмерный параметр, который мы считаем положительным. При этом предполагается, что уравнение и граничные условия уже приведены к безразмерному виду.

Для начала будем искать прямое разложение решения в форме

$$y(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.3)$$

Подстановка разложения (12.3) в уравнение (12.1) и граничные условия (12.2) дает

$$\varepsilon (y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots) + (1 + \varepsilon^2) (y_0' + \varepsilon y_1' + \dots) +$$

$$+ (1 - \varepsilon^2) (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) = 0,$$

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots = \alpha,$$

$$y_0(1) + \varepsilon y_1(1) + \dots = \beta.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем: для порядка ε^0 :

$$y_0' + y_0 = 0, \quad (12.4)$$

$$y_0(0) = \alpha, \quad y_0(1) = \beta; \quad (12.5)$$

для порядка ε^1 :

$$y_1' + y_1 = -y_0'', \quad (12.6)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 0. \quad (12.7)$$

Общее решение уравнения (12.4) записывается в виде

$$y_0 = c_0 e^{-x}, \quad (12.8)$$

где c_0 — произвольная постоянная.

Отметим, что, согласно (12.5), на функцию y_0 накладываются два граничных условия; в то же время общее решение (12.8) содержит лишь одну произвольную постоянную. Таким образом, мы оказываемся не в состоянии (кроме как по чистой случайности) удовлетворить обоим граничным условиям. Например, воспользовавшись условием $y_0(0) = \alpha$, из формулы (12.8) имеем

$$\alpha = c_0, \text{ или } y_0 = \alpha e^{-x}. \quad (12.9)$$

Используя же граничное условие $y_0(1) = \beta$, с помощью (12.8) находим

$$\beta = c_0 e^{-1}, \text{ или } c_0 = \beta e, \quad (12.10)$$

откуда
$$y_0 = \beta e^{1-x}. \quad (12.11)$$

Сравнение выражений (12.9) и (12.10) показывает, что для того, чтобы удовлетворить обоим граничным условиям, постоянная c_0 должна принимать одновременно два различных значения, а именно $c_0 = \alpha$ и $c_0 = \beta e$. Это конечно, невозможно, если исключить случайное совпадение, когда $\alpha = \beta e$.

Сравнивая уравнение (12.4) с исходным уравнением (12.1), можно заметить, что уравнение (12.1) является уравнением второго порядка, что позволяет использовать оба граничных условия, тогда как уравнение (12.4) оказывается уже уравнением первого порядка — для него можно использовать лишь одно граничное условие. Таким образом, мы не в состоянии удовлетворить другому граничному условию и обязаны его опустить. Естественно, нельзя ожидать, что и результирующее разложение окажется пригодным на том конце промежутка, где опущено соответствующее граничное условие. При этом возникает вопрос, какое же из заданных граничных условий должно быть отброшено. Как будет видно из последующего изложения, на этот вопрос можно ответить, привлекая как физические, так и математические соображения. Ниже мы покажем, что в случае, когда коэффициент при y' в уравнении (12.1) положителен, следует отбрасывать граничное условие на левом конце промежутка, т. е. при $x = 0$.

Опуская граничное условие $y(0) = \alpha$, получаем, что $c_0 = \beta e$ и функция y_0 дается выражением (12.11). Тогда (12.6) переходит в уравнение

$$y_1' + y_1 = -\beta e^{1-x}, \quad (12.12)$$

общее решение которого

$$y_1 = c_1 e^{-x} - \beta x e^{1-x}. \quad (12.13)$$

Поскольку уравнение (12.12) вновь оказывается уравнением первого порядка, решение y_1 будет содержать только одну произвольную постоянную, и мы опять не сможем удовлетворить обоим граничным условиям (12.7). Таким образом, решение задачи для y_1 не позволяет преодолеть указанную трудность. Точно так же нет оснований ожидать каких-либо изменений и на последующих стадиях итерационного процесса, поскольку на каждом шаге соответствующее дифференциальное уравнение будет оставаться уравнением первого порядка. Таким образом, мы вновь отбрасываем граничное условие при $x = 0$ и, используя граничное условие $y_1(1) = 0$, получаем из (12.13), что $c_1 = \beta e$. Окончательно имеем

$$y_1 = \beta e^{1-x} - \beta x e^{1-x} = \beta(1-x)e^{1-x}. \quad (12.14)$$

Подставляя теперь выражения (12.11) и (12.14) в разложение (12.3), находим

$$y = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta (1-x) e^{1-x} + \dots \quad (12.15)$$

При этом в точке $x = 0$ имеем $y = \beta e (1 + \varepsilon)$, что, вообще говоря, отлично от значения α в первом из условий (12.2).

Для того чтобы выявить причину неравномерности полученного разложения и способы ее устранения, обратимся к точному решению нашей задачи.

Точное решение

Так как уравнение (12.1) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, его решение можно искать с помощью подстановки

$$y = e^{sx},$$

которая приводит к характеристическому уравнению

$$\text{или} \quad \varepsilon s^2 + (1 + \varepsilon^2) s + 1 - \varepsilon^2 = 0,$$

$$(\varepsilon s + 1 - \varepsilon)(s + 1 - \varepsilon) = 0,$$

корни которого суть

$$s_1 = -(1 + \varepsilon) \quad \text{и} \quad s_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Таким образом, общее решение (12.1) можно представить в виде

$$y = a_1 e^{-(1+\varepsilon)x} + a_2 e^{-[(1/\varepsilon)-1]x}. \quad (12.16)$$

Подставляя решение (12.16) в граничные условия (12.2), имеем

$$\alpha = a_1 + a_2, \quad \beta = a_1 e^{-(1+\varepsilon)} + a_2 e^{-[(1/\varepsilon)-1]},$$

откуда

$$a_1 = \frac{\beta - \alpha e^{-[(1/\varepsilon)-1]}}{e^{-(1+\varepsilon)} - e^{-[(1/\varepsilon)-1]}}, \quad a_2 = \frac{\alpha e^{-(1+\varepsilon)} - \beta}{e^{-(1+\varepsilon)} - e^{-[(1/\varepsilon)-1]}}.$$

Следовательно, точное решение исходной задачи записывается как

$$y = \frac{[\beta - \alpha e^{-[(1/\varepsilon)-1]}] e^{-(1+\varepsilon)x} + [\alpha e^{-(1+\varepsilon)} - \beta] e^{-[(1/\varepsilon)-1]x}}{e^{-(1+\varepsilon)} - e^{-[(1/\varepsilon)-1]}}. \quad (12.17)$$

Для того чтобы установить причину неравномерности прямого разложения вблизи начала координат, разложим точное решение (12.17) в ряд для малых ε . При этом обратим внимание на то обстоятельство, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\exp(-1/\varepsilon)$ будет меньше, чем любая положительная степень ε . Поэтому мы можем переписать формулу (12.17) в виде

$$y = \beta e^{(1+\varepsilon)(1-x)} + [\alpha - \beta e^{1+\varepsilon}] e^{-(x/\varepsilon) + x} + (\text{Э. М. Ч.}), \quad (12.18)$$

где сокращение (Э. М. Ч.) используется для обозначения экспоненциально малых членов. При построении прямого разложения (12.15) предполагалось, что переменная x имеет некоторое фиксированное значение.

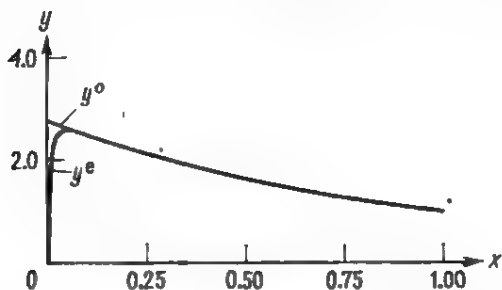


Рис. 12.1. Сравнение внешнего разложения y^o с точным решением y^e при $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0.0$.

рованное значение, отличное от нуля, после чего разлагалось решение y при малых ε . Если x фиксировано и положительно, тогда функция $\exp(-x/\varepsilon)$ будет экспоненциально мала, и мы можем переписать решение (12.18) в виде

$$y = \beta e^{(1+\varepsilon)(1-x)} + (\text{Э. М. Ч.}). \quad (12.19)$$

Раскладывая выражение (12.19) при малых ε , имеем

$$\begin{aligned} y &= \beta e^{1-x\varepsilon e^{(1-x)}} + (\text{Э. М. Ч.}) = \\ &= \beta e^{1-x} \left[1 + \varepsilon(1-x) + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 (1-x)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\text{откуда} \quad y = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta (1-x) e^{1-x} + \dots \quad (12.20)$$

в полном соответствии с прямым разложением (12.15).

Как и в случае прямого разложения, формула (12.20) становится непригодной вблизи точки $x = 0$, поскольку при этом $y(0) = \beta e(1 + \varepsilon)$, т. е., вообще говоря, отлично от значения α в первом из граничных условий (12.2). Следовательно, в процессе разложения решения (12.17) для случая малых ε мы, по-видимому, воспользовались одной или несколькими необоснованными операциями, которые и послужили причиной возникновения неравномерности полученного разложения. Для того чтобы проследить, какие это были операции, проанализируем более подробно процесс разложения в ряд точного решения. Прежде всего мы предположили, что функция $\exp(-1/\varepsilon)$ экспоненциально мала, и получили при этом выражение (12.18), которое остается равномерным при $x = 0$, поскольку оно дает $y(0) = \alpha$, т. е. удовлетворяет первому из граничных условий (12.2). Далее, мы зафиксировали некоторое положительное значение x и, исходя из того, что функция $\exp(-x/\varepsilon)$ экспоненциально мала, перешли к формуле (12.19). Полагая в этом выражении $x = 0$, видим, что $y(0) = \beta \exp(1 + \varepsilon)$, т. е. получаем значение, вообще говоря, отличающееся от значения α из граничного условия (12.2). Таким образом, именно этот шаг является причиной неравномерности

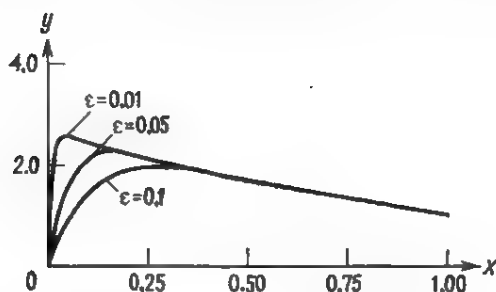


Рис. 12.2. Влияние величины параметра ε на толщину пограничного слоя при $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0.0$.

нового разложения. Рассматривая указанный переход более внимательно, можно заметить, что функция $\exp(-x/\varepsilon)$ будет экспоненциально малой при $\varepsilon \rightarrow 0$ только в том случае, когда значение x положительно и достаточно далеко от нуля. Поэтому не удивительно, что любое разложение, полученное на основе этого допущения, становится непригодным, когда $x \approx 0$. Фактически при $x = 0$ $\exp(-x/\varepsilon) = 1$, что всегда будет много больше, чем любая степень ε^m , где $m > 0$. Если же $x = \varepsilon$, то $\exp(-x/\varepsilon) = e^{-1}$, т. е. эта функция оказывается величиной $O(1)$ и уже никак не экспоненциально малым членом.

Возникает вопрос, насколько применимо полученное прямое разложение (12.15), если мы знаем, что оно непригодно вблизи точки $x = 0$. Ответ на этот вопрос можно видеть из рис. 12.1, на котором приведено сравнение решения y^0 , подсчитанного по формуле (12.15), с точным решением y^ε (формула (12.17)) для случая $\varepsilon = 0.01$. Нетрудно заметить, что при указанном малом ε решение y^0 хорошо согласуется с y^ε везде, за исключением малого участка вблизи точки $x = 0$, где y^ε быстро меняется, чтобы успеть удовлетворить граничному условию. Этот участок вблизи начала координат мы будем называть *пограничным слоем*. Рис. 12.2 показывает, что по мере уменьшения величины ε пограничный слой становится все более тонким; следовательно, решение $y(x; \varepsilon)$ непрерывно при $\varepsilon > 0$, но претерпевает разрыв в точке $\varepsilon = 0$, и мы не можем произвольно менять порядок предельных переходов при $x \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. В самом деле, в соответствии с формулой (12.17) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \alpha,$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \alpha.$$

С другой стороны, из решения (12.17) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \beta e^{1-x}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) = \beta \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y(x; \varepsilon) \neq \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x; \varepsilon),$$

что и доказывает неравномерную сходимость прямого разложения y° к точному решению задачи $y(x; \varepsilon)$. Задачи такого рода обычно называются задачами *сингулярных возмущений*. Анализ точного решения (12.17) показывает, что функция y зависит от x и ε различными способами — в виде комбинаций (масштабов) x/ε , εx , а также прямо от x . При этом возникает вопрос, нельзя ли построить равномерно пригодное разложение, используя в качестве масштаба не переменную x , а некоторую функцию x и ε . Для того чтобы ответить на этот вопрос, исследуем теперь влияние разных масштабов переменных на получающиеся в результате разложения.

Влияние разных масштабов на разложение

Идея метода построения равномерно пригодных разложений для задач сингулярных возмущений заключается в том, что мы увеличиваем или растягиваем пограничный слой и исследуем поведение решения в пограничном слое как функцию новой, растянутой переменной. Для облегчения этого исследования проанализируем влияние смены масштаба непосредственно на результирующем разложении (12.18).

Перейдем, например, от переменной x к растянутой (мелкомасштабной) переменной $\xi = x/\varepsilon$. Тогда выражение (12.18), которое не содержит явно экспоненциально малых членов, переписется следующим образом:

$$y = \beta \varepsilon^{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\xi)} + [\alpha - \beta \varepsilon^{1+\varepsilon}] e^{-\xi + \varepsilon\xi} + (\text{Э. М. Ч.}).$$

Раскладывая его при малых ε и при фиксированном значении ξ , получаем

$$y = \beta \varepsilon + (\alpha - \beta \varepsilon) e^{-\xi} + \varepsilon \{ \beta \varepsilon (1 - \xi) + [-\beta \varepsilon + (\alpha - \beta \varepsilon) \xi] e^{-\xi} \} + \dots \quad (12.21)$$

Возвращаясь в разложении (12.21) вновь к переменной x , имеем

$$y = \beta \varepsilon (1 - x) + (\alpha - \beta \varepsilon) (1 + x) e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon \beta \varepsilon [1 - e^{-x/\varepsilon}] + \dots \quad (12.22)$$

В начале координат $y(0) = \alpha$, тогда как на правом конце промежутка $y(1) = \varepsilon \beta \varepsilon$. Поэтому разложение (12.22) оказывается непригодным в окрестности точки $x = 1$, хотя оно, по-видимому, остается в силе в начале координат. На рис. 12.3 показано, что разложение (12.22) хорошо согласуется с точным решением лишь в малой окрестности точки $x = 0$, но сильно отклоняется от него вдали от этой точки:

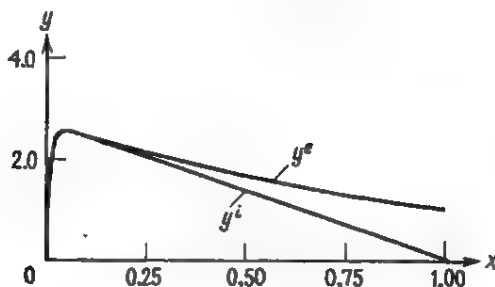


Рис. 12.3. Сравнение так называемого внутреннего разложения (12.22), обозначенного на рис. через y^i , с точным решением y^e при $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0$.

В качестве второго примера рассмотрим еще более мелкий масштаб, а именно переменную $\zeta = x/\varepsilon^2$. Тогда разложение (12.18) можно переписать в виде

$$y = \beta e^{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2\zeta)} + [\alpha - \beta e^{1+\varepsilon}] e^{-\varepsilon^2\zeta + \varepsilon^2\zeta} + (\text{Э. М. Ч.}),$$

откуда при малых ε и фиксированном ζ получаем

$$y = \alpha - \varepsilon(\alpha - \beta e)\zeta + \dots, \quad (12.23a)$$

или
$$y = \alpha - \frac{x}{\varepsilon}(\alpha - \beta e) + \dots \quad (12.23б)$$

В начале координат мы вновь имеем условие $y(0) = \alpha$, в то время как на правом конце $y(1) = \alpha - (\alpha - \beta e)/\varepsilon$, что отличается от величины β из условий (12.2). Таким образом, разложение (12.23) оказывается неприменимым вблизи точки $x = 1$. Фактически же оно будет пригодным только в очень малой окрестности начала координат (рис. 12.4).

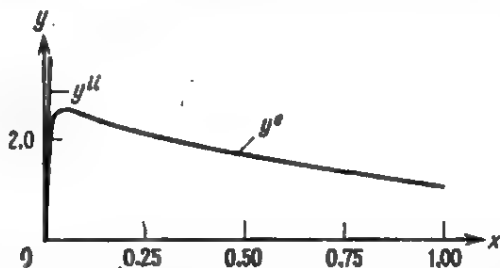


Рис. 12.4. Сравнение так называемого внутренне-внутреннего разложения (12.23), обозначенного на рис. через y^{ii} , с точным решением y^e при $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0$.

В качестве третьего примера исследуем случай умеренно растянутой координаты $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$. Для нее разложение (12.18) переписывается в виде

$$y = \beta e^{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^{1/2}\eta)} + [\alpha - \beta e^{1+\varepsilon}] e^{-\eta e^{-1/2+\varepsilon^{1/2}\eta}} + (\Theta. \text{ М. Ч.}),$$

откуда при малых ε и фиксированном η имеем

$$\begin{aligned} y &= \beta e (1 + \varepsilon + \dots) \left(1 - \varepsilon^{1/2} \eta + \frac{1}{2} \varepsilon \eta^2 + \dots \right) = \\ &= \beta e \left[1 - \varepsilon^{1/2} \eta + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2 \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (12.24a)$$

или
$$y = \beta e \left[1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \varepsilon + \dots \right]. \quad (12.24b)$$

В начале координат $y(0) = \beta e (1 + \varepsilon) \neq \alpha$, а на правом конце промежутка $y(1) = \beta e \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \neq \beta$. Таким образом, разложение (12.24b) оказывается непригодным вблизи обоих концов. Из рис. 12.5 видно, что это разложение хорошо согласуется с точным решением лишь на небольшом внутреннем интервале изменения переменной x .

Приведенное рассуждение показывает, что разложение функции, зависящей от некоторого аргумента и малого параметра, например функции $y(x; \varepsilon)$, очень сильно зависит от используемого при этом масштаба (т. е. от того, какой аргумент считается фиксированным). В рассмотренном примере при фиксированном x мы получили разложение (12.20), пригодное везде, за исключением малой окрестности начала координат. Зафиксировав переменную $\xi = x/\varepsilon$, мы получили разложение (12.22), справедливое только в малой окрестности точки $x = 0$. Считая же фиксированной переменную $\zeta = x/\varepsilon^2$, мы получили разложение (12.23), имеющее место в еще меньшей окрестности начала координат. Наконец, фиксируя переменную $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$, мы получили формулы (12.24), ко-

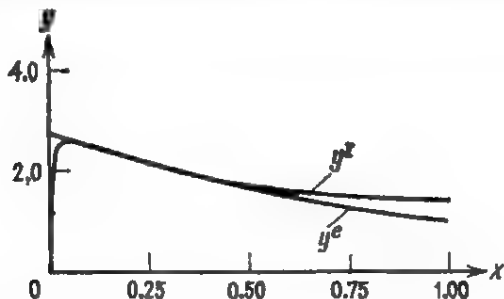


Рис. 12.5. Сравнение так называемого промежуточного разложения (12.24) обозначенного на рис. через y^f , с точным решением y^e при $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0$.

которые оказались непригодными вблизи обоих концов промежутка, но хорошо описывали решение на малом внутреннем промежутке. Таким образом, мы можем сделать вывод, что равномерно пригодное разложение решения задачи сингулярных возмущений нельзя получить, используя лишь один определенный масштаб (т. е. определенную комбинацию x и ε), как, например, x , x/ε , x/ε^2 или $x/\varepsilon^{1/2}$; тем самым подобные задачи оказываются идеальным объектом для применения метода многих масштабов. Однако для нелинейных задач, и в особенности для тех, которые описываются нелинейными уравнениями в частных производных, использование метода многих масштабов в некоторых случаях может оказаться затруднительным, в связи с чем в таких задачах довольно часто используется другой метод — метод сращиваемых асимптотических разложений. Именно этот метод мы и будем рассматривать в данной главе.

Основная идея, лежащая в основе метода сращиваемых асимптотических разложений, состоит в том, что приближенное решение данной задачи ищется не в виде единого разложения с заданным масштабом переменных, а в виде нескольких отдельных разложений, в которых используются два или более различных масштаба, пригодные лишь в части рассматриваемой области. Эти масштабы выбираются таким образом, чтобы а) полный набор разложений охватывал всю интересующую нас область и б) области применимости соседних разложений перекрывались. При этом ввиду условия б) нам необходимо *срассить* (т. е. *согласовать* друг с другом) соседние разложения и тем самым связать их между собой. Рассмотрим процесс согласования или сращивания решений в различных областях более подробно.

Сращивание

Для иллюстрации основной идеи сращивания попытаемся в качестве примера срассить разложение (12.15), которое будет пригодным везде, за исключением малой окрестности начала координат, с разложением (12.21), которое применимо лишь вблизи точки $x = 0$. При этом мы сумеем срассить их только в том случае, если эти два разложения имеют перекрывающиеся области применимости. Разложение (12.15) было найдено путем разложения функции $y(x; \varepsilon)$ при фиксированном x , тогда как формула (12.21) была получена в результате разложения функции $y(x; \varepsilon)$ при фиксированном $\xi = x/\varepsilon$. В связи с этим возникает вопрос, какое влияние на эти два разложения оказывает переход от одного масштаба переменной к другому.

Прежде чем ответить на этот вопрос, обозначим разложение, полученное при фиксированном x , надстрочным индексом « o », т. е. заменим в выражении (12.15) функцию y на y^o . Разложение же, полученное при фиксированном значении $\xi = x/\varepsilon$, будем обозначать надстрочным индексом « i », т. е. заменим в формуле

(12.21) y на y' . Далее, перейдем в разложении (12.15) от переменной x к переменной ξ ; в результате получим

$$y^0 = \beta e^{1-\varepsilon\xi} + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon\xi)e^{1-\varepsilon\xi} + \dots \quad (12.25)$$

Разлагая (12.25) для малых ε и при фиксированном ξ , имеем

$$(y^0)^i = \beta e + \varepsilon\beta e(1 - \xi) + \dots, \quad (12.26)$$

где верхний индекс « i » в разложении (12.26) использован для того, чтобы показать, что функция y^0 разлагается при фиксированном значении ξ . Наконец, переходя в разложении (12.21) к переменной x и вспоминая, что следует заменить функцию y на y' , находим

$$y' = \beta e(1 - x) + (\alpha - \beta e)(1 + x)e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon\beta e[1 - e^{-x/\varepsilon}] + \dots \quad (12.27)$$

Разлагая (12.27) для малых ε при фиксированном x , имеем

$$(y')^0 = \beta e(1 - x) + \varepsilon\beta e + \dots, \quad (12.28)$$

где верхний индекс « 0 » в выражении (12.28) использован для того, чтобы показать, что функция y' разлагается при фиксированном значении x . Заменяя теперь в (12.26) переменную ξ на x/ε , имеем

$$(y^0)^i = \beta e(1 - x) + \varepsilon\beta e + \dots \quad (12.29)$$

Сравнение разложений (12.28) и (12.29) позволяет сделать вывод, что

$$(y')^0 = (y^0)^i. \quad (12.30a)$$

Другими словами,

внешнее разложение внутреннего разложения =

= внутреннему разложению внешнего разложения. (12.30б)

Очевидно, что правило (12.30) применимо только в том случае, когда два соседних разложения имеют перекрывающиеся области применимости. Это правило называется обычно *принципом сшивания* и служит для сшивания двух соседних разложений. При этом объединение областей применимости разложений (12.15) и (12.25) позволяет охватить всю интересующую нас область, т. е. весь промежуток $[0, 1]$. Следовательно, полученные разложения можно использовать для представления решения y на всем промежутке $[0, 1]$.

Выберем теперь в разложениях (12.15) и (12.23а) новые переменные. Как и ранее, разложение, полученное при фиксированном x , будем обозначать верхним индексом « 0 ». Кроме того, разложение, полученное при фиксированном $\xi = x/\varepsilon$, будем обозначать индексом « i ». Такое разложение принято называть обычно *внутренне-внутренним* разложением. Заменяя в разложении (12.15) переменную x на ξ , имеем

$$y^0 = \beta e^{1-\varepsilon^2\xi} + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon^2\xi)e^{1-\varepsilon^2\xi} + \dots,$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ζ , находим

$$(y^0)^{ii} = \beta\varepsilon + \varepsilon\beta\varepsilon + \dots \quad (12.31)$$

Выражение (12.23а), которое после перехода к переменной x принимает вид (12.23б), в случае разложения для малых ε и при фиксированном x дает

$$(y^{ii})^0 = -(\alpha - \beta\varepsilon) \frac{x}{\varepsilon} + \alpha + \dots \quad (12.32)$$

Сравнение (12.31) и (12.32) показывает, что

$$(y^0)^{ii} \neq (y^{ii})^0. \quad (12.33)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что области применимости разложений (12.15) и (12.23а) не перекрываются. Это и не удивительно, поскольку, как видно из рис. 12.4, разложение (12.23) будет справедливым в очень малой окрестности начала координат — именно по этой причине мы и называли его внутренне-внутренним разложением. Отметим также, что существует бесконечное множество таких внутренне-внутренних разложений, характеризуемых различными масштабами $\zeta = x/\varepsilon^\nu$, где $\nu > 1$. Итак, объединение областей применимости разложений (12.15) и (12.23а) не покрывает всю интересующую нас область, а именно интервал $[0, 1]$.

В качестве третьего случая рассмотрим переход от одного масштаба к другому в разложениях (12.15) и (12.24а). Будем обозначать через y^I разложение, полученное при фиксированном $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$; такое разложение мы будем называть *промежуточным*. Переходя в разложении (12.15) от переменной x к переменной η , имеем

$$y = \beta\varepsilon^{1-\varepsilon^{1/2}\eta} + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon^{1/2}\eta)\varepsilon^{1-\varepsilon^{1/2}\eta} + \dots, \quad (12.34)$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном η , получаем

$$(y^0)^I = \beta\varepsilon - \varepsilon^{1/2}\beta\varepsilon\eta + \varepsilon\left(\beta\varepsilon + \frac{1}{2}\eta^2\right) + \dots \quad (12.35)$$

Замена η на x в формуле (12.24а) дает разложение (12.24б), откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , находим

$$(y^I)^0 = \beta\varepsilon\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right) + \varepsilon\beta\varepsilon + \dots \quad (12.36)$$

Сравнивая разложения (12.35) и (12.36) и вспоминая, что $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$, можно видеть, что эти разложения совпадают, и, следовательно, можно записать

$$(y^0)^I = (y^I)^0. \quad (12.37)$$

Таким образом, области применимости разложений (12.15) и (12.24а) перекрываются, что позволяет путем взаимной замены переменных получить из них одинаковые разложения. В то же время, хотя разложения (12.15) и (12.24а), как это видно из

рис. 12.5, имеют перекрывающиеся области пригодности, объединение этих областей не позволяет покрыть целиком интересующий нас промежуток, поскольку ни одно из них не будет пригодным в окрестности начала координат.

Приведенные рассуждения показывают, что соседние разложения, полученные в результате использования разных масштабов, не обязательно должны иметь перекрывающиеся друг друга области применимости. Более того, для двух соседних разложений объединение их перекрывающихся областей применимости не всегда будет охватывать всю интересующую нас область. Следовательно, целью метода сращиваемых асимптотических разложений является получение таких разложений, которое покрывали бы всю рассматриваемую область, причем таким образом, чтобы соседние разложения имели перекрывающиеся области применимости. При этом соседние разложения сращиваются или сшиваются с помощью принципа сращивания (12.30).

В рассматриваемом случае следует воспользоваться разложениями (12.15) и (12.21), поскольку они охватывают всю интересующую нас область и одновременно обладают перекрывающимися друг друга областями применимости. В то же время мы не можем использовать разложения (12.15) и (12.23а) именно из-за того, что их области применимости не перекрываются. Наконец, разложения (12.15) и (12.24а) нельзя использовать потому, что они не перекрывают всю интересующую нас область. Следует отметить, что область применимости разложения (12.24а) перекрывается с областью применимости разложения (12.21). Чтобы убедиться в этом, произведем в разложении (12.21) следующую замену переменных: $\eta = x/\varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/2}\xi$. В результате имеем

$$y' = \beta e + (\alpha - \beta e) e^{-\eta/\varepsilon^{1/2}} + \\ + \varepsilon \left\{ \beta e \left(1 - \frac{\eta}{\varepsilon^{1/2}} \right) + \left[-\beta e + (\alpha - \beta e) \frac{\eta}{\varepsilon^{1/2}} \right] e^{-\eta/\varepsilon^{1/2}} \right\} + \dots,$$

откуда при малых ε и фиксированном η находим

$$(y')' = \beta e - \beta e \varepsilon^{1/2} \eta + \varepsilon \beta e + \dots \quad (12.38)$$

Точно так же, заменяя в (12.24а) η на ξ , имеем

$$y' = \beta e \left[1 - \varepsilon \xi + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \xi^2 \right) + \dots \right],$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ξ , получаем

$$(y')' = \beta e + \varepsilon \beta e (1 - \xi) + \dots \quad (12.39)$$

Сравнивая формулы (12.38) и (12.39) и вспоминая, что $\eta = \varepsilon^{1/2}\xi$, можно сделать вывод, что эти разложения тождественны, и, следовательно,

$$(y'')' = (y')'. \quad (12.40)$$

Приведенные рассуждения показывают, что области применимости разложений (12.15) и (12.21) перекрываются, а их объединение покрывает весь интересующий нас промежуток. Разложение (12.15) называется обычно *внешним разложением* и обозначается через y^o . Разложение (12.21) принято называть *внутренним разложением* и обозначать через y^i . Переменная x при этом называется *внешней переменной*, а переменная $\xi = x/\varepsilon$ — *внутренней*. Отметим также, что область применимости разложения (12.24a) перекрывает области применимости разложения (12.15), с одной стороны, и разложения (12.21) — с другой. Поэтому разложение (12.24a) обычно называется *промежуточным разложением*, а переменная $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$ — *промежуточной переменной*, поскольку увеличение масштаба переменной, получаемое в результате введения переменной η , лежит между x и x/ε . Таким образом, любая переменная $\eta = x/\varepsilon^v$, где $0 < v < 1$, оказывается промежуточной. Иногда вместо непосредственного сращивания сшивании внешнего и внутреннего разложений производят путем поочередного приравнивания их некоторому промежуточному разложению. Мы продемонстрируем этот подход в § 12.3. В следующем же параграфе будет показано, как для получения равномерно пригодного разложения решения (12.1) можно использовать метод многих масштабов.

12.2. Метод многих масштабов

Как отмечалось в предыдущем параграфе, решение $y(x; \varepsilon)$ зависит не только прямо от переменных x и ε , но и от их комбинаций вида x/ε и εx . Это обстоятельство делает данную задачу идеальным объектом для применения метода многих масштабов. Поскольку область решения задачи конечна, величина εx остается малой, и, следовательно, в противоположность задачам для бесконечных областей, рассматривавшимся в гл. 4—11, наличие в нашей задаче секулярных членов вида εx , $\varepsilon^2 x^2$, $\varepsilon^3 x^3$, ... не будет служить причиной возникновения неравномерностей. Таким образом, достаточно ввести лишь одну мелкомасштабную переменную $\xi = x/\varepsilon$, которая для данной задачи совпадает с обычной внутренней переменной, и координату $x_0 = x$, которая в нашем случае является внешней переменной. В этих координатах

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x_0} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}, \quad (12.41)$$

так что уравнение (12.1) принимает вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + (1 + \varepsilon^2) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) + (1 - \varepsilon^2) y = 0. \quad (12.42)$$

Будем искать равномерно пригодное разложение первого порядка в форме

$$y = y_0(\xi, x_0) + \varepsilon y_1(\xi, x_0) + \dots \quad (12.43)$$

Как и в задачах о нелинейных колебаниях, для того чтобы определить произвольные функции, появляющиеся при решении задачи для y_0 , нам необходимо исследовать член порядка ε . Подставляя разложение (12.43) в уравнение (12.42) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0, \quad (12.44)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - y_0. \quad (12.45)$$

Общее решение уравнения (12.44) дается выражением

$$y_0 = A(x_0) + B(x_0)e^{-\xi}, \quad (12.46)$$

где функции A и B на этом шаге аппроксимации остаются неопределенными; их определяют на следующем этапе с помощью соответствующих условий разрешимости. Подстановка полученного выражения для y_0 в (12.45) дает

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = 2B'e^{-\xi} - A' - B'e^{-\xi} - A - Be^{-\xi},$$

или
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -(A' + A) + (B' - B)e^{-\xi}. \quad (12.47)$$

Частное решение уравнения (12.47) имеет вид

$$y_{1c} = -(A' + A)\xi - (B' - B)\xi e^{-\xi}, \quad (12.48)$$

так что при $\xi \rightarrow \infty$ величина εy_1 оказывается много больше, чем y_0 . Поэтому для получения равномерно пригодного разложения коэффициенты при ξ и при $\xi \exp(-\xi)$ в формуле (12.48) должны обращаться в нуль одновременно. Таким образом, имеем

$$A' + A = 0, \quad B' - B = 0. \quad (12.49)$$

Решения уравнений (12.49) можно представить в виде

$$A = ae^{-x_0}, \quad B = be^{x_0}, \quad (12.50)$$

где a и b — произвольные постоянные. Тогда решение (12.46) принимает вид

$$y_0 = ae^{-x_0} + be^{-\xi+x_0},$$

или, если перейти к исходной переменной,

$$y_0 = ae^{-x} + be^{-(x/\varepsilon)+x}.$$

Подстановка найденного выражения для y_0 в разложение (12.43) дает

$$y = ae^{-x} + be^{-(x/\varepsilon)+x} + \dots \quad (12.51)$$

Удовлетворяя граничным условиям (12.2), имеем

$$\alpha = a + b, \quad \beta = ae^{-1} + be^{-(1/\varepsilon)+1}.$$

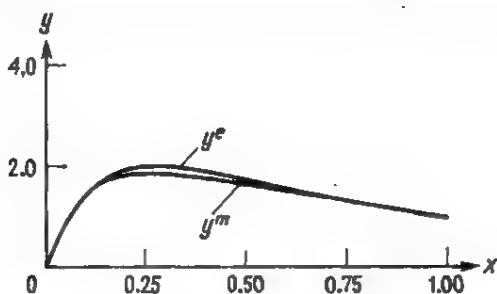


Рис. 12.6. Сравнение решения (12.52), полученного с помощью метода многих масштабов (и обозначенного на рис. через y^m), с точным решением y^ϵ при $\epsilon = 0.1$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0.0$.

Пренебрегая в этих соотношениях экспоненциально малым членом $\exp(-1/\epsilon)$ и разрешая их относительно a и b , получаем

$$a = \beta\epsilon, \quad b = \alpha - \beta\epsilon.$$

Таким образом, из разложения (12.51) находим, что в первом приближении

$$y = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta\epsilon) e^{-(x/\epsilon) + x} + \dots \quad (12.52)$$

Рис. 12.6 показывает, что разложение (12.52) хорошо согласуется с точным решением (12.17) во всех точках рассматриваемого промежутка. При этом значение параметра ϵ мы выбрали равным 0,1, для того чтобы иметь возможность различить на рисунке эти два решения.

12.3. Метод сращиваемых асимптотических разложений

Как отмечалось в § 12.1, главная идея, лежащая в основе метода сращиваемых асимптотических разложений, заключается в представлении решения несколькими разложениями, каждое из которых пригодно в некоторой части рассматриваемой области, причем области применимости соседних разложений перекрываются, что позволяет провести их сращивание. В этом параграфе мы проанализируем несколько примеров использования указанного метода, начав с рассмотрения простой краевой задачи (12.1)—(12.2).

При $\epsilon \rightarrow 0$ (12.1) вырождается в уравнение

$$y' + y = 0,$$

которое представляет собой уравнение первого порядка и, следовательно, не позволяет удовлетворить обоим краевым условиям. Поэтому одно из них должно быть опущено, и на соответствующем конце промежутка должен появиться пограничный слой. В § 12.1 для того, чтобы показать, что пограничный слой возникает вблизи

начала координат, мы воспользовались точным решением нашей задачи. Конечно, на практике, когда мы пользуемся описываемой методикой, точное решение задачи отсутствует; в противном случае просто не было бы нужды прибегать к построению приближенного решения. Таким образом, в данной задаче нам прежде всего необходимо определить расположение пограничных слоев. Хотя во многих случаях для этого можно воспользоваться различными физическими соображениями, в данной главе мы опишем, как можно определить расположение пограничных слоев чисто аналитическими методами. Кроме того, в двух предыдущих параграфах мы воспользовались структурой точного решения, для того чтобы установить, что в качестве внутренней переменной следует выбрать именно переменную $\xi = x/\varepsilon$. В этом параграфе мы также попытаемся обосновать выбор именно этой внутренней переменной.

Чтобы определить местоположение пограничного слоя, предположим, что он существует на одном, вполне определенном конце промежутка, и построим соответствующие одночленные разложения. При этом если мы сумеем срастить соседние разложения, то наше предположение будет правильным; в противном же случае пограничный слой будет располагаться вблизи другого конца.

Предположим, например, что пограничный слой имеет место на правом конце промежутка и, следовательно, условие $y(1) = \beta$ должно быть опущено. Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^o(x; \varepsilon) = y_0(x) + \dots$$

Подстановка этого разложения в уравнение (12.1) и условие $y(0) = \alpha$ дает

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = \alpha.$$

Таким образом, имеем

$$y_0 = c_0 e^{-x} \quad \text{и} \quad \alpha = c_0,$$

откуда

$$y^o = \alpha e^{-x} + \dots \quad (12.53)$$

Для того чтобы проанализировать поведение решения в окрестности выбранного пограничного слоя, нужно растянуть область вблизи точки $x = 1$, т. е. растянуть малый участок $1 - x$ ($x < 1$) вблизи конца $x = 1$. Поэтому выберем

$$\xi = \frac{1-x}{\varepsilon^\nu}, \quad (12.54)$$

где величина ν должна быть больше нуля, для того чтобы ξ оказалось увеличивающим, или растягивающим, преобразованием. Величина ν , вообще говоря, заранее не известна и определяется из последующих рассуждений. Отметим также, что, согласно определению, координата ξ является положительной.

Из соотношения (12.54) следует, что

$$x = 1 - \varepsilon^v \xi$$

$$\text{и} \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon^v} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2v}} \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Переходя в уравнении (12.1) к переменной ξ , имеем

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-v} (1 + \varepsilon^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - \varepsilon^2) y = 0. \quad (12.55)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном ξ главными членами в (12.55) будут

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-v} \frac{dy}{d\xi} + y + \dots = 0. \quad (12.56)$$

Предельная форма соотношения (12.56) при $\varepsilon \rightarrow 0$ зависит от величины v . При этом существуют три возможности: $v > 1$, $v < 1$ и $v = 1$.

В случае $v > 1$ соотношение (12.56) в пределе дает уравнение

$$\frac{d^2 y'}{d\xi^2} = 0,$$

общим решением которого будет

$$y' = a_0 + b_0 \xi. \quad (12.57)$$

Поскольку предполагается, что пограничный слой существует при $x = 1$, это решение должно удовлетворять условию $y = \beta$ при $x = 1$. Но точка $x = 1$ соответствует точке $\xi = 0$, и, следовательно, $y' = \beta$ при $\xi = 0$. Поэтому из решения (12.57) следует, что

$$\beta = a_0$$

и, значит,

$$y' = \beta + b_0 \xi. \quad (12.58)$$

Для того чтобы ссратить разложения (12.53) и (12.58), необходимо построить пределы $(y^o)'$ и $(y')^o$. Выражая (12.53) через переменную ξ , получаем

$$y^o = \alpha \varepsilon^{-1 + \varepsilon^v \xi},$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ξ , находим

$$(y^o)' = \alpha \varepsilon^{-1}. \quad (12.59)$$

Аналогичным образом, переходя в (12.58) к переменной x , получаем

$$y' = \beta + \frac{b_0 (1-x)}{\varepsilon^v},$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , имеем

$$(y')^o = \begin{cases} \beta, & \text{если } b_0 = 0, \\ \frac{b_0 (1-x)}{\varepsilon^v}, & \text{если } b_0 \neq 0. \end{cases} \quad (12.60)$$

Приравнивание в соответствии с принципом сращивания пределов (12.59) и (12.60) приводит к соотношениям $b_0 = 0$ и $\alpha e^{-1} = \beta$, что, вообще говоря, неверно. Таким образом, случай $\nu > 1$ исключается из нашего рассмотрения.

В случае $\nu < 1$ уравнение (12.56) в пределе дает

$$\frac{dy^i}{d\xi} = 0,$$

откуда

$$y^i = a_0.$$

Как и ранее, функция y^i должна удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$, или $y^i = \beta$ при $\xi = 0$. Поэтому $a_0 = \beta$ и

$$y^i = \beta. \quad (12.61)$$

Так как функция y^i постоянна, то

$$(y^i)^o = \beta. \quad (12.62)$$

Кроме того, как и в предыдущем случае, $(y^o)^i = \alpha e^{-1}$. Поэтому в соответствии с принципом сращивания имеем

$$(y^o)^i = (y^i)^o,$$

откуда $\beta = \alpha e^{-1}$, что, вообще говоря, неверно. Следовательно, случай $\nu < 1$ мы также должны исключить из рассмотрения.

Наконец, в случае $\nu = 1$ предельной формой уравнения (12.56) будет уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} - \frac{dy^i}{d\xi} = 0,$$

общее решение которого записывается в виде

$$y^i = a_0 + b_0 e^{\xi}.$$

Выполняя условие $y^i = \beta$ при $\xi = 0$, имеем

$$a_0 + b_0 = \beta, \text{ или } a_0 = \beta - b_0.$$

Таким образом,

$$y^i = \beta - b_0 + b_0 e^{\xi}.$$

Для того чтобы выполнить процедуру сращивания, выразим y^i через переменную x . В результате получим

$$y^i = \beta - b_0 + b_0 \exp\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right),$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , находим

$$(y^i)^o = \begin{cases} \beta, & \text{если } b_0 = 0, \\ b_0 \exp\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right), & \text{если } b_0 \neq 0. \end{cases} \quad (12.63)$$

При этом предельное соотношение $(y^o)^i$ вновь дается выражением (12.59). Далее, приравнивая в соответствии с принципом сращивания выражения (12.59) и (12.63), получаем $b_0 = 0$ и, следовательно,

$\beta = \alpha e^{-1}$, что, вообще говоря, неверно. Тем самым мы должны отбросить и этот последний случай. Отсюда следует, что пограничный слой вблизи конца $x = 1$ не существует.

Для того чтобы проверить, имеется ли пограничный слой вблизи конца $x = 0$, введем преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x}{e^v}, \quad \text{или} \quad x = e^v \xi, \quad (12.64)$$

где величина v считается положительной. Тогда

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{e^v} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{e^{2v}} \frac{d^2}{d\xi^2}$$

и уравнение (12.1) принимает вид

$$e^{1-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + e^{-v} (1 + e^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - e^2) y = 0.$$

Главной частью этого уравнения при $e \rightarrow 0$ является уравнение

$$e^{1-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + e^{-v} \frac{dy}{d\xi} + y = 0. \quad (12.65)$$

Как и ранее, здесь также существуют три возможности: $v > 1$, $v < 1$ и $v = 1$.

В случае $v > 1$ предельная форма (12.65) при $e \rightarrow 0$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2 y'}{d\xi^2} = 0, \quad (12.66a)$$

общее решение которого

$$y' = a_0 + b_0 \xi.$$

Поскольку предполагается, что пограничный слой существует вблизи начала координат, это решение должно удовлетворять граничному условию $y(0) = \alpha$. Но, согласно (12.64), точка $x = 0$ соответствует точке $\xi = 0$, и, следовательно, мы имеем $y' = \alpha$ при $\xi = 0$. Тогда $\alpha = a_0$ и

$$y' = \alpha + b_0 \xi. \quad (12.66b)$$

Ясно, что внешнее разложение должно оставаться справедливым при $x = 1$. В связи с этим будем искать его в форме

$$y^o(x; e) = y_0(x) + \dots$$

Подстановка этого разложения в уравнение (12.1) и условие $y(1) = \beta$ дает

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(1) = \beta.$$

Таким образом,

$$y_0 = c_0 e^{-x} \quad \text{и} \quad c_0 = \beta e,$$

$$\text{и} \quad y^o = \beta e^{1-x} + \dots \quad (12.67)$$

Для того чтобы срастить разложения (12.666) и (12.67), перепишем первое из них через переменную x . В результате получим

$$y^i = \alpha + \frac{b_0 x}{\varepsilon^\nu},$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , находим

$$(y^i)^\circ = \begin{cases} \alpha, & \text{если } b_0 = 0, \\ b_0 \frac{x}{\varepsilon^\nu}, & \text{если } b_0 \neq 0. \end{cases} \quad (12.68)$$

Далее, перепишем разложение (12.67) через переменную x , т. е.

$$y^o = \beta e^{1-\varepsilon^\nu \xi} + \dots,$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ξ , имеем

$$(y^o)^i = \beta e + \dots \quad (12.69)$$

Приравнивание в соответствии с принципом сращивания разложений (12.68) и (12.69) дает $b_0 = 0$ и $\alpha = \beta e$, что, вообще говоря, неверно. Таким образом, случай $\nu > 1$ должен быть исключен из рассмотрения.

В случае $\nu < 1$ предельная форма уравнения (12.65) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$\frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.70a)$$

откуда

$$y^i = a_0.$$

Используя условие $y^i = \alpha$ при $\xi = 0$, получаем, что $a_0 = \alpha$, и, следовательно,

$$y^i = \alpha. \quad (12.706)$$

Для того чтобы срастить разложения (12.67) и (12.706), заметим, что $(y^o)^i$ и в этом случае дается выражением (12.69) и, кроме того,

$$(y^i)^\circ = \alpha,$$

поскольку y^i есть постоянная величина. Как и ранее, использование принципа сращивания приводит к требованию $\alpha = \beta e$, что, вообще говоря, неверно. Следовательно, случай $\nu < 1$ также должен быть отброшен.

В случае $\nu = 1$ предельной формой уравнения (12.65) при $\varepsilon \rightarrow 0$ служит уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.71)$$

общее решение которого имеет вид

$$y^i = a_0 + b_0 e^{-\xi}.$$

Подстановка условия $y^i = \alpha$ при $\xi = 0$ дает

$$a_0 + b_0 = \alpha, \text{ или } a_0 = \alpha - b_0,$$

и, следовательно,

$$y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{-\xi}. \quad (12.72)$$

Для того чтобы срастить разложение (12.67) с (12.72), заметим, что $(y^0)^i$ и в этом случае дается той же самой формулой (12.69). Переходя в разложении (12.72) к переменной x , имеем

$$y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{-x/\varepsilon},$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , находим

$$(y^i)^0 = \alpha - b_0. \quad (12.73)$$

Приравнивая теперь в соответствии с принципом срачивания выражения (12.69) и (12.73), получаем

$$\alpha - b_0 = \beta\varepsilon, \text{ или } b_0 = \alpha - \beta\varepsilon.$$

Таким образом, в первом приближении имеем

$$y^0 = \beta\varepsilon^{1-x} + \dots, \quad y^i = \beta\varepsilon + (\alpha - \beta\varepsilon)e^{-x/\varepsilon} + \dots \quad (12.74)$$

в полном соответствии с разложениями, полученными в § 12.1 с помощью преобразования точного решения.

Поскольку мы сумели добиться срачивания, наше предположение о местонахождении пограничного слоя оказывается правильным. Кроме того, выбор в качестве внутренней переменной преобразования $\xi = x/\varepsilon$ позволяет построить внутреннее разложение, перекрывающее соответствующее внешнее разложение, причем именно случай $\nu = 1$ обеспечивает необходимое изменение масштаба в пограничном слое. Отметим также, что преобразования растяжения, соответствующие случаям $\nu \geq 1$, приводят к требованию $\alpha = \beta\varepsilon$, что, вообще говоря, является неверным. При этом условия $\nu < 1$ и $\nu > 1$ остаются в значительной мере неопределенными, поскольку каждое из них удовлетворяется бесконечным набором значений ν . С другой стороны, условие $\nu = 1$ оказывается вполне конкретным; оно соответствует так называемому *характерному пределу* задачи. При этом оказывается, что использование характерного предела всегда дает нам надлежащее преобразование координат. Кроме того, предельные формы (12.66а) и (12.70а) исходного дифференциального уравнения при $\nu \geq 1$ представляют собой частные случаи предельной формы (12.71) при $\nu = 1$. Таким образом, мы будем говорить об уравнении (12.71) как о наименее вырожденной форме предельного уравнения в пограничном слое. Поэтому в последующих параграфах мы всегда будем определять требуемые преобразования переменных путем выбора характерных пределов.

Формулы (12.74) представляют собой два отдельных разложения, а именно разложение y^0 — пригодное везде, за исключением малой окрестности порядка ε вблизи точки $x = 0$, и разложение y^i — пригодное только в малом промежутке порядка ε вблизи этой точки. Хотя области пригодности разложений y^0 и y^i перекры-

ваются, для получения численного решения, которое могло бы быть использовано на всем промежутке решения задачи, при некотором малом значении координаты x нам необходимо переключаться с одного разложения на другое. Однако это значение x точно не известно. Для того чтобы преодолеть указанное затруднение, из полученных разложений строят так называемое *составное разложение*, которое мы будем обозначать далее через y^c . Оно определяется следующим образом:

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o. \quad (12.75)$$

При этом оба указанных здесь варианта разложения эквивалентны, поскольку в силу условия сращивания имеем $(y^o)^i = (y^i)^o$. Таким образом, составное разложение (12.75) получается как результат сложения внешнего и внутреннего разложений, из которого вычитается их общая часть $(y^o)^i$ или $(y^i)^o$. Отметим, что разложение (12.75) хорошо согласуется с внутренним и внешним разложениями в соответствующей области их применимости. Действительно,

$$(y^c)^o = (y^o)^o + (y^i)^o - [(y^i)^o]^o.$$

Но поскольку $(f^o)^o = f^o$, то

$$(y^o)^o = y^o, \quad [(y^i)^o]^o = (y^i)^o,$$

и, следовательно,

$$(y^c)^o = y^o. \quad (12.76)$$

Аналогичным образом имеем

$$(y^c)^i = (y^o)^i + (y^i)^i - [(y^o)^i]^i.$$

Но поскольку $(f^i)^i = f^i$, то

$$(y^i)^i = y^i, \quad [(y^o)^i]^i = (y^o)^i,$$

и, следовательно,

$$(y^c)^i = y^i. \quad (12.77)$$

Таким образом, поскольку y^c представляет собой внешнее разложение во внешней области и внутреннее разложение во внутренней области, можно утверждать, что оно является хорошим приближением во всей области решения задачи.

В рассмотренном примере общая часть внешнего и внутреннего разложений y^o и y^i дается выражением (12.69) или (12.73), т. е.

$$(y^o)^i = (y^i)^o = \beta \varepsilon.$$

Поэтому

$$y^c = \beta \varepsilon^{1-x} + (\alpha - \beta \varepsilon) e^{-x/\varepsilon} + \dots \quad (12.78)$$

Устремляя в разложении (12.78) параметр ε к нулю при фиксированном x , имеем

$$(y^c)^o = \beta \varepsilon^{1-x} + \dots = y^o.$$

Переходя теперь в (12.78) к переменной ξ , получаем

$$y^c = \beta \varepsilon^{1-\varepsilon \xi} + (\alpha - \beta \varepsilon) e^{-\xi} + \dots,$$

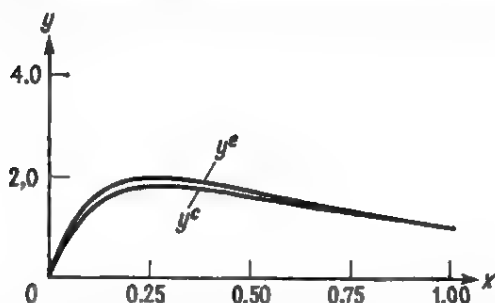


Рис. 12.7. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e при $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0.0$.

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ξ , находим

$$(y^c)^i = \beta e + (\alpha - \beta e) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \dots = y^i.$$

Следовательно, y^c действительно воспроизводит внутреннее и внешнее разложения в соответствующей области их применимости. Естественно, что разложение (12.78), как это и подтверждает рис. 12.7, оказывается прекрасным приближением к точному решению на всем интервале изменения x . Значение $\varepsilon = 0.1$ выбрано для того, чтобы можно было на рисунке легко различить приближенное асимптотическое и точное решения.

В заключение этого параграфа сравним разложение (12.78) с разложением (12.52), полученным с помощью метода многих масштабов. В то время как метод сращиваемых асимптотических разложений дает нам составное разложение, которое распадается на два отдельных разложения во внешних и внутренних переменных, метод многих масштабов приводит к единому разложению. Отметим также, что в случае уравнений с переменными коэффициентами внутренняя переменная очень часто оказывается нелинейной функцией от x .

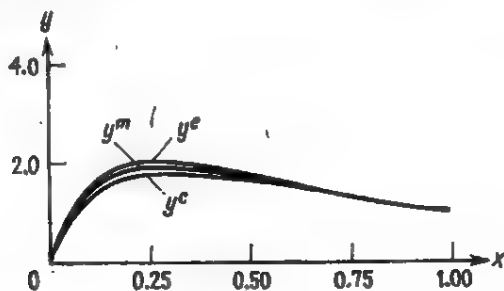


Рис. 12.8. Сравнение решения y^m , полученного по методу многих масштабов, с составным разложением y^c и точным решением y^e при $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 1.0$ и $\alpha = 0$.

Устремляя ε к нулю при фиксированном x , находим, что соотношения (12.52) и (12.78) приводят к одному и тому же внешнему разложению. Полагая теперь $x = \varepsilon \xi$ и устремляя ε к нулю при фиксированном ξ , получаем, что формулы (12.52) и (12.78) дают одно и то же внутреннее разложение. Следовательно, разложения (12.52) и (12.78) совпадают во внешней и внутренней областях. Однако разложение (12.52) ввиду присутствия в нем дополнительного множителя $\exp(x)$ лучше согласуется с точным решением при больших значениях ε (см. рис. 12.8). Это, конечно, не означает, что метод многих масштабов является более мощным по сравнению с методом сращиваемых асимптотических разложений. Так, например, использование метода многих масштабов для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений, и особенно уравнений в частных производных типа уравнений Навье—Стокса, представляет собой весьма сложную задачу.

12.4. Высшие приближения

Как отмечалось выше, для того чтобы построить асимптотическое разложение более высокого порядка, описывающее решение краевой задачи (12.1), (12.2), мы должны найти внешнее и внутреннее разложения, срастить их и, наконец, построить соответствующее составное разложение.

Внешнее разложение

Будем искать внешнее разложение в следующей форме:

$$y^0 = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.79)$$

При этом, поскольку мы предположили, что пограничный слой существует вблизи начала координат, это разложение должно удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$. Таким образом, подставляя разложение (12.79) в уравнение (12.1) и граничное условие $y(1) = \beta$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(1) = \beta, \quad (12.80)$$

$$y_1' + y_1 = -y_0'', \quad y_1(1) = 0. \quad (12.81)$$

Как и ранее, решение задачи для y_0 можно представить в виде

$$y_0 = \beta e^{1-x}.$$

Тогда уравнение (12.81) переписывается как

$$y_1' + y_1 = -\beta e^{1-x}.$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y_1 = c_1 e^{-x} - \beta x e^{1-x}.$$

Но поскольку $y_1(1) = 0$, то $c_1 = \beta e$, и, следовательно,

$$y^0 = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta (1-x) e^{1-x} + \dots \quad (12.82)$$

Внутреннее разложение

Для того чтобы найти внутреннее разложение, прежде всего заменим в уравнении (12.1) независимую переменную x на переменную $\xi = x/\varepsilon$. Тогда для внутреннего решения, которое будем обозначать через y^i , получим уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + (1 + \varepsilon^2) \frac{dy^i}{d\xi} + \varepsilon (1 - \varepsilon^2) y^i = 0. \quad (12.83)$$

Поскольку, согласно исходному предположению, пограничный слой существует вблизи начала координат, внутреннее разложение должно удовлетворять граничному условию $y = \alpha$ при $x = 0$. Но координата $x = 0$ соответствует координате $\xi = 0$, поэтому

$$y^i(0) = \alpha. \quad (12.84)$$

Далее, будем искать внутреннее разложение в форме

$$y^i = Y_0(\xi) + \varepsilon Y_1(\xi) + \dots \quad (12.85)$$

Подставляя разложение (12.85) в уравнение (12.83) и граничное условие (12.84) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим

$$Y_0'' + Y_0' = 0, \quad Y_0(0) = \alpha, \quad (12.86)$$

$$Y_1'' + Y_1' = -Y_0, \quad Y_1(0) = 0. \quad (12.87)$$

Общее решение задачи для Y_0 имеет вид

$$Y_0 = a_0 + b_0 e^{-\xi}.$$

Подстановка этого выражения в условие $Y_0(0) = \alpha$ дает

$$\alpha = a_0 + b_0, \quad \text{или} \quad a_0 = \alpha - b_0,$$

откуда

$$Y_0 = \alpha - b_0 + b_0 e^{-\xi}.$$

При этом уравнение (12.87) переходит в уравнение

$$Y_1'' + Y_1' = -(\alpha - b_0) - b_0 e^{-\xi},$$

общее решение которого записывается как

$$Y_1 = a_1 + b_1 e^{-\xi} - (\alpha - b_0) \xi + b_0 \xi e^{-\xi}.$$

Подстановка в условие $Y_1(0) = 0$ дает

$$a_1 + b_1 = 0, \quad \text{или} \quad a_1 = -b_1,$$

и, следовательно,

$$Y_1 = -b_1 + b_1 e^{-\xi} - (\alpha - b_0) \xi + b_0 \xi e^{-\xi}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{-\xi} + \varepsilon [-b_1 + b_1 e^{-\xi} - (\alpha - b_0) \xi + b_0 \xi e^{-\xi}] + \dots, \quad (12.88)$$

где оставшиеся постоянные b_0 и b_1 определяются из условия сращивания.

Сращивание

Для того чтобы сшить внешнее и внутреннее разложения, воспользуемся условием сращивания $(y^o)^i = (y^i)^o$. Поскольку оба этих разложения содержат по два члена, нам нужно найти первые два члена в каждом из разложений $(y^o)^i$ и $(y^i)^o$. Переходя в (12.82) к переменной $\xi = x/\varepsilon$, имеем

$$y^o = \beta e^{1-\varepsilon\xi} + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon\xi)e^{1-\varepsilon\xi} + \dots,$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном ξ , находим

$$(y^o)^i = \beta e + \varepsilon\beta e(1 - \xi) + \dots \quad (12.89)$$

Возвращаясь в разложении (12.88) к переменной x , имеем

$$y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{-x/\varepsilon} + \\ + \varepsilon \left[-b_1 + b_1 e^{-x/\varepsilon} - (\alpha - b_0) \frac{x}{\varepsilon} + b_0 \frac{x}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} \right] + \dots,$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном x , находим

$$(y^i)^o = \alpha - b_0 - (\alpha - b_0)x - \varepsilon b_1 + \dots \quad (12.90)$$

Наконец, приравнивая разложения (12.89) и (12.90) в силу принципа сращивания, получаем соотношение

$$\beta e + \varepsilon\beta e(1 - \xi) = \alpha - b_0 - (\alpha - b_0)x - \varepsilon b_1,$$

которое с учетом того, что $\xi = x/\varepsilon$, можно переписать в виде

$$\beta e - \beta ex + \varepsilon\beta e = \alpha - b_0 - (\alpha - b_0)x - \varepsilon b_1. \quad (12.91)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε в равенстве (12.91) приводит к условиям

$$\beta e - \beta ex = \alpha - b_0 - (\alpha - b_0)x, \quad (12.92)$$

$$\beta e = -b_1. \quad (12.93)$$

Если пограничный слой существует там, где мы и предположили заранее, и соответствующее растягивающее преобразование выбрано правильно, то полученные условия сращивания оказываются непротиворечивыми, и из них можно определить постоянные b_0 и b_1 . В самом деле, приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x в соотношении (12.92) дает

$$\beta e = \alpha - b_0, \quad \beta e = \alpha - b_0,$$

откуда $b_0 = \alpha - \beta e$. Далее, из условия (12.93) следует, что $b_1 = -\beta e$. Таким образом, разложение (12.88) приобретает вид

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\xi} + \varepsilon [\beta e - \beta e e^{-\xi} - \beta e \xi + (\alpha - \beta e)\xi e^{-\xi}] + \dots \quad (12.94)$$

Как уже отмечалось в § 12.1, сращивание можно производить, используя промежуточные разложения. Введем, например, промежуточную переменную $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$, которая дает изменение

масштаба, среднее между x и $\xi = x/\varepsilon$. Переходя от переменной x к переменной η , перепишем разложение (12.82) в виде

$$y^0 = \beta e^{1-\varepsilon^{1/2}\eta} + \varepsilon \beta (1 - \varepsilon^{1/2}\eta) e^{1-\varepsilon^{1/2}\eta} + \dots, \quad (12.95a)$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном η , имеем

$$(y^0)^I = \beta \varepsilon - \varepsilon^{1/2} \beta \varepsilon \eta + \varepsilon \beta \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right) + \dots \quad (12.95b)$$

Полагая теперь в разложении (12.88) $\xi = \eta/\varepsilon^{1/2}$, находим

$$y^I = \alpha - b_0 + b_0 e^{-\eta/\varepsilon^{1/2}} + \varepsilon \left[-b_1 + b_1 e^{-\eta/\varepsilon^{1/2}} - \frac{(\alpha - b_0) \eta}{\varepsilon^{1/2}} + \frac{b_0 \eta}{\varepsilon^{1/2}} e^{-\eta/\varepsilon^{1/2}} \right] + \dots, \quad (12.96a)$$

откуда, разлагая при малых ε и фиксированном η , получаем

$$(y^I)^I = \alpha - b_0 - \varepsilon^{1/2} (\alpha - b_0) \eta - \varepsilon b_1 + \dots \quad (12.96b)$$

Приравнявая разложения (12.95b) и (12.96b) в соответствии с принципом промежуточного сращивания, находим, что они согласуются вплоть до порядка $\varepsilon^{1/2}$. Следовательно, на этом шаге аппроксимации мы можем найти только постоянную b_0 . Для того чтобы срастить разложения до $O(\varepsilon)$, необходимо продолжить внутреннее разложение до членов второго порядка. С другой стороны, промежуточное сращивание может проводиться путем вычитания разложения (12.96a) из (12.95a), после чего следует устремить ε к нулю при фиксированном значении переменной η . Этот процесс позволяет определить обе постоянные b_0 и b_1 . Сопоставляя процесс промежуточного сращивания с прямым сращиванием, можно сделать вывод, что промежуточное сращивание представляет собой излишнее усложнение предлагаемого метода, и поэтому в дальнейшем мы не будем им пользоваться.

Весьма удобный вариант прямого сращивания представляет собой так называемый принцип сращивания Ван-Дайка:

$$\begin{aligned} & m\text{-членное внутреннее разложение} \\ & n\text{-членного внешнего разложения равно} \\ & n\text{-членному внешнему разложению} \\ & m\text{-членного внутреннего разложения,} \end{aligned} \quad (12.97)$$

где m и n — два произвольных целых числа, не обязательно равных друг другу. Чтобы определить m -членное внутреннее разложение (n -членного внешнего разложения), перепишем первые n членов внешнего разложения, выразив их через внутреннюю переменную, и затем разложим их для малых ε при фиксированном значении внутренней переменной, учитывая в полученном разложении лишь m членов. Аналогичным образом можно получить и правую часть соотношения (12.97).

Для того чтобы продемонстрировать использование принципа сращивания Ван-Дайка, применим его к сращиванию двучленного внешнего разложения (12.82) с двучленным внутренним разложением (12.88). При этом будем действовать следующим образом.

Двучленное внешнее разложение: $y \sim \beta e^{1-x} + \beta \xi (1-x) e^{1-x}$.

Перепишем через внутреннюю переменную: $= \beta e^{1-\varepsilon \xi} + \beta \xi (1-\varepsilon \xi) e^{1-\varepsilon \xi}$.

Разложим при малых ε : $= \beta e \left(1 - \varepsilon \xi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi^2 + \dots \right) + \beta \varepsilon \xi (1 - \varepsilon \xi) (1 - \varepsilon \xi + \dots)$.

Найдем двучленное внутреннее разложение: $= \beta e + \beta \varepsilon e (1 - \xi)$. (12.98)

Двучленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha - b_0 + b_0 e^{-\xi} + \varepsilon [-b_1 + b_1 e^{-\xi} - (\alpha - b_0) \xi + b_0 \xi e^{-\xi}]$.

Перепишем через внешнюю переменную: $= \alpha - b_0 + b_0 e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon \left[-b_1 + b_1 e^{-x/\varepsilon} - (\alpha - b_0) \frac{x}{\varepsilon} + \frac{b_0 x}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon} \right]$.

Разложим при малых ε : $= \alpha - b_0 - (\alpha - b_0) x - \varepsilon b_1 + (\text{Э. М. Ч.})$.

Найдем двучленное внешнее разложение: $= \alpha - b_0 - (\alpha - b_0) x - \varepsilon b_1$. (12.99)

Приравняв теперь разложения (12.98) и (12.99) в соответствии с условием сращивания (12.97) и выразив переменную ξ через переменную x , мы в точности получим соотношение (12.91). Следует отметить, что существуют случаи, в которых принцип сращивания Ван-Дайка может оказаться неприменимым. Тем не менее он очень удобен и потому широко применяется на практике.

В приведенном примере мы могли найти любое число членов во внутреннем или внешнем разложениях, причем соответствующие произвольные постоянные определялись в процессе сращивания. Однако это оказывается возможным далеко не всегда. Например, при построении асимптотики решения задачи обтекания тела произвольной формы потоком вязкой жидкости необходимо прежде всего определить одночленное внешнее разложение, которое используется для нахождения одночленного внутреннего разложения; лишь затем переходят к нахождению второго члена внешнего разложения, который в свою очередь используют для нахождения второго члена внутреннего разложения и т. д.

Составное разложение

После того как внешнее и внутреннее разложения найдены, проведено их сращивание и тем самым определены все неизвестные постоянные, можно построить составное разложение, которое будет

равномерно пригодным на всем промежутке решения задачи. С этой целью подставим выражения для y^0 , y^1 и $(y^0)'$ из формул (12.82), (12.94) и (12.89) соответственно в выражение (12.75) и получим такое единое равномерно пригодное разложение:

$$y^e = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e) e^{-\xi} + \varepsilon [\beta (1-x) e^{1-x} - \beta e^{1-\xi} + (\alpha - \beta e) \xi e^{-\xi}] + \dots \quad (12.100)$$

12.5. Уравнения с переменными коэффициентами

В этом параграфе мы воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений для построения асимптотического решения первого порядка краевой задачи

$$\varepsilon y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (12.101)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \quad (12.102)$$

в случае задания функций p_1 и p_0 некоторого специального вида. Эта задача исследуется также в гл. 14 с помощью метода ВКБ и преобразования Лангера. Здесь мы рассмотрим два примера, в которых функция $p_1(x) \neq 0$ на промежутке $[0, 1]$, а также два примера, в которых $p_1(x)$ обращается в нуль на этом промежутке.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon y'' - (2x + 1) y' + 2y = 0. \quad (12.103)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ это уравнение переходит в дифференциальное уравнение первого порядка, и, следовательно, одно из граничных условий (12.102) должно быть опущено. При этом оказывается, что если $p_1(x) > 0$ на промежутке $[0, 1]$, то пограничный слой существует на левом конце этого промежутка, а если $p_1(x) < 0$ на $[0, 1]$, то пограничный слой будет иметь место на правом конце. Таким образом, для рассматриваемого уравнения пограничный слой существует в окрестности точки $x = 1$, и внешнее разложение должно удовлетворять граничному условию $y(0) = \alpha$. Во всяком случае, наличие пограничного слоя на правом конце промежутка подтвердится, если мы сумеем срастить полученные разложения, так чтобы вся схема построения решения оказалась математически непротиворечивой¹⁾.

Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^0 = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.104)$$

¹⁾ В литературе по прикладному асимптотическому анализу такие процедуры, хотя и не имеющие строгого математического обоснования, но обладающие внутренней стройностью и логической завершенностью, называют обычно самосогласованными. — *Прим. перев.*

Подставляя разложение (12.104) в уравнение (12.103) и условие $y(0) = \alpha$ и приравнивая коэффициенты при ε^0 в обеих частях полученных равенств, получаем

$$-(2x+1)y'_0 + 2y_0 = 0, \quad y_0(0) = \alpha. \quad (12.105)$$

Разделяя переменные в (12.105), находим

$$\frac{dy_0}{y_0} = \frac{2dx}{2x+1},$$

откуда $\ln y_0 = \ln(2x+1) + \ln c_0$,

где c_0 — произвольная постоянная. Тогда

$$y_0 = c_0(2x+1),$$

и поскольку $y_0(0) = \alpha$, то, следовательно, $c_0 = \alpha$. Таким образом, имеем

$$y_0 = \alpha(2x+1)$$

и $y'' = \alpha(2x+1) + \dots$ (12.106)

Для того чтобы построить разложение, пригодное в пограничном слое, необходимо растянуть окрестность точки $x = 1$. Поэтому положим

$$\xi = \frac{1-x}{\varepsilon^\nu} \quad \text{или} \quad x = 1 - \varepsilon^\nu \xi, \quad (12.107)$$

где величина ν считается положительной и определяется в процессе дальнейшего анализа. Переходя в уравнении (12.103) к переменной ξ с помощью преобразования (12.107) и обозначая внутреннее решение через y^i , получаем

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\nu} (3 - 2\varepsilon^\nu \xi) \frac{dy^i}{d\xi} + 2y^i = 0. \quad (12.108)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ предельная форма уравнения (12.108) зависит от выбора ν . Как отмечалось ранее, требуемое значение ν должно выбираться в соответствии с видом характерного предела. Поэтому положим $\nu = 1$ и перепишем уравнение (12.108) как

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + (3 - 2\varepsilon \xi) \frac{dy^i}{d\xi} + 2\varepsilon y^i = 0. \quad (12.109)$$

Поскольку мы предположили, что пограничный слой существует вблизи точки $x = 1$, внутреннее решение должно удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$. Но точка $x = 1$ соответствует точке $\xi = 0$, откуда

$$y^i(0) = \beta. \quad (12.110)$$

Будем искать внутреннее разложение в виде

$$y^i = Y_0(\xi) + \varepsilon Y_1(\xi) + \dots \quad (12.111)$$

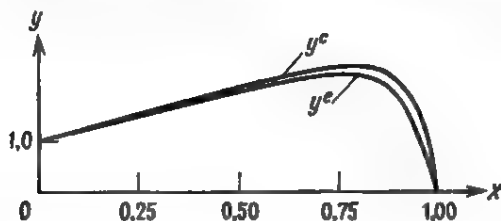


Рис. 12.9. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e , полученным в результате численного интегрирования уравнения (12.103) с граничными условиями (12.102) при $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 1.0$ и $\beta = 0$.

Подставляя разложение (12.111) в уравнение (12.109) и условие (12.110) и приравнявая коэффициенты при ε^0 в обеих частях полученных равенств, находим

$$Y_0'' + 3Y_0' = 0, \quad Y_0(0) = \beta. \quad (12.112)$$

Отсюда $Y_0 = a_0 + b_0 e^{-3\xi}, \quad \beta = a_0 + b_0,$

и, следовательно,

$$y^i = \beta - b_0 + b_0 e^{-3\xi} + \dots, \quad (12.113)$$

где постоянная b_0 должна определяться в процессе сращивания внутреннего и внешнего разложений.

Воспользовавшись условием сращивания Ван-Дайка, будем действовать следующим образом.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \alpha(2x + 1)$.

Перепишем через внутреннюю переменную: $= \alpha(3 - 2\varepsilon\xi)$.

Разложим при малых ε : $= 3\alpha - 2\varepsilon\alpha\xi$. (12.144)

Найдем одночленное внутреннее разложение: $= 3\alpha$.

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim \beta - b_0 + b_0 e^{-3\xi}$.

Перепишем через внешнюю переменную: $= \beta - b_0 + b_0 e^{-3(1-x)/\varepsilon}$.

Разложим при малых ε : $= \beta - b_0 + (\text{Э. М. Ч.})$.

Найдем одночленное внешнее разложение: $= \beta - b_0$. (12.115)

Приравнявая разложения (12.114) и (12.115), имеем

$$3\alpha = \beta - b_0, \text{ или } b_0 = \beta - 3\alpha.$$

Таким образом,

$$y^i = 3\alpha + (\beta - 3\alpha) e^{-3\xi} + \dots \quad (12.116)$$

и $y^c = \alpha(2x + 1) + 3\alpha + (\beta - 3\alpha) e^{-3\xi} - 3\alpha + \dots,$

или $y^c = \alpha(2x + 1) + (\beta - 3\alpha) e^{-3(1-x)/\varepsilon} + \dots$. (12.117)

Рис. 12.9 показывает, что составное разложение y^c оказывается очень близким к решению, полученному с помощью численного интегрирования задачи (12.103), (12.102). Поскольку мы сумели обеспечить сращивание внутреннего и внешнего разложений, так

что вся процедура оказалась самосогласованной, следовательно, наше предположение о существовании пограничного слоя на правом конце промежутка является вполне оправданным.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение (12.101), у которого функция $p_1(x)$ сохраняет знак на всем промежутке $[0, 1]$, но может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть теперь для определенности $p_1(x) > 0$ на $[0, 1]$. В этом случае мы предполагаем, что пограничный слой существует на левом конце промежутка, поскольку только такое предположение обеспечивает возможность сращивания соответствующих разложений и получение математически непротиворечивых результатов. Тогда внешнее разложение должно удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$, а внутреннее — граничному условию $y(0) = \alpha$. Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^o = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.118)$$

Подставляя разложение (12.118) в уравнение (12.101) и условие $y(1) = \beta$ и приравнивая коэффициенты при ε^o в обеих частях полученных равенств, получаем

$$p_1 y_0' + p_0 y_0 = 0, \quad y_0(1) = \beta. \quad (12.119)$$

Уравнение (12.119) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и, следовательно, его решение может быть найдено стандартными приемами. Действительно, разделяя переменные, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{dy_0}{y_0} = -\frac{p_0}{p_1} dx,$$

откуда после интегрирования находим

$$\ln y_0 = -\int_1^x \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)} d\tau + \ln c_0,$$

или

$$y_0 = c_0 \exp \left[-\int_1^x \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)} d\tau \right].$$

При этом нижний предел интегрирования выбирается равным 1, с тем чтобы нам было удобнее удовлетворить граничному условию на правом конце. Условие $y_0(1) = \beta$ дает $c_0 = \beta$, откуда

$$y_0 = \beta \exp \left[-\int_1^x \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] = \beta \exp \left[\int_x^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right]$$

и, окончательно,

$$y^o = \beta \exp \left[\int_x^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] + \dots \quad (12.120)$$

Для того чтобы найти внутреннее разложение, пригодное вблизи начала координат, введем преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = \varepsilon^v \xi \quad (v > 0). \quad (12.121)$$

Тогда уравнение (12.101) для внутреннего решения y^i перепишется в виде

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-v} p_1(\varepsilon^v \xi) \frac{dy^i}{d\xi} + p_0(\varepsilon^v \xi) y^i = 0. \quad (12.122)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $p_1(\varepsilon^v \xi) \rightarrow p_1(0)$ и $p_0(\varepsilon^v \xi) \rightarrow p_0(0)$, поскольку функция p_0 предполагается регулярной в начале координат. Тогда уравнение (12.122) переходит в уравнение

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{-v} p_1(0) \frac{dy^i}{d\xi} + p_0(0) y^i + \dots = 0, \quad (12.123)$$

предельная форма которого при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется величиной v . Выбирая $v = 1$, что соответствует характерному пределу, находим, что предельной формой (12.123) будет уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + p_1(0) \frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.124)$$

общее решение которого записывается в виде

$$y^i = a_0 + b_0 e^{-p_1(0) \xi}. \quad (12.125)$$

Из соотношения (12.121) следует, что координата $x = 0$ соответствует точке $\xi = 0$, и, следовательно, граничное условие $y(0) = \alpha$ переходит в условие $y^i(0) = \alpha$. Тогда из формулы (12.125) получаем, что

$$\alpha = a_0 + b_0, \quad \text{или} \quad a_0 = \alpha - b_0,$$

и поэтому

$$y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{-p_1(0) \xi}. \quad (12.126)$$

Сравним теперь одночленное внешнее разложение (12.120) с одночленным внутренним разложением (12.126). При этом формально будем действовать следующим образом.

$$\text{Одночленное внешнее разложение: } y \sim \beta \exp \left[\int_x^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right].$$

$$\text{Перепишем через внутреннюю переменную: } = \beta \exp \left[\int_{\varepsilon \xi}^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right].$$

$$\text{Разложим при малых } \varepsilon: = \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] + \dots$$

Найдем одночленное внутреннее разложение:

$$= \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right]. \quad (12.127)$$

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha - b_0 + b_0 e^{-p_1(0) \xi}$.

Перепишем через внешнюю переменную: $= \alpha - b_0 + b_0 e^{-p_1(0) x/\varepsilon}$.

Разложим при малых ε : $= \alpha - b_0 + (\text{Э.М.Ч.})$.

Найдем одночленное внешнее разложение: $= \alpha - b_0$.
(12.128)

Отметим, что множитель $\exp [-p_1(0) x/\varepsilon]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет экспоненциально мал, поскольку $p_1(0) > 0$. Если бы значение $p_1(0)$ оказалось отрицательным, то член $b_0 \exp [-p_1(0) x/\varepsilon]$ экспоненциально возрастал бы при $\varepsilon \rightarrow 0$ и внутреннее разложение невозможно было бы срастить с внешним. Именно поэтому отсутствие экспоненциально растущих членов во внешнем и внутреннем разложениях является весьма существенным для успешного сращивания. Итак, приведенные рассуждения показывают, что пограничный слой действительно находится на правом конце промежутка.

Приравнивая теперь разложения (12.127) и (12.128), имеем

$$\alpha - b_0 = \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right], \quad \text{или} \quad b_0 = \alpha - \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right].$$

Таким образом,

$$y' = \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] + \left\{ \alpha - \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] \right\} e^{-p_1(0) \xi} + \dots \quad (12.129)$$

Наконец, складывая внешнее разложение (12.120) с внутренним разложением (12.129) и вычитая из полученной суммы их общую часть (12.127), получаем следующее составное разложение:

$$y' = \beta \exp \left[\int_x^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] + \left\{ \alpha - \beta \exp \left[\int_0^1 \frac{p_0}{p_1} d\tau \right] \right\} e^{-p_1(0) \xi} + \dots \quad (12.130)$$

Пример 3. В качестве третьего примера исследуем случай, когда коэффициент $p_1(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$. А именно, рассмотрим уравнение

$$\varepsilon y'' + xy' - xy = 0 \quad (12.131)$$

с граничными условиями вида (12.102). Поскольку коэффициент при y' положителен, мы предполагаем, что пограничный слой существует на левом конце промежутка, даже если $p_1(x) = x$ обращается на этом конце в нуль. В противном случае мы не смогли бы срастить найденные разложения и полученные результаты оказались бы математически несовместными.

Если искать внешнее разложение в виде

$$y^o(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots,$$

то из уравнения (12.131) можно получить следующее уравнение для y_0 :

$$xy'_0 - xy_0 = 0,$$

общее решение которого

$$y_0 = c_0 e^x.$$

Поскольку мы предположили, что пограничный слой располагается вблизи начала координат, внешнее разложение должно удовлетворять условию $y(1) = \beta$, или $y^o(1) = \beta$. Таким образом, имеем $y_0(1) = \beta$ и

$$\beta = c_0 e, \quad \text{или} \quad c_0 = \beta e^{-1}.$$

Тогда

$$y_0 = \beta e^{x-1}$$

и, окончательно,

$$y^o = \beta e^{x-1} + \dots \quad (12.132)$$

Для того чтобы исследовать пограничный слой вблизи начала координат, введем растягивающее преобразование

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = \varepsilon^v \xi \quad (v > 0), \quad (12.133)$$

в результате чего уравнение (12.131) перепишется в виде

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \xi \frac{dy^i}{d\xi} - \varepsilon^v \xi y^i = 0. \quad (12.134)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ предельная форма уравнения (12.134) зависит от величины v . Как и ранее, ограничимся исследованием лишь характерного предела, который в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \xi \frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.135)$$

что соответствует значению $v = \frac{1}{2}$. Уравнение (12.135) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\frac{dy^i}{d\xi}$, и, следовательно, его решение может быть найдено стандартными приемами. Так, полагая в (12.135)

$$v = \frac{dy^i}{d\xi},$$

получаем уравнение

$$\frac{dv}{d\xi} + \xi v = 0,$$

общее решение которого

$$v = a_0 e^{-\xi^2/2}.$$

Поэтому

$$\frac{dy^i}{d\xi} = a_0 e^{-\xi^2/2},$$

откуда после интегрирования получаем

$$y^i = a_0 \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau + b_0,$$

где нижний предел в интеграле выбран равным нулю, с тем чтобы нам было проще удовлетворить граничному условию на левом конце. Поскольку в соответствии с видом преобразования (12.133) точка $x = 0$ переходит в точку $\xi = 0$, использование условия $y(0) = \alpha$, или $y^i(0) = \alpha$, дает $\alpha = b_0$, откуда

$$y^i = a_0 \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau + \alpha, \quad (12.136)$$

где постоянная a_0 должна определяться в процессе сращивания внутреннего и внешнего разложений.

Для того чтобы срастить одночленное внешнее разложение (12.132) с одночленным внутренним разложением (12.136), будем действовать следующим образом.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \beta e^{x-1}$.

Перепишем через внутреннюю переменную: $= \beta e^{e^{1/2}\xi} - 1$.

Разложим при малых ε : $= \beta e^{-1} (1 + \varepsilon^{1/2}\xi + \dots)$.

Найдем одночленное внутреннее разложение: $= \beta e^{-1}$.

(12.137)

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim a_0 \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau + \alpha$.

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= a_0 \int_0^{x/\varepsilon^{1/2}} e^{-\tau^2/2} d\tau + \alpha.$$

Разложим при малых ε : $= a_0 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau + \alpha + \dots$.

Найдем одночленное внешнее разложение: $\frac{a_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} + \alpha$,
(12.138)

где интеграл можно вычислить по формуле (3.25), полагая $t = \tau \sqrt{2}$, т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

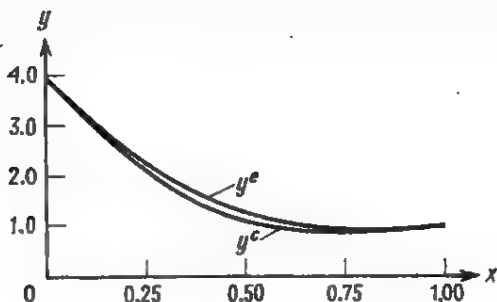


Рис. 12.10. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e , полученным в результате численного интегрирования уравнения (12.131) с граничными условиями (12.102) при $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 4.0$ и $\beta = 1.0$.

Далее, приравнивая разложения (12.137) и (12.138), находим

$$\beta e^{-1} = \frac{a_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} + \alpha, \quad \text{или} \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (\beta e^{-1} - \alpha).$$

Итак, внешнее и внутреннее разложения действительно допускают сращивание, причем весь процесс решения оказывается самосогласованным, оправдывая тем самым наше предположение о том, что пограничный слой в данной задаче существует в окрестности начала координат. Подставляя теперь найденное выражение для a_0 в (12.136), имеем

$$y^i = \alpha + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (\beta e^{-1} - \alpha) \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau + \dots \quad (12.139)$$

Наконец, складывая внешнее разложение (12.132) с внутренним разложением (12.139) и вычитая их общую часть (12.137), находим единое составное разложение, которое будет равномерно пригодным на всем промежутке решения задачи. Оно имеет вид

$$y^c = \beta e^{x-1} + \alpha + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (\beta e^{-1} - \alpha) \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau - \beta e^{-1},$$

$$\text{или} \quad y^c = \beta e^{x-1} - (\beta e^{-1} - \alpha) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau \right) + \dots \quad (12.140)$$

Рис. 12.10 показывает, что составное разложение y^c очень мало отличается от точного решения y^e даже при $\varepsilon = 0.2$. В случае же $\varepsilon = 0.1$ разложение y^c практически совпадает с точным решением.

Пример 4. В качестве последнего примера исследуем случай, когда коэффициент $p_1(x)$ имеет простой нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[0, 1]$, что приводит к появлению так назы-

ваемого «внутреннего» пограничного слоя. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon y'' + \left(x - \frac{1}{2}\right) y' - \left(x - \frac{1}{2}\right) y = 0 \quad (12.141)$$

с граничными условиями (12.102). В данном случае функция $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$ меняет знак при переходе через точку $x = \frac{1}{2}$, и потому наши рассуждения относительно расположения пограничного слоя требуют более подробного рассмотрения. При этом оказывается, что на обоих концах промежутка пограничный слой отсутствует, и вместо этого, как будет показано ниже, возникает пограничный слой в окрестности точки $x = \frac{1}{2}$.

Если искать внешнее разложение в виде

$$y^o = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots,$$

то из уравнения (12.141) получаем, что

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) y_0' - \left(x - \frac{1}{2}\right) y_0 = 0.$$

Общим решением этого уравнения служит функция

$$y_0 = c_0 e^x,$$

относительно которой естественно предположить, что она будет пригодна всюду, за исключением малой окрестности, примыкающей к точке $x = \frac{1}{2}$. В интервале $x > \frac{1}{2}$ разложение y^o должно удовлетворять граничному условию $y^o(1) = \beta$. Поэтому $c_0 e = \beta$ и

$$y_n^o = \beta e^{x-1} + \dots, \quad (12.142)$$

где индекс «п» означает правую часть промежутка. В интервале $x < \frac{1}{2}$ функция y^o должна удовлетворять граничному условию $y^o(0) = \alpha$. Поэтому $c_0 = \alpha$ и

$$y_n^o = \alpha e^x + \dots, \quad (12.143)$$

где индекс «л» указывает на левую половину промежутка.

Исследуем теперь окрестность точки $x = \frac{1}{2}$, вводя следующее преобразование растяжения:

$$\xi = \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2} + \varepsilon^v \xi \quad (v > 0). \quad (12.144)$$

Уравнение (12.141) при этом переписывается как

$$\varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \xi \frac{dy^i}{d\xi} - \varepsilon^v \xi y^i = 0. \quad (12.145)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ предельная форма уравнения (12.145) зависит от выбора величины ν . Как и ранее, выберем характерный предел в виде

$$\frac{d^2 y^I}{d\xi^2} + \xi \frac{dy^I}{d\xi} = 0, \quad (12.146)$$

что соответствует значению $\nu = \frac{1}{2}$. Общее решение уравнения (12.146) строится в виде (ср. с формулой (12.136))

$$y^I = b_0 + a_0 \int_{\xi}^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau, \quad (12.147)$$

где нижний предел в интеграле выбран равным нулю в соответствии с предположением о существовании пограничного слоя вблизи точки $x = \frac{1}{2}$. Постоянные a_0 и b_0 определяются в процессе срачивания внутреннего и внешнего разложений.

Для того чтобы срастить одночленное внешнее разложение (12.142) с одночленным внутренним разложением (12.147), будем действовать следующим образом.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \beta e^{x-1}$.

Перепишем через внутреннюю переменную: $= \beta e^{1/2\xi - (1/2)}$.

Разложим при малых ε : $= \beta e^{-1/2}(1 + \varepsilon^{1/2}\xi + \dots)$.

Найдем одночленное внутреннее разложение: $= \beta e^{-1/2}$. (12.148)

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim b_0 + a_0 \int_0^{\xi} e^{-\tau^2/2} d\tau$.

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= b_0 + a_0 \int_0^{\{x - (1/2)\}/\varepsilon^{1/2}} e^{-\tau^2/2} d\tau.$$

Разложим при малых ε : $= b_0 + a_0 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau + \dots$.

Найдем одночленное внешнее разложение: $b_0 + \frac{a_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$. (12.149)

Приравнивая разложения (12.148) и (12.149), получаем соотношение

$$b_0 + \frac{a_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \beta e^{-1/2}, \quad (12.150)$$

¹ Вычисление соответствующего интеграла было проведено в предыдущем примере,

связывающее постоянные a_0 и b_0 . Чтобы найти второе соотношение между этими постоянными, сравним внутреннее разложение (12.147) с внешним разложением (12.143). Следуя обычной процедуре асимптотического сращения, находим

$$(y_n^0)' = \alpha e^{1/2}$$

$$\text{и} \quad (y^i)^0 = b_0 + a_0 \int_0^{-\infty} e^{-\tau^{1/2}} d\tau = b_0 - a_0 \int_0^{\infty} e^{-\tau^{1/2}} d\tau,$$

$$\text{откуда} \quad b_0 = \frac{a_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \alpha e^{1/2}. \quad (12.151)$$

Решая уравнения (12.150) и (12.151) относительно a_0 и b_0 , получаем

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta e^{-1/2} - \alpha e^{1/2}), \quad b_0 = \frac{1}{2} (\beta e^{-1/2} + \alpha e^{1/2}),$$

и, следовательно,

$$y^i = \frac{1}{2} (\beta e^{-1/2} + \alpha e^{1/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta e^{-1/2} - \alpha e^{1/2}) \int_0^1 e^{-\tau^{1/2}} d\tau + \dots \quad (12.152)$$

В данном случае мы не можем перейти к единому составному разложению, которое оказалось бы равномерно пригодным на всем промежутке решения задачи. Вместо этого образуем два составных разложения, одно из которых будет действовать на промежутке $[0, \frac{1}{2}]$, а другое — на промежутке $[\frac{1}{2}, 1]$. С этой целью положим

$$y_n^c = y_n^0 + y^i - (y_n^0)' = \alpha e^x + \frac{1}{2} (\beta e^{-1/2} + \alpha e^{1/2}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\beta e^{-1/2} - \alpha e^{1/2}) \int_0^1 e^{-\tau^{1/2}} d\tau - \alpha e^{1/2} + \dots,$$

или

$$y_n^c = \alpha e^x + (\beta e^{-1/2} - \alpha e^{1/2}) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\tau^{1/2}} d\tau \right) + \dots \quad (12.153)$$

Аналогичным образом имеем

$$y_n^c = \beta e^{x-1} + (\alpha e^{1/2} - \beta e^{-1/2}) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\tau^{1/2}} d\tau \right) + \dots \quad (12.154)$$

Рис. 12.11 показывает, что разложение y^c очень мало отличается от точного решения уже при $\varepsilon = 0,1$.

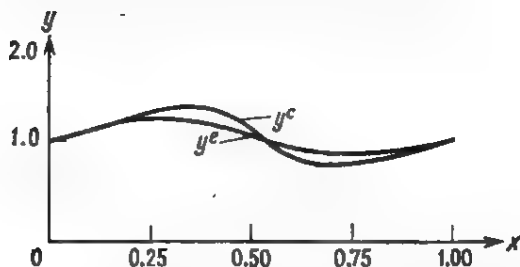


Рис. 12.11. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e , полученным в результате численного интегрирования уравнения (12.141) с граничными условиями (12.102) при $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 1.0$ и $\beta = 1.0$.

Отметим, что в данном примере коэффициент $p_1(x)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию, и потому в задаче имеется только один внутренний пограничный слой. Если же $p_1(x)$ будет монотонно убывающей функцией, структура решения становится более сложной: кроме внутренней точки пограничные слои могут появиться и в граничных точках промежутка. Такого рода задачи в последнее время привлекают все больший интерес исследователей.

12.6. Задачи с двумя пограничными слоями

В предыдущих параграфах рассматривались задачи, имеющие лишь один пограничный слой. В этом параграфе исследуем задачу с двумя пограничными слоями, а именно краевую задачу следующего вида:

$$\varepsilon^2 y^{IV} - (1+x)^2 y'' = 0, \quad (12.155)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma, \quad y'(1) = \delta. \quad (12.156)$$

В данном случае порядок старшей производной на две единицы превышает порядок производной во втором члене; это позволяет предположить, что в данной задаче имеются два пограничных слоя — по одному на каждом конце промежутка. Как обычно, сделанное предположение будет подтверждено в дальнейшем после проверки полученных результатов на самосогласованность.

Внешнее разложение

Будем искать двучленное внешнее разложение в виде

$$y^o = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.157)$$

Подставляя разложение (12.157) в уравнение (12.155) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$-(1+x)^2 y_0'' = 1, \quad (12.158)$$

$$-(1+x)^2 y_1'' = 0. \quad (12.159)$$

Уравнение (12.158) можно переписать в виде

$$\ddot{y}_0 = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

откуда $y_0 = \ln(1+x) + A_0x + B_0$, (12.160)

где A_0 и B_0 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (12.159)

$$y_1 = A_1x + B_1, \quad (12.161)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Следовательно,

$$y^0 = \ln(1+x) + A_0x + B_0 + \varepsilon(A_1x + B_1) + \dots \quad (12.162)$$

Отметим, что построенное внешнее разложение (12.162), вообще говоря, не удовлетворяет ни одному из граничных условий. Поэтому его необходимо срastить с двумя погранслойнными (внутренними) разложениями, каждое из которых действует на своем конце промежутка.

Внутреннее разложение вблизи точки $x = 0$

Для построения этого разложения, которое будем обозначать через y^i , введем в уравнении (12.155) преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = \varepsilon^v \xi \quad (v > 0), \quad (12.163)$$

перепишав это уравнение в виде

$$\varepsilon^{2-4v} \frac{d^4 y^i}{d\xi^4} - \varepsilon^{-2v} (1 + \varepsilon^v \xi)^2 \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} = 1.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ характерный предел соответствует значению $v = 1$. Поэтому y^i должно удовлетворять предельному уравнению вида

$$\frac{d^4 y^i}{d\xi^4} - (1 + 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^2) \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} = \varepsilon^2. \quad (12.164)$$

Будем искать двучленное внутреннее разложение в форме

$$y^i = Y_0(\xi) + \varepsilon Y_1(\xi) + \dots \quad (12.165)$$

Подставляя разложение (12.165) в уравнение (12.164) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$Y_0^{IV} - Y_0'' = 0, \quad (12.166)$$

$$Y_1^{IV} - Y_1'' = 2\xi Y_0''. \quad (12.167)$$

Разложение y^i должно удовлетворять также граничным условиям в точке $x = 0$, которая соответствует значению $\xi = 0$. Таким образом, условие $y(0) = \alpha$ переходит в условие

$$y^i(0) = \alpha. \quad (12.168)$$

Кроме того, поскольку

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dy}{d\xi},$$

граничное условие $y'(0) = \beta$ преобразуется в условие

$$\frac{dy^i}{d\xi}(0) = \varepsilon\beta. \quad (12.169)$$

Подставляя разложение (12.165) в условия (12.168) и (12.169) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим

$$Y_0(0) = \alpha, \quad Y_0'(0) = 0, \quad (12.170)$$

$$Y_1(0) = 0, \quad Y_1'(0) = \beta. \quad (12.171)$$

Отметим, что влияние величины β сказывается только на членах первого порядка малости — именно по этой причине мы ограничились построением двучленного разложения.

Общее решение уравнения (12.166) записывается в виде

$$Y_0 = a_0 + b_0\xi + c_0e^{-\xi} + d_0e^{\xi},$$

где постоянная d_0 должна равняться нулю. В противном случае функция Y_0 будет экспоненциально расти с увеличением ξ , что не позволит срастить это решение с внешним разложением. Удовлетворяя граничным условиям (12.170), находим

$$a_0 + c_0 = \alpha, \quad b_0 - c_0 = 0.$$

Таким образом, $b_0 = c_0$ и $a_0 = \alpha - c_0$, и, следовательно,

$$Y_0 = \alpha + c_0(e^{-\xi} + \xi - 1). \quad (12.172)$$

В данном случае удобнее проводить сращивание на этом шаге, поскольку постоянная c_0 оказывается равной нулю. Итак, для того чтобы срастить одночленное внешнее разложение с одночленным внутренним разложением, положим в (12.97) $m = n = 1$ и будем действовать следующим образом.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \ln(1+x) + A_0x + B_0$.

Перепишем через внутреннюю переменную:

$$= \ln(1 + e\xi) + \varepsilon A_0\xi + B_0.$$

Разложим при малых ε : $= \varepsilon\xi + \varepsilon A_0\xi + B_0 + \dots$

Найдем одночленное внутреннее разложение: $= B_0$. (12.173)

Одночленное внутреннее разложение: $y \sim \alpha + c_0(e^{-\xi} + \xi - 1)$.

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= \alpha + c_0\left(e^{-x/\varepsilon} + \frac{x}{\varepsilon} - 1\right).$$

Разложим при малых ε : $= \alpha - c_0 + c_0\frac{x}{\varepsilon} + (\text{Э. М. Ч.})$.

Найдем одночленное внешнее разложение: $\begin{cases} \alpha & \text{при } c_0 = 0, \\ \frac{c_0x}{\varepsilon} & \text{при } c_0 \neq 0. \end{cases}$ (12.174)

Условие равенства (12.173) и (12.174) дает

$$c_0 = 0, B_0 = \alpha \quad (12.175)$$

и
$$Y_0 = \alpha. \quad (12.176)$$

Подставляя найденное выражение для Y_0 в (12.167), получаем уравнение

$$Y_1^{IV} - Y_1^* = 0,$$

общее решение которого записывается в виде

$$Y_1 = a_1 + b_1 \xi + c_1 e^{-\xi} + d_1 e^{\xi}.$$

Как и ранее, постоянная d_1 должна равняться нулю, поскольку в противном случае функция Y_1 будет экспоненциально расти с увеличением ξ , что не позволит срастить это решение с внешним разложением. Выполняя граничные условия (12.171), имеем

$$a_1 + c_1 = 0, \quad b_1 - c_1 = \beta.$$

Поэтому $a_1 = -c_1$ и $b_1 = c_1 + \beta$, и, следовательно,

$$Y_1 = \beta \xi + c_1 (e^{-\xi} + \xi - 1). \quad (12.177)$$

Окончательно находим

$$y' = \alpha + \varepsilon [\beta \xi + c_1 (e^{-\xi} + \xi - 1)] + \dots \quad (12.178)$$

Срастим теперь двучленное внешнее разложение (12.162) с двучленным внутренним разложением (12.178), действуя следующим образом:

Двучленное внешнее разложение:

$$y \sim \ln(1+x) + A_0 x + B_0 + \varepsilon(A_1 x + B_1).$$

Перепишем через внутреннюю переменную:

$$= \ln(1 + e\xi) + \varepsilon A_0 \xi + \alpha + \varepsilon(\varepsilon A_1 \xi + B_1).$$

Разложим при малых ε :

$$= \varepsilon \xi + \varepsilon A_0 \xi + \alpha + \varepsilon^2 A_1 \xi + \varepsilon B_1 + \dots$$

Найдем двучленное внутреннее разложение:

$$= \alpha + \varepsilon(\xi + A_0 \xi + B_1). \quad (12.179)$$

Двучленное внутреннее разложение:

$$y \sim \alpha + \varepsilon[\beta \xi + c_1 (e^{-\xi} + \xi - 1)].$$

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= \alpha + \varepsilon \left[\frac{\beta x}{\varepsilon} + c_1 \left(e^{-x/\varepsilon} + \frac{x}{\varepsilon} - 1 \right) \right].$$

Разложим при малых ε :

$$= \alpha + \beta x + c_1 x - \varepsilon c_1 + (\text{Э. М. Ч.}).$$

Найдем двучленное внешнее разложение:

$$= \alpha + \beta x + c_1 x - \varepsilon c_1. \quad (12.180)$$

Далее, переписывая разложение (12.179) через переменную x и приравнявая его (12.180), имеем

$$\alpha + x + A_0x + \varepsilon B_1 = \alpha + \beta x + c_1x - \varepsilon c_1,$$

$$\text{откуда} \quad 1 + A_0 = \beta + c_1 \text{ и } B_1 = -c_1. \quad (12.181)$$

Внутреннее разложение вблизи точки $x = 1$

Для построения этого разложения, которое мы будем обозначать через y' , введем в уравнении (12.155) следующее преобразование растяжения:

$$\zeta = \frac{1-x}{\varepsilon^\nu}, \quad \text{или} \quad x = 1 - \varepsilon^\nu \zeta \quad (\nu > 0). \quad (12.182)$$

Тогда уравнение (12.155) переписывается в виде

$$\varepsilon^{2-4\nu} \frac{d^4 y'}{d\zeta^4} - \varepsilon^{-2\nu} (2 - \varepsilon^\nu \zeta)^2 \frac{d^2 y'}{d\zeta^2} = 1.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ характерный предел соответствует значению $\nu = 1$. Поэтому функция y' должна удовлетворять предельному уравнению вида

$$\frac{d^4 y'}{d\zeta^4} - (4 - 4\varepsilon\zeta + \varepsilon^2\zeta^2) \frac{d^2 y'}{d\zeta^2} = \varepsilon^2. \quad (12.183)$$

Будем искать двучленное разложение y' в виде

$$y' = \tilde{Y}_0(\zeta) + \varepsilon \tilde{Y}_1(\zeta) + \dots \quad (12.184)$$

Подставляя разложение (12.184) в уравнение (12.183) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим

$$\tilde{Y}_0^{IV} - 4\tilde{Y}_0'' = 0, \quad (12.185)$$

$$\tilde{Y}_1^{IV} - 4\tilde{Y}_1'' = -4\zeta \tilde{Y}_0''. \quad (12.186)$$

Внутреннее разложение y' должно удовлетворять также граничным условиям в точке $x = 1$, которая в данном случае соответствует точке $\zeta = 0$. При этом условие $y(1) = \gamma$ дает

$$y'(0) = \gamma, \quad (12.187)$$

а поскольку

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dy}{d\zeta},$$

то второе граничное условие $y'(1) = \delta$ переходит в условие

$$\frac{dy'}{d\zeta}(0) = -\varepsilon\delta. \quad (12.188)$$

Подставляя разложение (12.184) в условия (12.187) и (12.188) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\tilde{Y}_0(0) = \gamma, \quad \tilde{Y}_0'(0) = 0, \quad (12.189)$$

$$\tilde{Y}_1(0) = 0, \quad \tilde{Y}_1'(0) = -\delta. \quad (12.190)$$

Общее решение уравнения (12.185)

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{a}_0 + \tilde{b}_0 \zeta + \tilde{c}_0 e^{-2\zeta} + \tilde{d}_0 e^{2\zeta},$$

где постоянная \tilde{a}_0 должна равняться нулю. В противном случае функция \tilde{Y}_0 будет экспоненциально расти с увеличением ζ , что не позволит срастить это решение с внешним разложением. Далее, используя граничные условия (12.189), находим, что

$$\tilde{a}_0 + \tilde{c}_0 = \gamma, \quad \tilde{b}_0 - 2\tilde{c}_0 = 0.$$

Поэтому $\tilde{b}_0 = 2\tilde{c}_0$ и $\tilde{a}_0 = \gamma - \tilde{c}_0$, и, следовательно,

$$\tilde{Y}_0 = \gamma + \tilde{c}_0 (e^{-2\zeta} + 2\zeta - 1). \quad (12.191)$$

Как и ранее, срастим одночленное внешнее разложение с одночленным внутренним разложением, действуя по следующей схеме.

Одночленное внешнее разложение: $y \sim \ln(1+x) + A_0 x + \alpha$.

Перепишем через внутреннюю переменную:

$$= \ln(1 - 2e\zeta) + A_0(1 - e\zeta) + \alpha.$$

Разложим при малых e :

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} e\zeta + A_0 - eA_0\zeta + \alpha + \dots$$

Найдем одночленное внутреннее разложение:

$$= A_0 + \alpha + \ln 2. \quad (12.192)$$

Одночленное внутреннее разложение:

$$y \sim \gamma + \tilde{c}_0 (e^{-2\zeta} + 2\zeta - 1).$$

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= \gamma + \tilde{c}_0 \left(e^{-2(1-x)/e} + \frac{2(1-x)}{e} - 1 \right).$$

Разложим при малых e :

$$= \gamma + \frac{2\tilde{c}_0(1-x)}{e} - \tilde{c}_0 + (\text{Э. М. Ч.}).$$

Найдем одночленное внешнее разложение:

$$\begin{cases} \gamma & \text{при } \tilde{c}_0 = 0, \\ \frac{2\tilde{c}_0(1-x)}{e}, & \text{при } \tilde{c}_0 \neq 0. \end{cases} \quad (12.193)$$

Условие равенства разложений (12.192) и (12.193) дает $\tilde{c}_0 = 0$ и

$$A_0 + \alpha + \ln 2 = \gamma, \quad \text{или} \quad A_0 = \gamma - \alpha - \ln 2, \quad (12.194)$$

и, следовательно,

$$\tilde{Y}_0 = \gamma. \quad (12.195)$$

Подставляя найденное выражение для \tilde{Y}_0 в (12.186), получаем уравнение

$$\tilde{Y}_1^{IV} - 4\tilde{Y}_1'' = 0,$$

общее решение которого записывается в виде

$$\tilde{Y}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 \xi + \tilde{c}_1 e^{-\xi} + \tilde{d}_1 e^{2\xi}.$$

Как и ранее, для того чтобы можно было срастить разложение y' с внешним разложением, постоянная \tilde{d}_1 должна равняться нулю. Далее, используя граничные условия (12.190), находим, что

$$\tilde{a}_1 + \tilde{c}_1 = 0, \quad b_1 - 2\tilde{c}_1 = -\delta.$$

Поэтому $\tilde{a}_1 = -\tilde{c}_1$ и $b_1 = 2\tilde{c}_1 - \delta$, и, следовательно,

$$\tilde{Y}_1 = -\delta \xi + \tilde{c}_1 (e^{-2\xi} + 2\xi - 1). \quad (12.196)$$

Срастим теперь двучленное внешнее разложение с двучленным внутренним разложением y' , действуя следующим образом.

Двучленное внешнее разложение:

$$y \sim \ln(1+x) + A_0 x + \alpha + \varepsilon(A_1 x + B_1).$$

Перепишем через внутреннюю переменную:

$$= \ln(2 - \varepsilon \xi) + A_0(1 - \varepsilon \xi) + \alpha + \varepsilon(A_1 - \varepsilon A_1 \xi + B_1).$$

Разложим при малых ε :

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \varepsilon \xi + A_0 - \varepsilon A_0 \xi + \alpha + \varepsilon A_1 - \varepsilon^2 A_1 \xi + \varepsilon B_1 + \dots$$

Найдем двучленное внутреннее разложение:

$$= A_0 + \alpha + \ln 2 + \varepsilon \left(A_1 + B_1 - \frac{1}{2} \xi - A_0 \xi \right). \quad (12.197)$$

Двучленное внутреннее разложение:

$$y \sim \gamma + \varepsilon [-\delta \xi + \tilde{c}_1 (e^{-2\xi} + 2\xi - 1)]$$

Перепишем через внешнюю переменную:

$$= \gamma + \varepsilon \left\{ -\frac{\delta(1-x)}{\varepsilon} + \tilde{c}_1 \left[e^{-2(1-x)/\varepsilon} + \frac{2(1-x)}{\varepsilon} - 1 \right] \right\}.$$

Разложим при малых ε :

$$= \gamma - \delta(1-x) + 2\tilde{c}_1(1-x) - \varepsilon \tilde{c}_1 + (\text{Э. М. Ч.}).$$

Найдем двучленное внешнее разложение:

$$= \gamma + (2\tilde{c}_1 - \delta)(1-x) - \varepsilon \tilde{c}_1. \quad (12.198)$$

Переписывая разложение (12.197) через переменную x и приравнивая его разложению (12.198), имеем

$$\begin{aligned} A_0 + \alpha + \ln 2 - \left(\frac{1}{2} + A_0 \right) (1-x) + \varepsilon(A_1 + B_1) = \\ = \gamma + (2\tilde{c}_1 - \delta)(1-x) - \varepsilon \tilde{c}_1, \end{aligned}$$

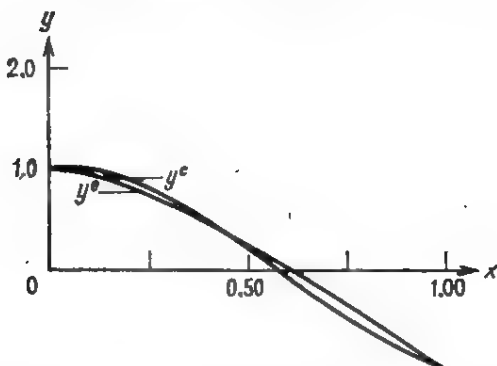


Рис. 12.12. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e , полученным с помощью численного интегрирования уравнения (12.155) с граничными условиями (12.156) при $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = \beta = 1.0$ и $\gamma = \delta = -1.0$.

откуда следует соотношение (12.194), а также соотношения

$$-\frac{1}{2} - A_0 = 2\tilde{c}_1 - \delta, \quad A_1 + B_1 = -\tilde{c}_1. \quad (12.199)$$

Подставляя теперь значение A_0 из (12.194) в (12.181), находим

$$B_1 = -c_1 = -\gamma + \alpha + \beta - 1 + \ln 2, \quad (12.200)$$

а подставляя значения A_0 и B_1 из (12.194) и (12.200) в соотношения (12.199), окончательно имеем

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{2} \left(\alpha + \delta - \gamma - \frac{1}{2} + \ln 2 \right), \quad (12.201)$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} \left(3\alpha + 2\beta - 3\gamma + \delta - \frac{5}{2} + 3 \ln 2 \right). \quad (12.202)$$

Таким образом, все произвольные постоянные во внешнем и внутренних разложениях оказались выраженными через граничные значения.

Соответствующее составное разложение может быть построено следующим образом:

$$y^c = y^o + y^i + y^l - (y^i)^o - (y^l)^o,$$

где $(y^i)^o$ и $(y^l)^o$ даются формулами (12.180) и (12.198). В результате имеем

$$\begin{aligned} y^c = & \ln(1+x) + A_0 x + \alpha + \varepsilon(A_1 x + B_1) + \alpha + \\ & + \varepsilon[\beta \xi - B_1(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \xi - 1)] + \gamma + \varepsilon[-\delta \xi + \tilde{c}_1(\varepsilon^{-2\xi} + 2\xi - 1)] - \\ & - \alpha - \beta x + B_1 x - \varepsilon B_1 - \gamma - (2\tilde{c}_1 - \delta)(1-x) + \varepsilon \tilde{c}_1, \end{aligned}$$

или

$$y^e = \alpha + \ln(1+x) + (\gamma - \alpha - \ln 2)x + \\ + e \left[-\frac{1}{2} \left(3\alpha + 2\beta - 3\gamma + \delta - \frac{5}{2} + 3\ln 2 \right) x - \right. \\ \left. - (\gamma - \alpha - \beta + 1 - \ln 2)(1 - e^{-x/e}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\alpha + \delta - \gamma - \frac{1}{2} + \ln 2 \right) e^{-2(1-x)/e} \right] + \dots \quad (12.203)$$

Рис. 12.12 показывает, что составное разложение y^e хорошо соответствует точному решению задачи.

12.7. Случай нескольких зон

Во всех рассмотренных ранее примерах в области пограничного слоя существовал только один характерный предел. В этом параграфе обсудим случай, когда в данном пограничном слое имеется несколько характерных пределов. При этом, если в задаче существуют, например, два характерных предела, результирующее разложение, кроме внешнего, будет включать в себя два внутренних разложения. Области пригодности каждого из этих разложений обычно называют *зонами*¹⁾, а сама задача именуется в этом случае *трехзонной задачей*. Таким образом, если в данном пограничном слое существует не один, а несколько характерных пределов, то говорят соответственно о многозонной задаче. Ниже мы исследуем случай двух характерных пределов в пограничном слое, т. е. трехзонную задачу.

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^3 y'' + x^3 y' + (x^3 - \varepsilon) y = 0, \quad (12.204)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \quad (12.205)$$

Поскольку коэффициент при y' положителен, пограничный слой должен существовать вблизи начала координат. Поэтому внешнее разложение должно удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$, однако, вообще говоря, не предполагается, чтобы оно удовлетворяло условию на левом конце $y(0) = \alpha$.

Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^0 = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

Подставляя разложение y^0 в уравнение (12.204) и граничное условие $y(1) = \beta$ и приравнивая коэффициенты при ε^0 в обеих частях полученных равенств, получаем

$$x^3 y_0' + x^3 y_0 = 0, \quad y_0(1) = \beta. \quad (12.206)$$

Общее решение уравнения (12.206)

$$y_0 = c_0 e^{-x}.$$

¹⁾ У автора не используется слово *deck* (палуба). — Прим. ред.

При этом из условия $y_0(1) = \beta$ следует, что $c_0 = \beta e$. Поэтому

$$y_0 = \beta e^{1-x}$$

$$\text{и} \quad y^0 = \beta e^{1-x} + \dots \quad (12.207)$$

Ясно, что полученное разложение не удовлетворяет граничному условию при $x = 0$.

Как и ранее, для того чтобы исследовать окрестность точки $x = 0$, введем преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = \varepsilon^v \xi \quad (v > 0). \quad (12.208)$$

В результате уравнение (12.204) перепишется в виде

$$\varepsilon^{3-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{2v} \xi^3 \frac{dy}{d\xi} + (\varepsilon^{3v} \xi^3 - \varepsilon) y = 0. \quad (12.209)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ член $O(\varepsilon^{3v})$ оказывается малым по сравнению с ε^{2v} , поскольку $v > 0$. Поэтому главной частью уравнения (12.209) будет

$$\varepsilon^{3-2v} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{2v} \xi^3 \frac{dy}{d\xi} - \varepsilon y + \dots = 0. \quad (12.210)$$

Соответствующие характерные пределы получаются в результате «уравновешивания» (компенсации) двух любых членов в (12.210). Так, чтобы скомпенсировать первый и второй члены этого разложения, следует положить $3 - 2v = 2v$, или $v = \frac{3}{4}$. При этом (12.209) переходит в уравнение

$$\varepsilon^{3/2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{3/2} \xi^3 \frac{dy}{d\xi} + (\varepsilon^{9/4} \xi^3 - \varepsilon) y = 0,$$

главная часть которого соответствует тривиальному решению $y = 0$. Поэтому данный случай должен быть исключен из нашего рассмотрения. Если теперь скомпенсировать в (12.210) первый и третий члены, мы должны выбрать $3 - 2v = 1$, или $v = 1$. Тогда уравнение (12.209) переходит в уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^3 \xi^3 \frac{dy}{d\xi} + (\varepsilon^3 \xi^3 - \varepsilon) y = 0 \quad (12.211a)$$

с нетривиальной главной частью, и поэтому данный случай необходимо учесть при дальнейшем рассмотрении. Если же, наконец, скомпенсировать в разложении (12.210) второй и третий члены, то необходимо положить $2v = 1$, или $v = \frac{1}{2}$. В отличие от предыдущего случая, где преобразование пограничного слоя имело вид $\xi = x/\varepsilon$, здесь мы используем новую мелкомасштабную переменную ζ , так что $\zeta = x/\varepsilon^{1/2}$. При этом уравнение (12.209) переходит в уравнение

$$\varepsilon^3 \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \varepsilon \zeta^3 \frac{dy}{d\zeta} + (\varepsilon^{3/2} \zeta^3 - \varepsilon) y = 0 \quad (12.211b)$$

с нетривиальной главной частью, и, следовательно, этот случай также следует учитывать при анализе. Изменение масштаба $\xi = x/\varepsilon$, соответствующее $v = 1$, описывает некоторую область (подслой) вблизи начала координат, которую будем называть *левой зоной*. Изменение масштаба $\xi = x/\varepsilon^{1/2}$, соответствующее $v = \frac{1}{2}$, определяет другую область, лежащую между левой зоной и областью внешнего разложения (*правой зоной*). Поэтому будем называть ее *средней зоной*. Отметим, что в задачах вязко-невязких взаимодействий эти зоны обычно называются нижним, средним и верхним подслоем соответственно.

Из формулы (12.211a) следует, что главный член Y_0 разложения левой зоны y^l удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 Y_0}{d\xi^2} - Y_0 = 0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$Y_0 = a_0 e^{-\xi} + b_0 e^{\xi},$$

где постоянная b_0 должна равняться нулю, так как в противном случае функция Y_0 будет с увеличением ξ экспоненциально расти, что не позволит срастить ее с разложениями средней или правой зоны. Поскольку разложение левой зоны пригодно в окрестности начала координат, оно должно удовлетворять граничному условию $y(0) = \alpha$. Но точка $x = 0$ соответствует точке $\xi = 0$, и, следовательно, $y^l(0) = \alpha$. Тогда из этого условия имеем $a_0 = \alpha$ и

$$Y_0 = \alpha e^{-\xi},$$

откуда
$$y^l = \alpha e^{-\xi} + \dots \quad (12.212)$$

Точно так же из формулы (12.211b) следует, что главный член \tilde{Y}_0 разложения средней зоны y^m удовлетворяет уравнению

$$\xi^3 \tilde{Y}_0' - \tilde{Y}_0 = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{d\tilde{Y}_0}{\tilde{Y}_0} = \frac{d\xi}{\xi^3}.$$

Интегрирование этого соотношения дает

$$\ln \tilde{Y}_0 = -\frac{1}{2\xi^2} + \ln d_0,$$

откуда

$$\tilde{Y}_0 = d_0 e^{-1/2\xi^2}$$

и

$$y^m = d_0 e^{-1/2\xi^2} + \dots \quad (12.213)$$

Так как начало координат соответствует точке $\xi = 0$, то из разложения (12.213) следует, что $y^m \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, и поэтому данное разложение не может удовлетворить граничному условию $y(0) = \alpha$. Таким образом, постоянную d_0 следует определять из условия срачивания y^m либо с разложением y^l , либо с разложением y^p .

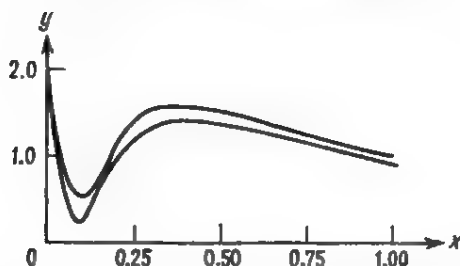


Рис. 12.13. Сравнение составного разложения y^c с точным решением y^e , полученным с помощью численного интегрирования уравнения (12.204) с граничными условиями (12.205) при $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 2.0$ и $\beta = 1.0$.

Отметим, что разложение y^l нельзя срассить прямо с разложением y^o , поскольку

$$(y^l)^o = 0 \quad \text{и} \quad (y^o)^l = \beta\varepsilon.$$

Поэтому для ликвидации разрыва между y^l и y^o нужно воспользоваться разложением y^m . Для того чтобы срассить разложения y^m и y^o , заметим, что

$$(y^m)^o = d_0 \quad \text{и} \quad (y^o)^m = \beta\varepsilon.$$

Отсюда $d_0 = \beta\varepsilon$, и, следовательно,

$$y^m = \beta\varepsilon^{1-1/2\xi^2} + \dots \quad (12.214)$$

Аналогично, для того чтобы срассить разложения y^m и y^l , заметим, что

$$(y^m)^l = 0 \quad \text{и} \quad (y^l)^m = 0,$$

и, следовательно, их срассивание вполне возможно.

Наконец, образуем составное разложение по следующей схеме:

$$y^c = y^o + y^m + y^l - (y^o)^m - (y^l)^m.$$

Таким образом,

$$y^c = \beta e^{1-x} + \beta e^{1-(1/2\xi^2)} + \alpha e^{-\xi} - \beta\varepsilon + \dots \quad (12.215)$$

При этом из разложения (12.215) имеем

$$(y^c)^o = \beta e^{1-x} = y^o,$$

$$(y^c)^m = \beta e^{1-(1/2\xi^2)} = y^m,$$

$$(y^c)^l = \alpha e^{-\xi} = y^l,$$

и, следовательно, мы можем утверждать, что разложение y^c будет равномерно пригодным на всем промежутке $[0, 1]$. Рис. 12.13 показывает, что разложение y^c действительно оказывается достаточно близким к точному решению.

12.8. Нелинейные задачи

В заключение этой главы рассмотрим две нелинейные задачи.

Задача 1. Прежде всего исследуем случай, когда в процессе построения асимптотического решения приходится вводить не растягивающее, а *сжимающее преобразование* масштаба. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \varepsilon y y' = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (12.216)$$

$$y(1) = 0, \quad y(\infty) = 1. \quad (12.217)$$

Здесь разложение нулевого порядка оказывается равномерным, а неравномерность будет проявляться только в членах первого порядка. Отметим также, что в данном случае малый параметр стоит не при старшей производной, и, следовательно, причиной неравномерности, как и в задачах о нелинейных колебаниях, является неограниченность области изменения аргумента x .

Будем искать двучленное прямое разложение в виде

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (12.218)$$

Подставляя разложение (12.218) в уравнение (12.216) и граничные условия (12.217) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

для порядка ε^0 :

$$y_0'' + \frac{2}{x} y_0' = 0, \quad (12.219)$$

$$y_0(1) = 0, \quad y_0(\infty) = 1; \quad (12.220)$$

для порядка ε^1 :

$$y_1'' + \frac{2}{x} y_1' = -y_0 y_0', \quad (12.221)$$

$$y_1(1) = 0, \quad y_1(\infty) = 0. \quad (12.222)$$

Умножая уравнение (12.219) на x^2 , перепишем его в виде

$$x^2 \tilde{y}_0' + 2x y_0' = \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy_0}{dx} \right) = 0,$$

откуда, после интегрирования, находим

$$y_0 = -\frac{a_0}{x} + b_0. \quad (12.223)$$

Используя граничные условия (12.220), получаем

$$-a_0 + b_0 = 0 \quad \text{и} \quad b_0 = 1.$$

Отсюда $a_0 = b_0 = 1$, и, следовательно,

$$y_0 = 1 - \frac{1}{x}. \quad (12.224)$$

Таким образом, первый член разложения (12.218) оказывается равномерным по x , поскольку он удовлетворяет вырожденному уравнению (12.219) и исходным граничным условиям.

Подставляя найденное выражение для y_0 в (12.221), получаем уравнение

$$y_1'' + \frac{2}{x} y_1' = - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3},$$

которое после умножения на x^3 приобретает вид

$$x^3 y_1'' + 2x y_1' = -1 + \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy_1}{dx} \right) = -1 + \frac{1}{x}.$$

Интегрируя его, имеем

$$x^2 \frac{dy_1}{dx} = -x + \ln x + a_1, \quad \text{или} \quad \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{a_1}{x^2}.$$

Повторное интегрирование дает

$$y_1 = -\ln x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{a_1}{x} + b_1. \quad (12.225)$$

Используя граничное условие $y_1(1) = 0$, получаем, что $b_1 = -a_1 + 1$, откуда

$$y_1 = -\ln x - \frac{\ln x}{x} + b_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right). \quad (12.226)$$

При $x \rightarrow \infty$ функция y_1 является неограниченной, и поэтому мы не можем удовлетворить второе из граничных условий (12.222), а именно условие $y_1(\infty) = 0$. Таким образом, прямое разложение, которое будем называть внешним и обозначать через y^o , т. е.

$$y^o = 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon \left[- \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x + b_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] + \dots \quad (12.227)$$

оказывается непригодным при больших x .

Для того чтобы исследовать поведение решения в случае больших x , введем следующее преобразование сжатия:

$$\xi = x e^v \quad (v > 0). \quad (12.228)$$

При этом

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = e^v \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = e^{2v} \frac{d^2}{d\xi^2},$$

и уравнение (12.216) переписывается в виде

$$\varepsilon^{2v} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \frac{2e^{2v}}{\xi} \frac{dy^i}{d\xi} + e^{1+v} y^i \frac{dy^i}{d\xi} = 0.$$

Характерным пределом для него является уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{dy^i}{d\xi} + y^i \frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.229)$$

соответствующее значению $v = 1$. Получающееся в результате разложение будем называть внутренним и обозначать через y^i .

Далее, вместо того чтобы задавать вид разложения y^i , последовательно находить и решать уравнения для членов различного порядка и, наконец, сращивать y^i с внешним разложением, мы поступим иначе, а именно: используем внешнее разложение в качестве критерия для определения формы внутреннего разложения y^i . Такой подход оказывается очень удобным в случае уравнений в частных производных и интегродифференциальных уравнений, особенно нелинейных. Кроме того, в этом случае первый член разложения, даваемый формулой (12.224), оказывается пригодным на всем промежутке решения задачи и, следовательно, его можно использовать и во внутренней области. Тогда, переписывая этот член через внутреннюю переменную, имеем

$$y_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{\xi}. \quad (12.230)$$

Устремляя теперь ε к нулю при фиксированном ξ , получаем $y_0 = 1$; эта функция и будет первым членом внутреннего разложения. Кроме того, вид функции y_0 , даваемой формулой (12.230), позволяет предположить, что y^i разлагается в ряд по целым положительным степеням ε . Таким образом, мы будем искать внутреннее разложение в форме

$$y^i = 1 + \varepsilon Y_1(\xi) + \dots \quad (12.231)$$

Подставляя разложение (12.231) в уравнение (12.229) и приравнявая нулю коэффициент при ε^1 , получаем

$$Y_1'' + \left(\frac{2}{\xi} + 1\right) Y_1' = 0. \quad (12.232)$$

С помощью интегрирующего множителя

$$\exp \left[\int \left(\frac{2}{\xi} + 1 \right) d\xi \right] = \exp (2 \ln \xi + \xi) = \xi^2 e^\xi$$

перепишем уравнение (12.232) в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 e^\xi \frac{dY_1}{d\xi} \right) = 0.$$

Интегрируя, имеем

$$\xi^2 e^\xi \frac{dY_1}{d\xi} = c_1,$$

или

$$\frac{dY_1}{d\xi} = c_1 \frac{e^{-\xi}}{\xi^2},$$

откуда после повторного интегрирования находим

$$Y_1 = c_1 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau + d_1, \quad (12.233)$$

где c_1 и d_1 — произвольные постоянные. В связи с тем что внутреннее разложение должно удовлетворять граничному условию на бесконечности, нижний предел интегрирования в этой формуле мы положили равным бесконечности (поскольку точка $x = \infty$ соответствует точке $\xi = \infty$). При этом из (12.217) и (12.231) следует, что $Y_1(\infty) = 0$, и, значит, постоянная d_1 в формуле (12.233) должна равняться нулю. Таким образом, формулу (12.233) можно переписать как

$$Y_1 = c_1 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau,$$

а разложение (12.231) принимает вид

$$y^I = 1 - \varepsilon c_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau + \dots, \quad (12.234)$$

где мы поменяли пределы интегрирования, с тем чтобы значение интеграла оставалось положительным. Постоянная же c_1 определяется в процессе срачивания внутреннего и внешнего разложений.

Сравним теперь двучленное внешнее разложение (12.227) с двучленным внутренним разложением (12.234), действуя следующим образом.

Двучленное внешнее разложение: $y \sim 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon \left[-\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \right. \\ \left. \times \ln x + b_1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right].$

Перепишем через внутреннюю переменную: $= 1 - \frac{\varepsilon}{\xi} + \\ + \varepsilon \left[-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\xi}\right) \ln \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + b_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\xi}\right) \right].$

Разложим при малых ε : $= 1 - \frac{\varepsilon}{\xi} + \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon \ln \xi + \\ + \varepsilon b_1 + \dots$

Найдем двучленное внутреннее разложение: $= 1 - \varepsilon \left(\frac{1}{\xi} + \right. \\ \left. + \ln \xi - \ln \varepsilon - b_1 \right)^1. \quad (12.235)$

Двучленное внутреннее разложение: $y \sim 1 - \varepsilon c_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau.$

Перепишем через внешнюю переменную: $= 1 - \varepsilon c_1 \int_{\varepsilon x}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau.$

¹ Обратим внимание читателя на наличие в разложении (12.235) логарифмического члена.

Разложим при малых ε : $= 1 - \varepsilon c_1 \left[\frac{1 - \varepsilon x}{\varepsilon x} + \ln \varepsilon x \right] + \dots$

Найдем двучленное внешнее разложение: $= 1 - \frac{c_1}{x} - \varepsilon c_1 (-1 + \ln x + \ln \varepsilon)$. (12.236)

При вычислении интеграла мы воспользовались интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon x}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau &= -\frac{e^{-\tau}}{\tau} \Big|_{\varepsilon x}^{\infty} - \int_{\varepsilon x}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = -\left[\frac{e^{-\tau}}{\tau} + e^{-\tau} \ln \tau \right]_{\varepsilon x}^{\infty} - \\ &- \int_{\varepsilon x}^{\infty} \ln \tau e^{-\tau} d\tau = \frac{e^{-\varepsilon x}}{\varepsilon x} + e^{-\varepsilon x} \ln \varepsilon x + O(\varepsilon \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Переписывая разложение (12.235) через внешнюю переменную x и приравнявая его разложению (12.236), получаем

$$1 - \frac{1}{x} - \varepsilon \ln x + \varepsilon b_1 = 1 - \frac{c_1}{x} - \varepsilon c_1 (-1 + \ln x + \ln \varepsilon). \quad (12.237)$$

Таким образом, $c_1 = 1$ и $b_1 = 1 - \ln \varepsilon$, и, следовательно,

$$y^0 = 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon \left[-\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x + (1 - \ln \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] + \dots \quad (12.238)$$

и
$$y^1 = 1 - \varepsilon \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau + \dots \quad (12.239)$$

Наконец, складывая внешнее разложение (12.238) с внутренним разложением (12.239) и вычитая их общую часть (12.236) при $c_1 = 1$, находим искомое составное разложение

$$\begin{aligned} y^c &= 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon \left[-\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x + (1 - \ln \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] + \\ &+ 1 - \varepsilon \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau - 1 + \frac{1}{x} + \varepsilon (-1 + \ln x + \ln \varepsilon) + \dots, \end{aligned}$$

или
$$y^c = 1 - \varepsilon \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau - \varepsilon \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1 - \ln \varepsilon}{x} \right] + \dots \quad (12.240)$$

Задача 2. В качестве второго примера, следуя Коулу (1968), рассмотрим следующую задачу:

$$\varepsilon y'' + y y' - y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (12.241)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (12.242)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ и α и β не зависят от ε . В этом случае малый параметр стоит множителем при старшей производной, в результате

чего в задаче возникает пограничный слой, причем разложение этого пограничного слоя зависит от знака коэффициента при y' . В то же время поскольку функция y определяется значениями α и β на границе области, то в конечном счете местоположение пограничного слоя также оказывается зависящим от граничных значений α и β .

Будем искать внешнее разложение в виде

$$y^0 = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение (12.241) и условия (12.242) и приравнявая коэффициенты при ε^0 , получаем

$$y_0 y_0' - y_0 = 0, \quad (12.243)$$

$$y_0(0) = \alpha, \quad y_0(1) = \beta. \quad (12.244)$$

Решение уравнения (12.243) состоит из двух ветвей, а именно:

$$y_0 = 0 \quad (12.245)$$

$$\text{и} \quad y_0 = x + c_0. \quad (12.246)$$

Первую ветвь следует отбросить, потому что с ее помощью мы не можем удовлетворить произвольным граничным условиям. Вторая ветвь дает два специальных внешних решения

$$y^r = x + \beta - 1, \quad (12.247)$$

$$y^l = x + \alpha, \quad (12.248)$$

где y^r удовлетворяет граничному условию на правом конце, а y^l — условию на левом конце. При этом из (12.247) и (12.248) следует, что

$$y^r(0) = \beta - 1 \quad \text{и} \quad y^l(1) = \alpha + 1.$$

Таким образом, если $\alpha \neq \beta - 1$, то функция y^r оказывается непригодной вблизи точки $x = 0$, а функция y^l — вблизи точки $x = 1$, и, следовательно, возникает необходимость ввести пограничный слой. Если пограничный слой существует на левом конце промежутка, то решение y^l следует исключить из рассмотрения; если пограничный слой имеет место на правом конце, то из рассмотрения исключается решение y^r . Если же пограничный слой располагается в некоторой внутренней окрестности данного промежутка (ударный слой), то нам необходимо учитывать оба этих решения. Если теперь $\alpha = \beta - 1$, то функция $y^r = y^l = x + \beta - 1$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению (12.243) и граничным условиям и, следовательно, она является точным решением задачи.

Как отмечено выше, в случае $\alpha \neq \beta - 1$ пограничный слой располагается в некоторой внутренней точке промежутка $[0, 1]$.

Для того чтобы исследовать поведение функции y в этом пограничном слое, введем преобразование растяжения

$$\xi = \frac{x - x_b}{\varepsilon^v}, \quad \text{или} \quad x = x_b + \varepsilon^v \xi \quad (v > 0), \quad (12.249)$$

где координата x_b задает положение пограничного слоя и заранее не известна. При этом для линейных задач нет необходимости изменять масштаб зависимой переменной, поскольку он не оказывает влияния на решение задачи. Однако в случае нелинейной задачи может возникнуть необходимость изменить масштаб и y зависимой переменной. Поэтому положим

$$y^i = Y(\xi; \varepsilon) + \dots = \frac{y(x; \varepsilon)}{\varepsilon^\lambda}, \quad (12.250)$$

где величина λ подлежит определению из дальнейшего анализа. Подставляя (12.249) и (12.250) в уравнение (12.241), имеем

$$\varepsilon^{1-2v+\lambda} \frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{2\lambda-v} y^i \frac{dy^i}{d\xi} - \varepsilon^\lambda y^i = 0,$$

или

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + \varepsilon^{\lambda+v-1} y^i \frac{dy^i}{d\xi} - \varepsilon^{2v-1} y^i = 0.$$

Если $\lambda = 0$, характерным пределом будет уравнение

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + y^i \frac{dy^i}{d\xi} = 0, \quad (12.251)$$

соответствующее значению $v = 1$. Если же $\lambda \neq 0$, то характерный предел будет иметь вид

$$\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} + y^i \frac{dy^i}{d\xi} - y^i = 0, \quad (12.252)$$

что соответствует случаю

$$\lambda + v - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2v - 1 = 0, \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

При этом из разложения (12.250) следует, что в первом случае (т. е. при $\lambda = 0$) $y = O(1)$, тогда как во втором случае (т. е. при $\lambda = \frac{1}{2}$) функция $y = O(\varepsilon^{1/2})$. Во втором случае характерный предел совпадает с исходным дифференциальным уравнением. Таким образом, уравнение для характерного предела приходится интегрировать численно, и, следовательно, обращаясь к методу асимптотических разложений, мы практически не получаем никакого упрощения исходной задачи. Однако Коул (1968) показал, что данные граничные условия являются каноническими, и поэтому численное интегрирование может быть проведено сразу для всех задач. Здесь мы ограничимся исследованием только первого случая, когда $y = O(1)$ и $v = 1$, а характерный внутренний

предел (12.251) оказывается более простым, чем исходное дифференциальное уравнение.

В первом приближении можно заменить y^i на Y в уравнении (12.251), откуда после интегрирования находим

$$Y' + \frac{1}{2} Y^2 = \frac{1}{2} b, \quad \text{или} \quad Y' = \frac{1}{2} (b - Y^2), \quad (12.253)$$

где b — произвольная постоянная. Эта постоянная b должна быть положительной, поскольку в противном случае при $\xi \rightarrow \pm\infty$ функция Y будет стремиться к $\mp\infty$, и, следовательно, мы не сумеем срастить разложение y^i с соответствующим внешним разложением.

Разделяя переменные в (12.253), имеем

$$\frac{2 dY}{k^2 - Y^2} = d\xi, \quad (12.254)$$

где постоянную b мы заменили на положительную величину k^2 . При интегрировании уравнения (12.254) будем рассматривать два случая: $Y^2 < k^2$ и $Y^2 \geq k^2$. В первом случае положим

$$Y = k \operatorname{th} \theta$$

и, учитывая, что $dY = k \operatorname{sch}^2 \theta d\theta$, из уравнения (12.254) получим

$$\frac{2k \operatorname{sch}^2 \theta d\theta}{k^2 - k^2 \operatorname{th}^2 \theta} = d\xi = \frac{2}{k} d\theta.$$

Таким образом, имеем

$$0 = \frac{1}{2} k (\xi + d)$$

и

$$y^i = Y + \dots = k \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} k (\xi + d) \right] + \dots, \quad (12.255)$$

где d — постоянная интегрирования. Во втором случае положим

$$Y = k \operatorname{cth} \theta$$

и, учитывая, что $dY = -k \operatorname{csch}^2 \theta d\theta$, из уравнения (12.254) получим

$$-\frac{2k \operatorname{csch}^2 \theta d\theta}{k^2 - k^2 \operatorname{cth}^2 \theta} = d\xi = \frac{2}{k} d\theta.$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{1}{2} k (\xi + d)$$

и

$$y^i = Y + \dots = k \operatorname{cth} \left[\frac{1}{2} k (\xi + d) \right] + \dots \quad (12.256)$$

Отметим, что величину k также можно считать положительной, поскольку функции th и cth нечетные. Постоянные интегрирования k и d в обеих формах внутреннего разложения определяются в процессе сращивания внутреннего и внешнего разложений.

Исследуем теперь три возможных случая расположения пограничного слоя: на левом конце промежутка, на правом его конце и в некоторой внутренней точке.

Если пограничный слой существует на левом конце промежутка, т. е. координата $x_b = 0$, то внешнее решение (12.248) следует отбросить и надлежащим внешним решением будет (12.247). Затем это внешнее решение сращивается с одной из форм внутреннего разложения, в результате чего получаются условия для пограничного слоя на левом конце. Выражая y' через переменную ξ и разлагая найденное выражение при малых ε , имеем

$$(y^0)' = \beta - 1. \quad (12.257)$$

Далее, выражая y' из разложений (12.255) или (12.256) через внешнюю переменную x , раскладывая при малых ε и замечая, что $x > 0$, получаем

$$(y^1)^0 = k > 0. \quad (12.258)$$

Следовательно, $k = \beta - 1$ и

$$Y = \begin{cases} (\beta - 1) \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} (\beta - 1) (\xi + d) \right] & \text{при } Y < \beta - 1, \\ (\beta - 1) \operatorname{cth} \left[\frac{1}{2} (\beta - 1) (\xi + d) \right] & \text{при } Y \geq \beta - 1. \end{cases} \quad (12.259)$$

Поскольку предполагается, что пограничный слой существует в точке $x = 0$, которая соответствует точке $\xi = 0$, он должен удовлетворять условию $y(0) = \alpha$, или $Y(0) = \alpha$. Тогда из (12.259) следует, что

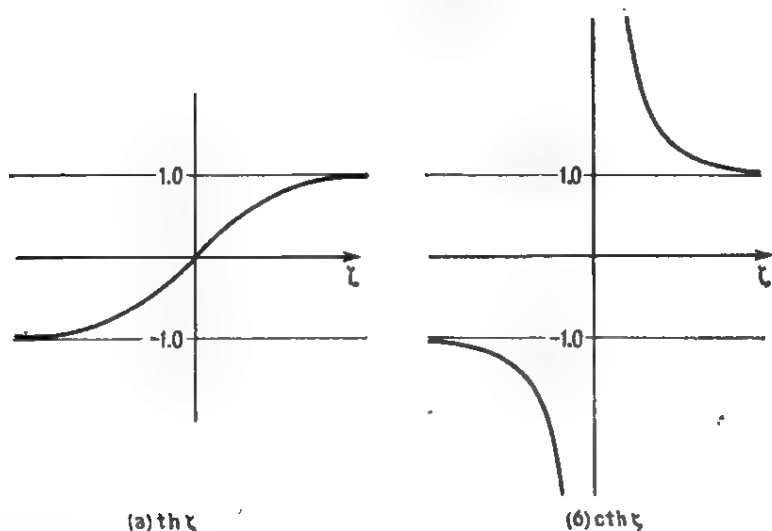
$$\alpha = (\beta - 1) \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} (\beta - 1) d \right] \quad (12.260)$$

или

$$\alpha = (\beta - 1) \operatorname{cth} \left[\frac{1}{2} (\beta - 1) d \right]. \quad (12.261)$$

Учитывая поведение функций th и cth (рис. 12.14), из соотношения (12.258) можно сделать вывод, что величина β должна быть больше единицы, так что внутреннее решение либо убывает, либо возрастает до значения $\beta - 1 > 0$. Кроме того, если $\alpha > \beta - 1$, внутреннее решение выражается через cth , который убывает от значения α до значения $\beta - 1$. Если же $\alpha < \beta - 1$, то должно быть также $\alpha > -(\beta - 1)$, так что внутреннее решение будет выражаться через th , который возрастает от значения α до значения $\beta - 1$. Оба этих решения приведены на рис. 12.15.

Перейдем теперь к анализу случая, когда пограничный слой существует на правом конце. При этом имеем $x_b = 1$, и, следовательно, решение (12.247) должно быть отброшено, а надлежащее внешнее решение будет даваться формулой (12.248). Для того чтобы срастить это внешнее решение с одной из форм внутреннего

Рис. 12.14. Поведение функций $\text{th } \zeta$ и $\text{cth } \zeta$.

разложения, выразим y^i через переменную $\xi = (x - 1)/\varepsilon$ и разложим полученное выражение при малых ε . В результате получим

$$(y^0)^i = \alpha + 1. \quad (12.262)$$

Кроме того, выражая y^i в (12.255) и (12.256) через внешнюю переменную x , имеем

$$Y = k \text{th} \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{x-1}{\varepsilon} + d \right) \right],$$

$$Y = k \text{cth} \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{x-1}{\varepsilon} + d \right) \right].$$

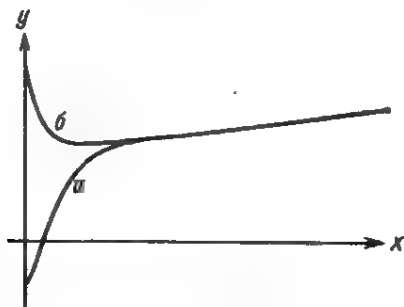


Рис. 12.15 Характер изменения составного решения в случае, когда пограничный слой существует в окрестности точки $x = 0$, при $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 3$ и а) $\alpha = -0.5$; б) $\alpha = 4$.

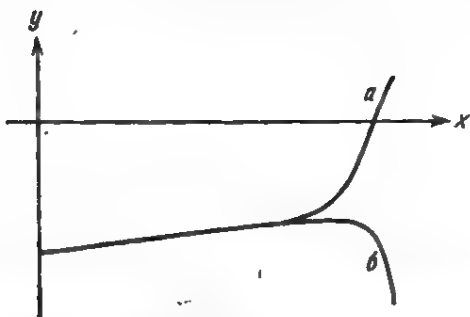


Рис. 12.16. Характер изменения составного решения в случае, когда пограничный слой существует в окрестности точки $x = 1$, при $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = -3$ и а) $\beta = 1$; б) $\beta = -4$.

Устремляя ε к нулю и замечая, что $x < 1$, находим, что аргумент в этих выражениях стремится к $-\infty$, и, следовательно,

$$(y')^0 = -k. \quad (12.263)$$

Приравнявая в соответствии с принципом сращивания выражения (12.262) и (12.263), получаем, что $k = -(\alpha + 1)$. Таким образом,

$$Y = \begin{cases} -(\alpha + 1) \operatorname{th} \left[-\frac{1}{2} (\alpha + 1) (\xi + d) \right] & \text{при } Y \geq \alpha + 1, \\ -(\alpha + 1) \operatorname{cth} \left[-\frac{1}{2} (\alpha + 1) (\xi + d) \right] & \text{при } Y \leq \alpha + 1, \end{cases} \quad (12.264)$$

причем функция Y должна удовлетворять граничному условию $y(1) = \beta$, или $Y(0) = \beta$; поскольку точка $x = 1$ соответствует точке $\xi = 0$. Наконец, находим

$$\beta = -(\alpha + 1) \operatorname{th} \left[-\frac{1}{2} (\alpha + 1) d \right] \quad (12.265)$$

или
$$\beta = -(\alpha + 1) \operatorname{cth} \left[-\frac{1}{2} (\alpha + 1) d \right]. \quad (12.266)$$

Поскольку предполагается, что $k > 0$, величина $\alpha + 1$ должна быть отрицательной. Если $\beta < \alpha + 1 < 0$, внутреннее решение выражается через cth , причем оно будет возрастать от значения β до значения $\alpha + 1$. Если же $|\beta| < |\alpha + 1|$ и $\alpha + 1 < 0$, то внутреннее решение будет выражаться через th , который убывает от значения β до значения $\alpha + 1$. Оба этих решения представлены на рис. 12.16.

Наконец, исследуем случай, когда пограничный слой существует в некоторой внутренней точке промежутка. При этом с внутренним разложением необходимо сращивать уже оба внешних решения. Для того чтобы срастить y' из (12.247) с разложением y' ,

выразим эту функцию через переменную $\xi = (x - x_b)/\varepsilon$ и, разлагая результат при малых ε , получим

$$(y^r)' = x_b + \beta - 1. \quad (12.267)$$

Для того чтобы срастить решение y^l , определяемое формулой (12.248), с разложением y^r , перепишем это решение через переменную ξ и, разлагая результат при малых ε , получим

$$(y^l)' = x_b + \alpha. \quad (12.268)$$

Так как $\xi = (x - x_b)/\varepsilon$ стремится к минус бесконечности при $x < x_b$ и к плюс бесконечности при $x > x_b$, то внутреннее решение y^l должно возрастать от $x_b + \alpha$ до $x_b + \beta - 1$. Рис. 12.14 показывает, что такой характер изменения, т. е. возрастание от значения $-k$ при $\xi = -\infty$ до значения $+k$ при $\xi = +\infty$, имеет только функция th . Следовательно, внутреннее решение должно даваться формулой (12.255). Полагая $\xi = +\infty$, находим, что

$$(y^l)' = k, \quad (12.269)$$

а полагая $\xi = -\infty$, получаем, что

$$(y^l)' = -k, \quad (12.270)$$

где надстрочные индексы r и l обозначают внешние пределы справа и слева от x_b соответственно. Приравнявая (12.267) и (12.269), имеем

$$x_b + \beta - 1 = k, \quad (12.271)$$

а приравнявая (12.268) и (12.270), находим

$$x_b + \alpha = -k. \quad (12.272)$$

При этом из соотношений (12.271) и (12.272) следует, что

$$x_b = \frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta), \quad k = \frac{1}{2}(\beta - 1 - \alpha), \quad (12.273)$$

и, следовательно, внутреннее решение y^l можно записать в виде

$$y^l = \frac{1}{2}(\beta - 1 - \alpha) \text{th} \left[\frac{1}{4}(\beta - 1 - \alpha)\xi \right] + \dots \quad (12.274)$$

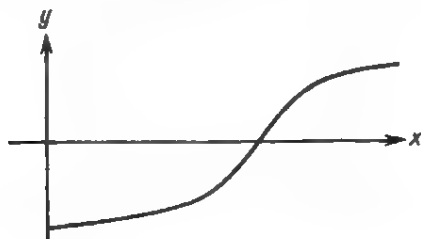


Рис. 12.17. Характер изменения составного разложения в случае, когда пограничный слой существует во внутренней точке промежутка, при $\alpha = -2$, $\beta = 1.8$ и $\varepsilon = 0.1$.

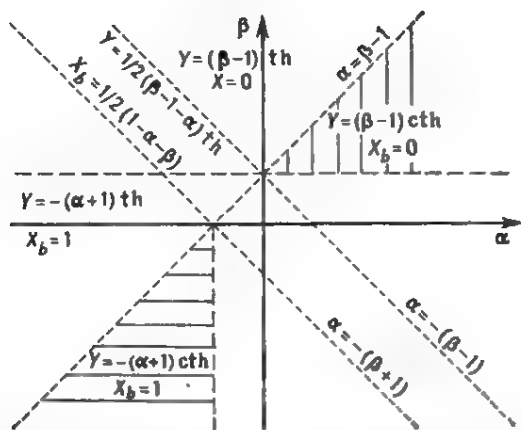


Рис. 12.18. Диаграмма, иллюстрирующая расположение пограничного слоя в плоскости (α, β) .

Таким образом, как показано на рис. 12.17, внутреннее решение возрастает от $-\frac{1}{2}(\beta - 1 - \alpha)$ до $+\frac{1}{2}(\beta - 1 - \alpha)$, причем мы принимаем $d = 0$, поскольку с самого начала предполагается, что центр ударного слоя расположен в точке $x = x_b$, или $\xi = 0$. Так как $0 < x_b < 1$, а величина k считается положительной, из формул (12.273) получаем, что существование ударного слоя (т. е. внутреннего пограничного слоя) требует выполнения условий

$$0 < \frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta) < 1 \quad \text{и} \quad \beta - 1 - \alpha > 0,$$

или

$$-1 < \alpha + \beta < 1 \quad \text{и} \quad \beta > 1 + \alpha. \quad (12.275)$$

На рис. 12.18 иллюстрируются все возможные варианты решений для пограничного слоя в плоскости (α, β) . Незаштрихованная область на рисунке соответствует случаю, когда $y = 0$ ($\varepsilon^{1/2}$), и характерный предел дается уравнением (12.252); при этом, как отмечалось выше, решение должно строиться с помощью численных методов.

Приведенный пример показывает, что в нелинейной задаче с пограничным слоем положение последнего в очень большой степени зависит от выбора граничных значений.

Упражнения

12.1. Рассмотреть краевую задачу

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

а) Найти точное решение.

б) Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с точным решением.

в) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с результатами пунктов а) и б).

12.2. Рассмотреть краевую задачу

$$\varepsilon y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

а) Найти точное решение.

б) Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с точным решением.

в) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с результатами пунктов а) и б).

12.3. Рассмотреть краевую задачу

$$\varepsilon y'' - y' = 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

а) Найти точное решение.

б) Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с точным решением.

в) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с результатами в пунктах а) и б).

12.4. Рассмотреть краевую задачу

$$\varepsilon y'' + y' = 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

а) Найти точное решение.

б) Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить полученный результат с точным решением.

в) Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка. Сравнить результат с результатами, полученными в пунктах а) и б).

12.5. Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для решений краевых задач

$$\varepsilon y'' \pm (3x + 1) y' = 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

12.6. Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для решений краевых задач

$$\varepsilon y'' \pm y' = 2x, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

В обоих случаях сравнить полученный результат с точным решением.

12.7. Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для решений краевых задач

$$\varepsilon y'' \pm (2x^2 + x + 1) y' = 4x + 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

12.8. Построить равномерно пригодные разложения первого порядка для решений следующих краевых задач:

а) $\varepsilon y'' + xy' - xy = 0,$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

б) $\varepsilon y'' + (1 - x) y' - (1 - x) y = 0,$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

12.9. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения краевой задачи

$$\varepsilon y'' + x^2 y' - x^3 y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

12.10. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y + x^n y' - x^m y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

При каких условиях существует пограничный слой вблизи начала координат? Построить для этого случая равномерно пригодное разложение первого порядка.

12.11. Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения краевой задачи

$$\varepsilon y'' + xy' - xy = 0, \quad y(-1) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

12.12. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y''' - y' &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma. \end{aligned}$$

а) Найти точное решение и с его помощью показать, что в общем случае пограничный слой существует на обоих концах промежутка.

б) Построить равномерно пригодное двучленное разложение и сравнить полученный результат с точным решением.

12.13. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y''' - y' + y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma.$$

а) Найти точное решение и с его помощью показать, что в общем случае пограничный слой существует на обоих концах промежутка.

б) Построить равномерно пригодное двучленное разложение и сравнить полученный результат с точным решением.

12.14. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y''' - (2x + 1)y' &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma. \end{aligned}$$

Построить равномерно пригодное двучленное разложение первого порядка.

12.15. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y^{IV} - y'' &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma, \quad y'(1) = \delta. \end{aligned}$$

а) Найти точное решение и с его помощью показать, что в общем случае пограничный слой существует на обоих концах промежутка.

б) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка и сравнить полученный результат с точным решением.

12.16. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon y^{IV} - (2x + 1)y'' &= 1, \\ y(0) &= \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y(1) = \gamma, \quad y'(1) = \delta. \end{aligned}$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

12.17. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 y'' + x^2 y' - (x^2 + \varepsilon^{1/2})y &= 0, \\ y(0) &= \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{aligned}$$

Показать, что для нее существуют два характерных предела. Далее построить равномерно пригодное трехзонное решение первого порядка.

12.18. Рассмотреть задачу

$$u'' + \frac{3}{r} u' + \varepsilon u u' = 0, \quad u(1) = 0, \quad u(\infty) = 1.$$

Построить равномерно пригодное двучленное разложение.

12.19. Рассмотреть задачу

$$u'' + \frac{1}{r} u' + \varepsilon u u' = 0, \quad u(1) = 0, \quad u(\infty) = 1.$$

Построить равномерно пригодное одночленное разложение. Обратит внимание на то, что неравномерность проявляется уже в первом члене разложения.

Ответ: $u^0 = [\ln(1/\varepsilon)]^{-1} \ln r + \dots$,

$$u^i = 1 + \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \dots, \quad u^c = u^i.$$

12.20. Рассмотреть задачу

$$\frac{1}{2} x^2 = \frac{1-\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon}{1-x}, \quad t(0) = 0.$$

Показать, что

$$\begin{aligned} \sqrt{2} t^c = & \frac{2}{3} x^{3/2} + \varepsilon \left[\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} x^{3/2} + x^{1/2} - \ln(1+x^{1/2}) + \xi - \sqrt{\xi(\xi+1)} + \operatorname{Arsh} \sqrt{\xi} \right] + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\xi = (1-x)/\varepsilon.$$

12.21. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y'' - yy' - y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для случая $y = O(1)$.

12.22. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y'' + yy' - xy = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для случая $y = O(1)$.

12.23. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y'' - y^2 = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

12.24. Рассмотреть задачу

$$\varepsilon y'' \pm (2x+1)y' + y^2 = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Построить равномерно пригодное разложение первого порядка.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе мы займемся исследованием линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами следующего вида:

$$y'(x) = F(x)y(x) + h(x), \quad (13.1)$$

где y и h — вектор-столбцы с n компонентами, а $F(x)$ — квадратная матрица n -го порядка, составленная из переменных коэффициентов. При этом нас будут интересовать лишь решения однородной задачи

$$y'(x) = F(x)y(x), \quad (13.2)$$

поскольку, если они известны, для нахождения частного решения, а затем и общего решения исходной неоднородной задачи всегда можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Действительно, пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — n линейно независимых векторных решений уравнения (13.2); тогда решение неоднородной задачи (13.1) можно представить в виде

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \quad (13.3)$$

где $c_n(x)$ — некоторые скалярные функции от x , подлежащие определению в дальнейшем. Дифференцируя выражение (13.3) по x , имеем

$$y'(x) = c'_1y_1 + c'_2y_2 + \dots + c'_ny_n + c_1y'_1 + c_2y'_2 + \dots + c_ny'_n. \quad (13.4)$$

Подстановка (13.4) в уравнение (13.1) дает

$$\begin{aligned} c'_1y_1 + c'_2y_2 + \dots + c'_ny_n + c_1y'_1 + c_2y'_2 + \dots + c_ny'_n = \\ = c_1Fy_1 + c_2Fy_2 + \dots + c_nFy_n + h. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Поскольку $y'_n = Fy_n$, соотношение (13.5) можно упростить:

$$c'_1y_1 + c'_2y_2 + \dots + c'_ny_n = h, \quad (13.6)$$

что дает нам систему из n линейных уравнений относительно n скалярных функций c'_m . Обозначив составляющие вектора y_m через y_{ms} , равенство (13.6) можно переписать в виде

$$Yc' = h, \quad (13.7)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Поскольку y_1, y_2, \dots, y_n линейно независимы, матрица Y оказывается невырожденной и будет иметь обратную матрицу, которую обозначим как Y^{-1} . Умножая уравнение (13.7) слева на Y^{-1} , получаем соотношение

$$c' = Y^{-1}h, \quad (13.8)$$

определяющее собой систему n независимых уравнений относительно неизвестных c_m . Поскольку y и h — известные функции, решение (13.8) может быть представлено в квадратурах

$$c = \int Y^{-1}(x) h(x) dx. \quad (13.9)$$

Таким образом, если решения соответствующего (13.1) однородного уравнения известны, то частное решение уравнения (13.1) может быть найдено по формуле (13.9). Именно поэтому будем рассматривать только однородные уравнения вида (13.2). При этом сначала рассмотрим скалярные уравнения первого порядка, а затем перейдем к исследованию уравнений второго порядка.

13.1. Скалярные уравнения первого порядка

Начнем со случая, когда $y(x)$ и $F(x)$ представляют собой скалярные функции, поскольку тогда точное решение уравнения (13.2) можно записать в виде

$$y = ce^{\int F(x) dx}, \quad (13.10)$$

где c — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия.

Если функция $F(x)$ представима в виде ряда Тейлора, сходящегося при $|x - x_0| < R$, то говорят, что x_0 есть *обыкновенная точка* данного дифференциального уравнения; в противном случае точка x_0 называется *особой*. Кроме того, если считать переменную x комплексной, тогда $F(x)$ будет *аналитической функцией, регулярной* в некоторой окрестности $|x - x_0| < R$ точки x_0 .

Если точка x_0 конечна, ее всегда можно перевести в начало координат, положив

$$\xi = x - x_0. \quad (13.11)$$

Тогда уравнение (13.2) переписывается в виде

$$\frac{dy}{d\xi} = F(\xi + x_0) y, \quad (13.12)$$

причем функция $F(\xi + x_0)$ разлагается в ряд Тейлора, сходящийся для всех $|\xi| < R$. Таким образом, не уменьшая общности, можем считать, что интересующая нас точка является началом координат.

В случае если ряд

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n, \quad (13.13)$$

где F_n — некоторые постоянные коэффициенты, сходится при $|x| < R$, решение (13.10) можно записать как

$$y = c \exp \left[\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) dx \right] = c \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n \int x^n dx \right],$$

или

$$y = c \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n x^{n+1}}{n+1} \right]. \quad (13.14)$$

Заметим, что ряд под знаком экспоненты сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F_n x^{n+1} n}{(n+1) F_{n-1} x^n} \right| = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{F_n}{F_{n-1}} \right| = \frac{x}{R}, \quad (13.15)$$

а ряд (13.13) по условию представляет собой сходящийся ряд с радиусом сходимости R . Поскольку функцию $\exp(z)$ всегда можно представить в виде ряда Тейлора, сходящегося при любых значениях z , правая часть (13.14) также оказывается разложимой в ряд Тейлора, который будет сходиться при $|x| < R$.

Если точка $x = 0$ представляет собой изолированную особую точку функции $F(x)$, например полюс порядка N , то $F(x)$ можно разложить в ряд Лорана вида

$$F(x) = \frac{1}{x^N} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n, \quad (13.16)$$

где F_n — некоторые постоянные и $F_0 \neq 0$. Подстановка ряда (13.16) в формулу (13.10) дает

$$y = c \exp \left[\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n-N} \right) dx \right] = c \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_n \int x^{n-N} dx \right],$$

или

$$y = c \exp \left[-\frac{F_0}{(N-1)x^{N-1}} - \frac{F_1}{(N-2)x^{N-2}} - \dots - \frac{F_{N-2}}{x} + F_{N-1} \ln x + F_N x + \frac{1}{2} F_{N+1} x^2 + \frac{1}{3} F_{N+2} x^3 + \dots \right]. \quad (13.17)$$

В случае $N = 1$ разложение (13.17) принимает вид

$$y = c \exp \left[F_0 \ln x + F_1 x + \frac{1}{2} F_2 x^2 + \frac{1}{3} F_3 x^3 + \dots \right],$$

или

$$y = cx^{F_0} \exp \left[F_1 x + \frac{1}{2} F_2 x^2 + \frac{1}{3} F_3 x^3 + \dots \right]. \quad (13.18)$$

Если представить экспоненциальный член в виде ряда по степеням x , то формулу (13.18) можно записать как

$$y = cx^{F_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (13.19)$$

где a_n — постоянные, не зависящие от x . В случае $N = 2$ разложение (13.17) принимает вид

$$y = c \exp \left[-\frac{F_0}{x} + F_1 \ln x + F_2 x + \frac{1}{2} F_3 x^2 + \frac{1}{3} F_4 x^3 + \dots \right],$$

или

$$y = cx^{F_1} \exp \left(-\frac{F_0}{x} \right) \exp \left[F_2 x + \frac{1}{2} F_3 x^2 + \frac{1}{3} F_4 x^3 + \dots \right]. \quad (13.20)$$

Член $\exp(-F_0/x)$ нельзя представить в виде ряда по степеням x или x^{-1} , поскольку при $x \rightarrow 0$ эта функция стремится к нулю быстрее, чем любая степень x , если $F_0 > 0$, или к бесконечности быстрее, чем любая степень x^{-1} , если $F_0 < 0$. В то же время вторую экспоненту в (13.20) можно представить в виде ряда по степеням x , так что разложение (13.20) переписывается как

$$y = cx^{F_1} e^{-F_0/x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (13.21)$$

где постоянные коэффициенты a_n не зависят от x . Аналогичным образом можно переписать разложение (13.17) в случае $N \geq 2$:

$$y = cx^{F_{N-1}} \exp \left[-\frac{F_0}{(N-1)x^{N-1}} - \frac{F_1}{(N-2)x^{N-2}} - \dots - \frac{F_{N-2}}{x} \right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (13.22)$$

где a_n — постоянные коэффициенты, не зависящие от x .

Сравнение формул (13.19), (13.21) и (13.22) показывает, что полюс первого порядка всегда можно отличить от полюсов более высокого порядка. Действительно, в случае простого полюса решение (13.19) отличается от решения в обыкновенной точке множителем x^{F_0} . Если же полюс имеет более высокий порядок, чем первый, то соответствующая форма решения будет отличаться от представления решения в обыкновенной точке на экспоненциальный множитель, который нельзя разложить в ряд по степеням x , и, кроме того, на множитель x^σ , где σ — некоторая постоянная.

Отметим, что в случае $N = 1$ рассматриваемая точка, т. е. начало координат, называется *регулярной особой точкой*, а в случае $N \geq 2$ — *иррегулярной особой точкой*.

Отметим также, что полученные выше представления решений не меняют своего вида и в случае, когда u есть вектор-столбец, а F — квадратная матрица n -го порядка.

13.2. Уравнения второго порядка

Рассмотрим теперь решения уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (13.23)$$

вблизи начала координат. Если $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими функциями, регулярными в окрестности $x = 0$, то точка $x=0$ называется *обыкновенной точкой* данного дифференциального уравнения. В этом случае функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся степенные ряды с ненулевым радиусом сходимости, причем решение y также можно представить в виде сходящегося степенного ряда по степеням переменной x . В случае если одна из функций $p(x)$ и $q(x)$ или обе они одновременно оказываются нерегулярными в начале координат, тогда точка $x = 0$ называется *особой точкой* исходного дифференциального уравнения. Если $p(x)$ имеет в этой точке полюс максимум первого порядка, а $q(x)$ — полюс второго порядка, тогда точка $x = 0$ называется *регулярной особой точкой*. При этом по крайней мере одно из решений уравнения (13.23) имеет вид (13.19). Если $p(x)$ имеет в точке $x = 0$ полюс порядка выше, чем первого, или $q(x)$ имеет в этой точке полюс выше второго порядка, или это имеет место одновременно, тогда точка $x = 0$ называется *иррегулярной особой точкой*, и по крайней мере одно из решений уравнения (13.23) имеет вид (13.22). Покажем теперь, как строятся решения уравнения (13.23). Для уменьшения объема вычислений рассмотрим лишь несколько частных случаев, иллюстрирующих характерные свойства получаемых решений. В этом параграфе исследуем случай, когда начало координат представляет собой обыкновенную точку дифференциального уравнения.

Обратимся, например, к уравнению

$$y'' + xy' + 2y = 0. \quad (13.24)$$

Здесь $p(x) = x$ и $q(x) = 2$, так что точка $x = 0$ является обыкновенной точкой уравнения (13.24), и, значит, функцию y можно разложить в ряд Тейлора вида

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (13.25)$$

Дифференцируя (13.25) по x , имеем

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (13.26)$$

Дальнейшее дифференцирование (13.26) по x дает

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad (13.27)$$

поскольку члены, пропорциональные a_0 и a_1 , пропадают. Подставляя разложения (13.25)—(13.27) в исходное уравнение (13.24), имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (13.28)$$

Следующий шаг заключается в том, чтобы приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x . Для этого сделаем замену индекса суммирования n таким образом, чтобы степени x под знаком каждой суммы оказались одинаковыми, а именно положим $n = m + 2$ в первой сумме и $n = m$ во второй и третьей суммах. В результате находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^m + 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0,$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+1)(m+2) a_{m+2} + (m+2) a_m] x^m = 0. \quad (13.29)$$

Далее, приравняв нулю коэффициенты при x^m , получим рекуррентное соотношение вида

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13.30)$$

При этом из (13.30) следует, что

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0, & a_3 &= -\frac{a_1}{2}, & a_4 &= -\frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3}, \\ a_5 &= -\frac{a_3}{4} = \frac{a_1}{2 \cdot 4}, & a_6 &= -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{3 \cdot 5}, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты a_n с четными и нечетными индексами оказываются не связанными друг с другом: все четные коэффициенты выражаются через a_0 , а все нечетные — через a_1 . В результате мы имеем два линейно независимых решения, в одно из которых входит множителем коэффициент a_0 , а в другое — коэффициент a_1 . Следовательно,

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad (13.31)$$

где

$$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{3 \cdot 5} + \frac{x^8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m m! x^{2m}}{(2m)!} \quad (13.32)$$

и

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^m m!} = x e^{-(1/2)x^2}, \quad (13.33)$$

Ясно, что ряд в формуле (13.33) сходится, поскольку мы смогли записать его сумму в замкнутой форме. Применяя теперь признак Даламбера к ряду (13.32), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\text{-й член}}{(m-1)\text{-й член}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-2)^m m! x^{2m} (2m-2)!}{(2m)! (-2)^{m-1} (m-1)! x^{2m-2}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-2mx^2}{(2m)(2m-1)} = -x^2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m-1} = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, ряд (13.32) также сходится для всех значений x . Таким образом, общее решение уравнения (13.24) при любых значениях x дается формулой (13.31).

13.3. Решение в окрестности регулярной особой точки

В этом случае каждая из функций $p(x)$ и $q(x)$ или обе одновременно имеют особенности в точке $x = 0$, но в то же время функции $x p(x)$ и $x^2 q(x)$ могут быть разложены в ряды Тейлора по степеням x . Простейшее уравнение такого типа имеет место в том случае, когда

$$p(x) = p_0 x^{-1} \quad \text{и} \quad q(x) = q_0 x^{-2},$$

где p_0 и q_0 — постоянные величины. При этом уравнение (13.23) записывается как

$$y'' + \frac{p_0}{x} y' + \frac{q_0}{x^2} y = 0. \quad (13.34)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера*; как показано ниже, можно легко построить его точное решение.

Уравнение Эйлера

Перепишем уравнение (13.34) в виде

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0. \quad (13.35)$$

Ясно, что данное уравнение принадлежит к классу так называемых однородных уравнений, каждый член которых содержит

x в той же степени, что и соответствующий порядок производной от y . Такие уравнения имеют решения вида

$$y = x^\sigma, \quad (13.36)$$

где σ — некоторая постоянная, которая называется обычно *характеристическим показателем* и определяется из самого уравнения. Подстановка (13.36) в (13.35) дает

$$\sigma(\sigma - 1)x^\sigma + p_0\sigma x^\sigma + q_0x^\sigma = 0, \\ \text{или} \quad \sigma^2 + (p_0 - 1)\sigma + q_0 = 0. \quad (13.37)$$

Это уравнение принято называть *определяющим уравнением*; корнями его будут

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(1 - p_0) \pm \left[\frac{1}{4}(1 - p_0)^2 - q_0 \right]^{1/2}. \quad (13.38)$$

Если корни σ_1 и σ_2 различны, то функции x^{σ_1} и x^{σ_2} представляют собой два линейно независимых решения исходного уравнения. Тогда общее решение уравнения (13.35) можно записать как

$$y(x) = c_1 x^{\sigma_1} + c_2 x^{\sigma_2}, \quad (13.39)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. В случае если $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}(1 - p_0)$, т. е. при $(1 - p_0)^2 = 4q_0$, описанный способ дает нам только одно из двух возможных линейно независимых решений, а именно

$$y_1(x) = x^{\sigma_1}.$$

Второе линейно независимое решение можно получить с помощью преобразования

$$y_2(x) = u(x)y_1(x),$$

где функция $u(x)$ подлежит определению в дальнейшем. Подстановка выражения для y_2 в (13.35) приводит к уравнению

$$x^2 y_1 u'' + 2x^2 y_1' u' + x^2 y_1'' u + p_0 x u' y_1 + p_0 x u y_1' + q_0 u y_1 = 0,$$

которое после упрощения принимает вид

$$x^2 y_1 u'' + (2x^2 y_1' + p_0 x y_1) u' = 0, \quad (13.40)$$

поскольку y_1 является решением исходного уравнения (13.35). Соотношение (13.40) представляет собой уравнение первого порядка относительно функции u' . Таким образом, указанный подход является общим; он всегда позволяет найти еще одно линейно независимое решение произвольного уравнения второго порядка. Подстановка выражения для y_1 в уравнение (13.40) дает

$$x^{\sigma_1+2} u'' + (2\sigma_1 + p_0) x^{\sigma_1+1} u' = 0,$$

$$\text{или} \quad x u'' + u' = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{u''}{u'} + \frac{1}{x} = 0, \quad \text{или} \quad \ln u' + \ln x = 0,$$

и, следовательно, $u' = \frac{1}{x}$, или $u = \ln x$.

Окончательно имеем

$$y_2(x) = x^{\sigma_1} \ln x. \quad (13.41)$$

Решение (13.41) можно получить и другим способом. Так, полагая в уравнении (13.35) $y = x^\sigma$, имеем при $\sigma_1 = \sigma_2$

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = [\sigma^2 + (p_0 - 1)\sigma + q_0] x^\sigma = (\sigma - \sigma_1)^2 x^\sigma. \quad (13.42)$$

Дифференцирование (13.42) по σ дает

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right) + p_0 x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right) + q_0 \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 2(\sigma - \sigma_1) x^\sigma + (\sigma - \sigma_1)^2 x^\sigma \ln x. \quad (13.43)$$

Полагая теперь $\sigma = \sigma_1$ в (13.42) и (13.43), мы видим, что функции y и $\partial y / \partial \sigma$ должны удовлетворять исходному дифференциальному уравнению при $\sigma = \sigma_1$. Следовательно, одним из решений исходного уравнения будет функция $y_1 = x^{\sigma_1}$, а вторым — функция

$$y_2 = \frac{\partial y}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (x^\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma_1} = x^{\sigma_1} \ln x$$

в полном соответствии с формулой (13.41).

Приведенный пример показывает, что случай одинаковых показателей требует специального рассмотрения. Как показано ниже, такое рассмотрение может потребоваться даже тогда, когда σ_1 и σ_2 различны, но их разность равна некоторому целому числу.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений более общих, чем уравнение Эйлера, причем мы начнем со случая неравных показателей, разность между которыми не есть целое число.

Случай, когда $\sigma_2 - \sigma_1 \neq$ целому числу

Рассмотрим уравнение

$$4xy'' + 2y' + y = 0. \quad (13.44)$$

Здесь $p(x) = \frac{1}{2} x^{-1}$ и $q(x) = \frac{1}{4} x^{-1}$, и, следовательно, $x = 0$ есть регулярная особая точка этого уравнения. Поэтому уравнение (13.44) обладает решениями в так называемой *форме Фробениуса*

$$y = x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n}. \quad (13.45)$$

Подстановка (13.45) в уравнение (13.44) дает

$$\begin{aligned} 4 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Главные члены первых двух сумм в (13.46) пропорциональны $x^{\sigma-1}$, тогда как главный член в последней сумме оказывается пропорциональным x^{σ} . Поэтому основное соотношение, определяющее вид характеристических показателей, можно получить, положив коэффициент при $x^{\sigma-1}$ равным нулю, т. е.

$$4\sigma(\sigma-1)a_0 + 2\sigma a_0 = 0. \quad (13.47)$$

Тогда соотношение (13.46) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(\sigma+n)(2\sigma+2n-1)a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0.$$

Показатели степени x в каждой сумме можно сделать одинаковыми, полагая $n = m+1$ в первой сумме и $n = m$ — во второй. В результате имеем уравнение

$$\sum_{m=0}^{\infty} [2(\sigma+m+1)(2\sigma+2m+1)a_{m+1} + a_m] x^{\sigma+m} = 0,$$

из которого, последовательно приравнивая нулю коэффициенты при $x^{\sigma+m}$, можно получить рекуррентное соотношение

$$a_{m+1} = - \frac{a_m}{2(\sigma+m+1)(2\sigma+2m+1)}. \quad (13.48)$$

При этом из формулы (13.47) следует, что либо $a_0 = 0$ (что соответствует тривиальному решению), либо

$$4\sigma^2 - 4\sigma + 2\sigma = 0,$$

откуда
$$\sigma_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}.$$

В данном случае показатели σ_1 и σ_2 не равны друг другу, а их разность равна $\frac{1}{2}$, т. е. отлична от целого числа. Поэтому можно построить два линейно независимых решения, соответствующие разным значениям σ .

Так, полагая в формуле (13.48) $\sigma = 0$, находим

$$a_{m+1} = - \frac{a_m}{2(m+1)(2m+1)},$$

откуда

$$a_1 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{a_0}{4!}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \dots$$

Следовательно, выбирая $a_0 = 1$, имеем

$$y_1(x) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(2m)!}. \quad (13.49)$$

Этот ряд сходится при всех x , поскольку

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m\text{-й член}}{(m-1)\text{-й член}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^m x^m (2m-2)!}{(2m)! (-1)^{m-1} x^{m-1}} = 0.$$

Полагая теперь в формуле (13.48) $\sigma = \frac{1}{2}$, получаем

$$a_{m+1} = - \frac{a_m}{2(m+1)(2m+3)},$$

откуда

$$a_1 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{a_0}{5!}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{a_0}{7!}, \dots$$

Следовательно, выбирая $a_0 = 1$, имеем

$$y_2(x) = x^{1/2} \left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \frac{x^4}{9!} + \dots \right) = x^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(2m+1)!}. \quad (13.50)$$

Легко показать, что построенный ряд сходится при любых значениях x . Таким образом, в данном случае как и для уравнения Эйлера, мы получим два линейно независимых частных решения, соответствующие разным корням характеристического уравнения.

Случай, когда $\sigma_2 - \sigma_1$ равно целому числу

Рассмотрим здесь два уравнения: решение одного из них мы получим, используя описанный выше способ, решения же второго получаются в результате некоторого видоизменения указанной процедуры. Начнем с уравнения

$$(1 - x^2) y'' + 2xy' + y = 0. \quad (13.51)$$

Действуя как и ранее, будем искать решение $y(x)$ в форме (13.45). Подставляя (13.45) в уравнение (13.51), имеем

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n-2} +$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n-2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} [1 + 3(\sigma + n) - (\sigma + n)^2] a_n x^{\sigma+n} = 0. \quad (13.52)$$

Главными членами в разложении (13.52) являются члены с $x^{\sigma-2}$ и $x^{\sigma-1}$; они соответствуют значениям индекса $n = 0$ и $n = 1$ в первой сумме. Приравнявая нулю коэффициенты при указанных степенях x , находим

$$\sigma(\sigma - 1) a_0 = 0, \quad (13.53)$$

$$(\sigma + 1) \sigma a_1 = 0. \quad (13.54)$$

Тогда (13.52) переписывается в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n-2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} [1 + 3(\sigma + n) - (\sigma + n)^2] a_n x^{\sigma+n} = 0.$$

Как и ранее, приведем показатели степени при x в обеих суммах к одинаковому виду; с этой целью положим $n = m + 2$ в первой сумме и $n = m$ во второй сумме. В результате получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(\sigma + m + 2)(\sigma + m + 1) a_{m+2} + \\ + [1 + 3(\sigma + m) - (\sigma + m)^2] a_m\} x^{\sigma+m} = 0.$$

Далее, приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях x , находим

$$a_{m+2} = - \frac{1 + 3(\sigma + m) - (\sigma + m)^2}{(\sigma + m + 2)(\sigma + m + 1)} a_m. \quad (13.55)$$

Из соотношения (13.53) следует, что при $a_0 \neq 0$ $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$. В случае когда $\sigma = 0$, уравнение (13.54) удовлетворяется автоматически, а значение a_1 может быть выбрано произвольно. Если же $\sigma = 1$, то из соотношения (13.54) следует, что $a_1 = 0$.

При $\sigma = 0$ формула (13.55) принимает вид

$$a_{m+2} = - \frac{1 + 3m - m^2}{(m+1)(m+2)} a_m,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{8}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{10} = -\frac{a_0}{80}, \dots, \\ a_8 = -\frac{a_6}{12} = \frac{a_0}{960}, \quad a_{10} = -\frac{a_8}{14} = -\frac{a_0}{13440}, \dots$$

Следовательно, получаем решение

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{80} + \dots \right] + \\ + a_1 \left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{40} - \frac{3x^7}{560} + \dots \right], \quad (13.56)$$

которое содержит две произвольные постоянные и которое поэтому должно быть общим решением исходного уравнения. При этом суммы в квадратных скобках представляют собой два линейно независимых частных решения уравнения (13.51). Используя признак Даламбера, легко показать, что оба ряда в решении (13.56) сходятся при любых значениях x .

При $\sigma = 1$ из соотношения (13.54) следует, что $a_1 = 0$, а формула (13.55) принимает вид

$$a_{m+2} = - \frac{1 + 3(m+1) - (m+1)^2}{(m+2)(m+3)} a_m.$$

Тогда

$$a_2 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0, \\ a_3 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{40}, \quad a_6 = \frac{3a_4}{14} = \frac{3a_0}{560}, \dots$$

В результате имеем разложение

$$y = a_0 x \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} + \frac{3x^6}{560} + \dots \right], \quad (13.57)$$

лишь постоянным множителем отличающееся от второго частного решения в разложении (13.56), которое, как уже упоминалось выше, дает общее решение уравнения (13.51).

Перейдем теперь к исследованию случая, в котором требуется несколько видоизменить описанную выше процедуру, а именно рассмотрим уравнение Бесселя первого порядка

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \quad (13.58)$$

Как и ранее, подстановка разложения (13.45) в уравнение (13.58) приводит к соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n} + \\ + (x^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\sigma + n)^2 - 1] a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0,$$

или

$$(\sigma^2 - 1) a_0 x^{\sigma} + \sigma(\sigma + 2) a_1 x^{\sigma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(\sigma + n)^2 - 1] a_n x^{\sigma+n} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0. \quad (13.59)$$

Полагая коэффициенты при главных членах разложения, т. е. членах с x^{σ} и $x^{\sigma+1}$ в (13.59), равными нулю, имеем

$$(\sigma^2 - 1) a_0 = (\sigma - 1)(\sigma + 1) a_0 = 0, \quad (13.60a)$$

$$[(\sigma + 1)^2 - 1] a_1 = \sigma(\sigma + 2) a_1 = 0. \quad (13.60b)$$

При этом соотношение (13.59) принимает вид

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(\sigma + n)^2 - 1] a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0. \quad (13.61)$$

Для того чтобы привести показатели степени x в каждой сумме к одинаковому виду, положим $n = m + 2$ в первой сумме и $n = m - 1$ во второй. В результате получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{[(\sigma + m + 2)^2 - 1]a_{m+2} + a_m\} x^{\sigma+m+2} = 0.$$

Приравнивание коэффициентов при последовательных степенях x приводит к рекуррентному соотношению

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\sigma + m + 2)^2 - 1} = -\frac{a_m}{(\sigma + m + 1)(\sigma + m + 3)}. \quad (13.62)$$

Из формулы (13.60а) следует, что при $a_0 \neq 1$ показатель σ равен ± 1 . Тогда из (13.60б) находим, что $a_1 = 0$ и, следовательно, $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$. Полагая в (13.62) $\sigma = -1$, имеем

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{m(m+2)}. \quad (13.63)$$

Если положить теперь в формуле (13.63) $m = 0$, то коэффициент a_2 оказывается равным бесконечности. Таким образом, описанная выше метадика не позволяет получить решение при $\sigma = -1$.

В случае когда $\sigma = 1$, из рекуррентной формулы (13.62) следует, что

$$a_{m+2} = -\frac{a_m}{(m+2)(m+4)}.$$

Поэтому

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 8} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \quad \dots,$$

и, следовательно,

$$y_1(x) = J_1(x) = a_0 x \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \right]. \quad (13.64)$$

Построенный ряд представляет собой одно из решений уравнения (13.58); при $a_0 = \frac{1}{2}$ он обычно называется функцией Бесселя 1-го рода первого порядка и обозначается через $J_1(x)$.

Для того чтобы найти второе линейно независимое решение уравнения (13.58), можно воспользоваться одним из приемов, применявшихся для построения второго решения уравнения Эйлера в случае равных показателей, т. е. равных корней определяющего уравнения. Здесь мы используем второй из описанных там

способов, а именно выразим коэффициенты a_m через a_0 , не подставляя соответствующее значение σ . Тогда из формулы (13.62) имеем

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{(\sigma+3)(\sigma+5)} = \frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{(\sigma+5)(\sigma+7)} = -\frac{a_0}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$y(x) = x^\sigma \left[a_0 - \frac{a_0 x^2}{(\sigma+1)(\sigma+3)} + \frac{a_0 x^4}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)} - \frac{a_0 x^6}{(\sigma+1)(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)} + \dots \right]. \quad (13.65)$$

Как и ранее, если положить в разложении (13.65) $\sigma = -1$, то соответствующие коэффициенты обратятся в бесконечность ввиду наличия в их знаменателях множителя $(\sigma+1)$. Для того чтобы обойти это затруднение, выберем a_0 равным $b(\sigma+1)$. При этом из разложения (13.65) имеем

$$y = bx^\sigma \left[(\sigma+1) - \frac{x^2}{\sigma+3} + \frac{x^4}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)} - \frac{x^6}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2(\sigma+7)} + \dots \right], \quad (13.66)$$

откуда после подстановки в дифференциальное уравнение (13.58) находим

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = b(\sigma+1)^2(\sigma-1)x^\sigma. \quad (13.67)$$

С другой стороны, уравнение (13.67) можно получить прямо из формулы (13.59), полагая в ней $a_0 = b(\sigma+1)$, $a_1 = 0$ и учитывая соотношение (13.61). Как и для уравнения Эйлера в случае равных корней определяющего уравнения, наличие квадратичного множителя $(\sigma+1)^2$ в правой части (13.67) приводит к тому, что функции y и $dy/d\sigma$ должны удовлетворять исходному дифференциальному уравнению при $\sigma = -1$. Полагая теперь в (13.66) $\sigma = -1$ и принимая $b = 1$, приходим к разложению

$$y_1(x) = x^{-1} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right], \quad (13.68a)$$

которое лишь постоянным множителем отличается от (13.64). Далее, дифференцируя (13.66) по σ и полагая $b = 1$, имеем

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{dy}{d\sigma} = y \ln x + x^\sigma \left\{ 1 + \frac{x^2}{(\sigma+3)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)} + \frac{1}{(\sigma+3)^2(\sigma+5)^2} \right] x^4 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

откуда, полагая $\sigma = -1$, находим

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{5x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots \right]. \quad (13.686)$$

Таким образом, разложения (13.64) и (13.686) представляют собой два линейно независимых решения уравнения (13.58). Используя признак Даламбера, можно легко показать, что построенные для y_1 и y_2 ряды сходятся при любых значениях x .

Случай $\sigma_2 = \sigma_1$

В качестве следующего примера рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (13.69)$$

Как и ранее, подставляя разложение (13.45) в уравнение (13.69), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+1} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)^2 a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+1} = 0,$$

или

$$\sigma^2 a_0 x^{\sigma-1} + (\sigma + 1)^2 a_1 x^{\sigma} + \sum_{n=2}^{\infty} (\sigma + n)^2 a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+1} = 0. \quad (13.70)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при первых двух степенях x , т. е. при $x^{\sigma-1}$ и x^{σ} , находим

$$\sigma^2 a_0 = 0; \quad (13.71a)$$

$$(\sigma + 1)^2 a_1 = 0. \quad (13.71b)$$

Соотношение (13.70) в этом случае переписывается в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sigma + n)^2 a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+1} = 0, \quad (13.72)$$

откуда, полагая $n = m + 2$ в первой сумме и $n = m$ — во второй, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\sigma + m + 2)^2 a_{m+2} + a_m] x^{\sigma+m+1} = 0.$$

Приравнивание коэффициентов при последовательных степенях x приводит к рекуррентной формуле

$$a_{m+2} = - \frac{a_m}{(\sigma + m + 2)^2}. \quad (13.73)$$

Из соотношения (13.71a) следует, что при $a_0 \neq 0$ оба характеристических показателя равны нулю; при этом из (13.71б) получаем, что $a_1 = 0$. Следовательно, используя прямую методику Фробениуса, можно построить только одно решение уравнения (13.69). Поэтому прежде всего попытаемся найти зависимость решения y от величины σ . Из формулы (13.73) имеем

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$$

и

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\sigma+2)^2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{(\sigma+4)^2} = \frac{a_0}{(\sigma+2)^2(\sigma+4)^2}, \dots$$

Таким образом, получаем

$$y = a_0 x^\sigma \left[1 - \frac{x^2}{(\sigma+2)^2} + \frac{x^4}{(\sigma+2)^2(\sigma+4)^2} - \frac{x^6}{(\sigma+2)^2(\sigma+4)^2(\sigma+6)^2} + \dots \right]. \quad (13.74)$$

Подстановка разложения (13.74) в уравнение (13.69) дает

$$xy'' + y' + xy = a_0 \sigma x^{\sigma-1}. \quad (13.75)$$

С другой стороны, уравнение (13.75) можно получить из (13.70), полагая $a_1 = 0$ и используя соотношение (13.72). Как и ранее, наличие квадратичного множителя σ^2 в правой части (13.75) приводит к тому, что функции y и $\partial y / \partial \sigma$ должны удовлетворять исходному дифференциальному уравнению при $\sigma = 0$.

Полагая теперь в (13.74) $\sigma = 0$ и выбирая $a_0 = 1$, приходим к решению следующего вида:

$$y_1(x) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (13.76)$$

Далее, дифференцируя (13.74) по σ и принимая $a_0 = 1$, получаем

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = y \ln x + x^\sigma \left\{ \frac{2x^2}{(\sigma+2)^3} - \left[\frac{2}{(\sigma+2)^3(\sigma+4)^2} + \frac{2}{(\sigma+2)^2(\sigma+4)^3} \right] x^4 + \dots \right\},$$

откуда при $\sigma = 0$ находим второе решение исходного уравнения

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots \quad (13.77)$$

Воспользовавшись признаком Даламбера, можно легко показать, что ряды для y_1 и y_2 сходятся при всех значениях x .

13.4. Сингулярность в бесконечно удаленной точке

В § 13.2 и 13.3 мы строили решения дифференциальных уравнений в виде рядов в окрестности некоторой конечной точки. В этом параграфе мы рассмотрим решения в окрестности беско-

нечно удаленной точки. Для того чтобы выяснить, является ли бесконечность обыкновенной или особой точкой данного уравнения, а также выяснить характер ее особенности, бесконечно удаленную точку обычно переводят в начало координат с помощью подстановки $z = x^{-1}$. При этом

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{d}{dz} = -z^2 \frac{d}{dz},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \frac{d}{dz} + \frac{1}{x^4} \frac{d^2}{dz^2} = 2z^3 \frac{d}{dz} + z^4 \frac{d^2}{dz^2}.$$

Тогда уравнение (13.23) переписывается в виде

$$2z^3 \frac{dy}{dz} + z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} - z^2 p\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dy}{dz} + q\left(\frac{1}{z}\right) y = 0,$$

или

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{2}{z} - \frac{1}{z^3} p\left(\frac{1}{z}\right) \right] \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right) y = 0. \quad (13.78)$$

Таким образом, $x = \infty$ будет обыкновенной точкой уравнения (13.23), если точка $z = 0$ будет обыкновенной точкой для уравнения (13.78). Следовательно, бесконечно удаленная точка будет обыкновенной точкой для уравнения (13.23), если функции

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{z^3} p\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)$$

представляют собой аналитические функции, регулярные в окрестности точки $z = 0$; в противном случае бесконечно удаленная точка будет особой точкой исходного уравнения. Указанные условия равносильны требованию, чтобы функции

$$2x - x^2 p(x) \quad \text{и} \quad x^4 q(x)$$

разлагались в сходящиеся ряды Тейлора по обратным степеням x .

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y'' + \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) y' + \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5} \right) y = 0. \quad (13.79)$$

Подстановка $z = x^{-1}$ переводит его в уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 3 \frac{dy}{dz} + (2z + 1) y = 0. \quad (13.80)$$

Поскольку точка $z = 0$ является обыкновенной точкой для уравнения (13.80), то бесконечно удаленная точка также будет обыкновенной точкой для уравнения (13.79). Следовательно, решения уравнения (13.79) могут быть представлены в виде сходящегося ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad (13.81)$$

где a_n — некоторые постоянные коэффициенты.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right) y' + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right) y = 0. \quad (13.82)$$

После преобразования $z = x^{-1}$ оно принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - 3\right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{z} + 2\right) y = 0. \quad (13.83)$$

Поскольку $z = 0$ есть регулярная особая точка уравнения (13.83), то бесконечность будет регулярной особой точкой для уравнения (13.82). Следовательно, по крайней мере одно из решений уравнения (13.82) можно представить в виде сходящегося ряда

$$y = x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} \quad (13.84)$$

с постоянными коэффициентами a_n . Второе частное решение этого уравнения строится с помощью формулы (13.84), как это делалось, например, в предыдущем параграфе.

В качестве последнего примера исследуем уравнение Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (13.85)$$

После подстановки $z = x^{-1}$ оно приобретает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4} y = 0. \quad (13.86)$$

Поскольку $z = 0$ есть иррегулярная особая точка уравнения (13.86), то бесконечность также будет иррегулярной особой точкой уравнения (13.85). Приближенные представления решений дифференциальных уравнений второго порядка вблизи иррегулярной особой точки рассмотрим в следующем параграфе.

13.5. Решение в окрестности иррегулярной особой точки

Как указывалось в § 13.1, если начало координат есть иррегулярная особая точка уравнения (13.23), то решения этого уравнения имеют вид

$$y(x) = e^{\Lambda(x)} x^\sigma u(x), \quad (13.87)$$

где функция $u(x)$ может быть представлена в виде ряда (не обязательно сходящегося) по степеням $x^{m/n}$, $\Lambda(x)$ — некоторый полином от $x^{-m/n}$, а m и n — простые числа. В случае $n = 1$ такое решение называется *нормальным*, если же $n \neq 1$, то оно называется *субнормальным решением*. В этом параграфе мы рассмотрим три примера — уравнение, для которого существует нормальное решение, уравнение, для которого имеется субнормальное решение, и уравнение с иррегулярной особой точкой на бесконечности.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' - (1 - 3x) y' + y = 0, \quad (13.88)$$

которое, как мы покажем ниже, обладает нормальным решением вблизи начала координат, являющегося в этом случае иррегулярной особой точкой. Для того чтобы определить вид многочлена $\Lambda(x)$, прежде всего найдем его главный член. Принимая, что главный член в $\Lambda(x)$ имеем форму $\lambda x^{-\nu}$, положим

$$y \sim e^{\lambda x^{-\nu}}. \quad (13.89)$$

Тогда

$$y' \sim -\frac{\lambda \nu}{x^{\nu+1}} e^{\lambda x^{-\nu}}, \quad y'' \sim \left[\frac{\lambda^2 \nu^2}{x^{2\nu+2}} + \frac{\lambda \nu (\nu+1)}{x^{\nu+2}} \right] e^{\lambda x^{-\nu}}. \quad (13.90)$$

Подставив выражения для y , y' и y'' в уравнение (13.88) и разделив на x^2 , получим

$$\frac{\lambda^2 \nu^2}{x^{2\nu+2}} + \frac{\lambda \nu (\nu+1)}{x^{\nu+2}} + \frac{\lambda \nu}{x^{\nu+3}} - \frac{3\lambda \nu}{x^{\nu+2}} + \frac{1}{x^3} + \dots = 0. \quad (13.91)$$

Поскольку при $x \rightarrow 0$ $x^{-2\nu-2} \gg x^{-\nu-2}$ и $x^{-\nu-3} \gg x^{-\nu-2}$, то, сохраняя в (13.91) лишь основные члены, находим

$$\frac{\lambda^2 \nu^2}{x^{2\nu+2}} + \frac{\lambda \nu}{x^{\nu+3}} + \frac{1}{x^3} + \dots = 0. \quad (13.92)$$

Далее нужно приравнять соответствующие показатели степени у переменной x . Поскольку эти показатели степени зависят от величины ν , то здесь возможны три варианта:

$$2\nu + 2 = \nu + 3, \quad 2\nu + 2 = 2 \quad \text{и} \quad \nu + 3 = 2;$$

соответственно получаем три значения ν : $\nu = 1$, $\nu = 0$ и $\nu = -1$. Однако из этих значений нужно выбрать лишь самое большее, поскольку в противном случае мы не сумеем скомпенсировать главный член в (13.92). Например, если выбрать значение $\nu = 0$, то первый член этого разложения будет иметь порядок x^{-3} , второй член — порядок x^{-3} и третий — порядок x^{-2} . Следовательно, мы не сможем подобрать величину λ таким образом, чтобы исключить главный член, которым в этом случае окажется второе слагаемое в разложении (13.92). В случае же $\nu = -1$ многочлен $\Lambda(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, и поэтому функция $\exp[\Lambda(x)]$ будет представима рядом по степеням x , что позволит объединить ее с функцией $u(x)$.

В то же время в случае $\nu = 1$ главными членами разложения (13.92) окажутся первые два слагаемых. Их можно скомпенсировать, положив

$$\lambda^2 \nu^2 + \lambda \nu = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + \lambda = 0,$$

откуда $\lambda = 0$ или -1 .

В случае $\lambda = 0$, подставляя ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} \quad (13.93)$$

в уравнение (13.88), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n} - (1 - 3x) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n + 1)^2 a_n x^{\sigma+n} - \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} = 0. \quad (13.94)$$

При этом главный член в (13.94) оказывается пропорциональным $x^{\sigma-1}$, что соответствует слагаемому с индексом $n = 0$ во второй сумме. Если положить коэффициент при $x^{\sigma-1}$ равным нулю, то имеем

$$\sigma a_0 = 0, \quad (13.95)$$

и разложение (13.94) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n + 1)^2 a_n x^{\sigma+n} - \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} = 0.$$

Отсюда, полагая $n = m$ в первой сумме и $n = m + 1$ — во второй сумме, находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\sigma + m + 1)^2 a_m - (\sigma + m + 1) a_{m+1}] x^{\sigma+m} = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях x , получаем

$$a_{m+1} = (\sigma + m + 1) a_m. \quad (13.96)$$

Из формулы (13.95) следует, что при $a_0 \neq 0$ $\sigma = 0$. Тогда из (13.96) получаем

$$a_{m+1} = (m + 1) a_m,$$

и, следовательно,

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = 2a_1 = 2a_0, \quad a_3 = 3a_2 = 3! a_0, \\ a_4 = 4a_3 = 4! a_0, \quad a_5 = 5a_4 = 5! a_0, \dots,$$

или

$$y_1(x) = a_0 [1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + 4! x^4 + 5! x^5 + \dots].$$

Таким образом, имеем

$$y_1(x) \sim a_0 \sum_{m=0}^{\infty} m! x^m. \quad (13.97)$$

Используя признак Даламбера, легко показать, что ряд (13.97) расходится для всех значений x ; именно поэтому мы воспользовались вместо знака равенства знаком асимптотического соответствия. То, что построенный ряд оказался расходящимся, не должно являться для нас неожиданным — ведь начало координат представляет собой иррегулярную особую точку рассматриваемого уравнения.

В случае $\lambda = -1$ положим

$$y(x) = v(x) \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad (13.98)$$

откуда

$$y' = \left(v' + \frac{1}{x^2}v\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right),$$

$$y'' = \left(v'' + \frac{2}{x^2}v' - \frac{2}{x^3}v + \frac{1}{x^4}v\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Подставляя выражения для y , y' и y'' в уравнение (13.88), имеем

$$x^2v'' + 2v' - \frac{2}{x}v + \frac{1}{x^2}v - v' - \frac{1}{x^2}v + 3xv' + \frac{3}{x}v + v = 0,$$

или

$$x^2v'' + (1 + 3x)v' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)v = 0. \quad (13.99)$$

Поскольку экспоненциальный множитель $\exp[\Lambda(x)]$ уже включен нами в выражение (13.98) для $y(x)$, будем искать решение $v(x)$ в форме Фробениуса

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n}. \quad (13.100)$$

Подстановка ряда (13.100) в уравнение (13.99) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n - 1) a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n-1} +$$

$$+ 3 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n + 1) a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n + 1)^2 a_n x^{\sigma+n} = 0. \quad (13.101)$$

Полагая главный член в (13.101) равным нулю, находим

$$(\sigma + 1) a_0 = 0. \quad (13.102)$$

При этом (13.101) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma + n + 1) a_n x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n + 1)^2 a_n x^{\sigma+n} = 0,$$

откуда, полагая $n = m + 1$ в первой сумме и $n = m$ — во второй сумме, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\sigma + m + 2)a_{m+1} + (\sigma + m + 1)^2 a_m] x^{\sigma+m} = 0.$$

Наконец, приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях x , получаем

$$a_{m+1} = - \frac{(\sigma + m + 1)^2}{\sigma + m + 2} a_m. \quad (13.103)$$

Из соотношения (13.102) следует, что в случае $a_0 \neq 0$ $\sigma = -1$; тогда из формулы (13.103) находим

$$a_{m+1} = - \frac{m^2}{m+1} a_m,$$

откуда $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0$ для $m \neq 0$, и, следовательно, ряд (13.100) обрывается на первом члене. Таким образом, если принять $a_0 = 1$, имеем окончательно

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right). \quad (13.104)$$

При этом, поскольку экспонента в формуле (13.104) включает в себя обратные степени x , функция $y_2(x)$ есть нормальное решение исходного уравнения.

Пример 2. В качестве следующего примера рассмотрим уравнение, обладающее субнормальными решениями вблизи начала координат, а именно уравнение

$$x^3 y'' - x^2 y' - y = 0. \quad (13.105)$$

Поскольку точка $x = 0$ является иррегулярной особой точкой, то решения уравнения (13.105) будут иметь вид (13.87). Для того чтобы определить явным образом функцию $\Lambda(x)$, предположим, что главный член решения имеет форму (13.89). Подстановка выражений (13.89) и (13.90) в уравнение (13.105) приводит к соотношению

$$\frac{\lambda^2 v^2}{x^{2v-1}} + \frac{\lambda v(v+1)}{x^{v-1}} + \frac{\lambda v}{x^{v-1}} - 1 + \dots = 0, \quad (13.106)$$

основными членами которого являются первое слагаемое и, возможно, последнее. Чтобы скомпенсировать эти члены, потребуем выполнения условий $v = \frac{1}{2}$ и $\lambda^2 v^2 = 1$. Тем самым $\lambda = \pm 2$, и, принимая в (13.106) $v = \frac{1}{2}$, мы лишь подтверждаем предположение о том, что основными членами в этом соотношении являются первый и последний.

Итак, в данном случае решение y имеет вид

$$y = e^{\pm 2x^{-1/2}} v(x). \quad (13.107)$$

Поскольку экспонента в формуле (13.107) включает в себя дробные обратные степени x , такое решение называется субнормальным решением. При этом из (13.107) следует, что

$$y' = (v' \mp x^{-3/2} v) \exp(\pm 2x^{-1/2}),$$

$$y'' = \left(v'' \mp 2x^{-3/2} v' + x^{-3} v \pm \frac{3}{2} x^{-5/2} v \right) \exp(\pm 2x^{-1/2}).$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение (13.105), получаем

$$x^3 v'' \mp 2x^{3/2} v' + v \pm \frac{3}{2} x^{1/2} v - x^2 v' \pm x^{1/2} v - v = 0,$$

$$\text{или} \quad x^3 v'' - (x^2 \pm 2x^{3/2}) v' \pm \frac{5}{2} x^{1/2} v = 0. \quad (13.108)$$

Далее, будем искать решение уравнения (13.108) в виде ряда по степеням $x^{1/2}$, т. е.

$$v \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(\sigma+n)/2}. \quad (13.109)$$

Подстановка этого разложения в (13.108) дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} (\sigma + n) (\sigma + n - 2) a_n x^{(\sigma+n+2)/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\sigma + n) a_n x^{(\sigma+n+2)/2} \mp \\ \mp 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\sigma + n) a_n x^{(\sigma+n+1)/2} \pm \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(\sigma+n+1)/2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} (\sigma + n) (\sigma + n - 4) a_n x^{(\sigma+n+2)/2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\pm \frac{5}{2} \mp \sigma \mp n \right) a_n x^{(\sigma+n+1)/2} = 0. \end{aligned} \quad (13.110)$$

Главный член в разложении (13.110) представляет собой слагаемое, пропорциональное $x^{(\sigma+1)/2}$, что соответствует члену с индексом $n = 0$ во второй сумме. Приравнявая этот член нулю, находим

$$\left(\pm \frac{5}{2} \mp \sigma \right) a_0 = 0. \quad (13.111)$$

Далее, полагая $n = m$ в первой сумме и $n = m + 1$ — во второй сумме, перепишем разложение (13.110) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4} (\sigma + m) (\sigma + m - 4) a_m + \right. \\ \left. + \left(\pm \frac{5}{2} \mp \sigma \mp m \mp 1 \right) a_{m+1} \right\} x^{(\sigma+m+2)/2} = 0. \end{aligned}$$

Приравнивание нулю коэффициентов при последовательных степенях x дает рекуррентную формулу

$$a_{m+1} = - \frac{(\sigma + m)(\sigma + m - 4)}{4 \left(\pm \frac{5}{2} \mp \sigma \mp m \mp 1 \right)} a_m. \quad (13.112)$$

Из соотношения (13.111) следует, что при $a_0 \neq 0$ $\sigma = \frac{5}{2}$. Тогда формула (13.112) принимает вид

$$a_{m+1} = \pm \frac{\left(m + \frac{5}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right)}{4(m+1)} a_m, \quad (13.113)$$

откуда $a_1 = \mp \frac{3 \cdot 5}{16} a_0, \quad a_2 = \mp \frac{7 \cdot 1}{16 \cdot 2} a_1 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{16^2 \cdot 2} a_0,$

$$a_3 = \pm \frac{9 \cdot 1}{16 \cdot 3} a_2 = \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{16^3 \cdot 3!} a_0,$$

$$a_4 = \pm \frac{11 \cdot 3}{16 \cdot 4} a_3 = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{16^4 \cdot 4!} a_0, \dots,$$

и, следовательно,

$$y_1(x) \sim e^{2x^{-1/2}} x^{5/4} \left[1 - \frac{3 \cdot 5 x^{1/2}}{16} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 x}{16^2 \cdot 2} + \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 x^{3/2}}{16^3 \cdot 3!} + \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 x^2}{16^4 \cdot 4!} + \dots \right], \quad (13.114)$$

$$y_2(x) \sim e^{-2x^{-1/2}} x^{5/4} \left[1 + \frac{3 \cdot 5 x^{1/2}}{16} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 x}{16^2 \cdot 2} - \right. \\ \left. - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 x^{3/2}}{16^3 \cdot 3!} + \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 x^2}{16^4 \cdot 4!} + \dots \right]. \quad (13.115)$$

Используя признак Даламбера для ряда (13.109), в соответствии с рекуррентным соотношением (13.113) получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)\text{-й член}}{m\text{-й член}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1} x^{(\sigma+m+1)/2}}{a_m x^{(\sigma+m)/2}} = x^{1/2} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \pm \infty.$$

Таким образом, ряды (13.114) и (13.115) являются асимптотическими, в связи с чем мы воспользовались в них не знаком равенства, а знаком асимптотического соответствия.

Пример 3. В качестве последнего примера рассмотрим построение приближенного решения для уравнения Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (13.116)$$

при больших x . Как было показано в § 13.4, точка $x = \infty$ является для этого уравнения иррегулярной особой точкой. Поэтому решение уравнения (13.116) при больших x имеет вид

$$y(x) \sim e^{\Lambda(x)} x^{\sigma} u(x), \quad (13.117)$$

где $\Lambda(x)$ — полином от $x^{m/n}$ (m, n — простые числа), а функция $u(x)$ может быть представлена рядом по обратным степеням $x^{m/n}$.

Для того чтобы определить вид функции $\Lambda(x)$, предположим, что главный член (13.117) можно представить в форме

$$y \sim e^{\lambda x^v}. \quad (13.118)$$

Тогда

$$y' \sim \lambda v x^{v-1} e^{\lambda x^v}, \quad y'' \sim [\lambda^2 v^2 x^{2v-2} + \lambda v(v-1) x^{v-2}] e^{\lambda x^v},$$

и подстановка выражений для y , y' и y'' в уравнение (13.116) дает

$$\lambda^2 v^2 x^{2v-1} + \lambda v(v-1) x^{v-1} + \lambda v x^{v-1} + x + \dots = 0. \quad (13.119)$$

При $x \rightarrow \infty$ основными членами в (13.119) будут первое и последнее слагаемое, причем для того, чтобы они скомпенсировали друг друга, необходимо выбрать

$$v = 1 \quad \text{и} \quad \lambda = \pm i. \quad (13.120)$$

В случае $\lambda = i$ положим

$$y = e^{ix} v(x)$$

и, подставив в уравнение (13.116), получим

$$x(v'' + 2iv' - v) + v' + iv + xv = 0,$$

$$\text{или} \quad xv'' + (2ix + 1)v' + iv = 0. \quad (13.121)$$

Будем теперь искать решение уравнения (13.121) в форме

$$v \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\sigma-n}, \quad (13.122)$$

что при подстановке в это уравнение дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)(\sigma + n + 1) a_n x^{-\sigma-n-1} - 2i \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{-\sigma-n} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n) a_n x^{-\sigma-n-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\sigma-n} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma + n)^2 a_n x^{-\sigma-n-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2\sigma - 2n) a_n x^{-\sigma-n} = 0. \quad (13.123)$$

Главный член в этом разложении пропорционален $x^{-\sigma}$; он соответствует индексу $n = 0$ во второй сумме. Приравнявая этот член нулю, получаем

$$(1 - 2\sigma) a_0 = 0. \quad (13.124)$$

Далее, полагая $n = m$ в первой сумме и $n = m + 1$ — во второй сумме, перепишем разложение (13.123) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(\sigma + m)^2 a_m - i(2\sigma + 2m + 1) a_{m+1}] x^{-\sigma-m-1} = 0.$$

Положив коэффициент при соответствующей степени x равным нулю, находим

$$a_{m+1} = -\frac{i(\sigma + m)^2}{2\sigma + 2m + 1} a_m. \quad (13.125)$$

Из соотношения (13.124) следует, что при $a_0 \neq 0$ $\sigma = \frac{1}{2}$; в результате рекуррентная формула (13.125) приведет к виду

$$a_{m+1} = -\frac{i\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{2(m+1)} a_m,$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{ia_0}{4 \cdot 2}, & a_2 &= -\frac{3^2 ia_1}{4 \cdot 2^2} = -\frac{1 \cdot 3^2 a_0}{4^2 \cdot 2^2}, \\ a_3 &= -\frac{5^2 ia_2}{4 \cdot 3!} = -\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 ia_0}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3!}, & a_4 &= -\frac{7^2 ia_3}{4 \cdot 2 \cdot 4} = -\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 a_0}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4!}, \dots \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y(x) = e^{ix} x^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{4 \cdot 2x} i - \frac{1 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} i + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots \right] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (13.126) \end{aligned}$$

Поскольку отношение двух последовательных членов этого разложения

$$-\frac{i(2m+1)^2}{8(m+1)x} \rightarrow -i\infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то ряд в (13.126) расходится при любых значениях x . Однако при больших x он все же представляет собой асимптотическое разложение решения, поскольку его старшие члены с ростом m убывают очень быстро.

Отделяя в (13.126) вещественную и мнимую части, получаем следующие два линейно независимых решения уравнения (13.116):

$$y_1 \sim x^{-1/2}(u \cos x + v \sin x) \quad (13.127)$$

$$\text{и} \quad y_2 \sim x^{-1/2}(u \sin x - v \cos x), \quad (13.128)$$

где

$$u(x) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2! x^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4^4 \cdot 2^4 \cdot 4! x^4} + \dots, \quad (13.129)$$

$$v(x) = \frac{1}{4 \cdot 2x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 2^3 \cdot 3! x^3} + \dots \quad (13.130)$$

Таким образом, имеем

$$J_0(x) \sim Ay_1 + By_2 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (13.131)$$

где A и B — постоянные, определяемые из обычных начальных условий типа $J_0(0) = 1$ и $J'_0(0) = 0$. Вместе с тем формула (13.131) теряет силу при малых x , поскольку при $x \rightarrow 0$ правая ее часть становится неограниченной. Следовательно, мы не можем прямо воспользоваться полученным асимптотическим разложением, чтобы удовлетворить заданным начальным условиям. Для того чтобы преодолеть это затруднение, обычно пытаются построить интегральное представление рассматриваемой функции, которое удовлетворяло бы исходным начальным условиям. Тогда, определив главный член в асимптотическом разложении полученного интеграла, можно связать постоянные в асимптотическом представлении типа (13.131) с соответствующими начальными условиями.

Интегральное представление функции $J_0(x)$ можно найти следующим образом. Разложим функцию $\exp(ix \sin \theta)$ в ряд по возрастающим степеням x , т. е.

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \theta} &= 1 + \frac{ix \sin \theta}{1!} + \frac{(ix \sin \theta)^2}{2!} + \frac{(ix \sin \theta)^3}{3!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix \sin \theta)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (13.132)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\text{-й член}}{(n-1)\text{-й член}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ix \sin \theta)^n (n-1)!}{n! (ix \sin \theta)^{n-1}} = 0,$$

то ряд (13.132) сходится для всех значений x . Интегрируя обе части разложения (13.132) по θ в пределах от нуля до 2π , имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n \theta d\theta. \quad (13.133)$$

Из формулы (A.38) приложения А следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Тогда с учетом этой формулы из (13.133) находим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (13.134)$$

Так как, согласно формуле (13.76), ряд в правой части (13.134) представляет собой функцию $J_0(x)$, то тем самым получаем искомое интегральное представление для $J_0(x)$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} d\theta, \quad (13.135)$$

удовлетворяющее начальным условиям $J_0(0) = 1$ и $J'_0(0) = 0$.

Найдем теперь главный член асимптотического разложения интеграла (13.135) для больших x . С этой целью воспользуемся методом стационарной фазы, заметив, что соответствующие стационарные точки даются соотношением $\cos \theta = 0$, или $\theta = \pm \pi/2$. Поскольку в окрестности точек $\theta = \pm \pi/2$

$$\sin \theta = \pm \left[1 - \frac{1}{2} \left(\theta \mp \frac{1}{2} \pi \right)^2 + \dots \right], \quad (13.136)$$

то главный член в асимптотическом разложении нашего интеграла в соответствии с рекомендациями § 3.4 будет даваться выражением

$$J_0(x) \sim \frac{1}{2\pi} e^{ix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2) i x t^2} dt + \frac{1}{2\pi} e^{-ix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1/2) i x t^2} dt, \quad (13.137)$$

где $t = \theta \pm \frac{1}{2} \pi$. Интегралы в формуле (13.137) можно преобразовать в обычные интегралы Лапласа путем поворота из контуров интегрирования на углы $-\frac{1}{4} \pi$ и $+\frac{1}{4} \pi$ соответственно. В результате получим

$$J_0(x) \sim \frac{1}{2\pi} e^{ix} \int_{-\infty(e^{-i\pi/4})}^{\infty(e^{-i\pi/4})} e^{-ix t^{3/2}} dt + \frac{1}{2\pi} e^{-ix} \int_{-\infty(e^{i\pi/4})}^{\infty(e^{i\pi/4})} e^{ix t^{3/2}} dt. \quad (13.138)$$

Далее, положив $t = \sqrt[3]{2} r x^{-1/2} \exp(-\frac{1}{4} i \pi)$ в первом интеграле и $t = \sqrt[3]{2} \tau x^{-1/2} \exp(\frac{1}{4} i \pi)$ во втором интеграле, перепишем (13.138) в виде

$$J_0(x) \sim \frac{1}{\pi \sqrt{2x}} e^{i(x-\pi/4)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^3} dr + \\ + \frac{1}{\pi \sqrt{2x}} e^{-i(x-\pi/4)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^3} d\tau,$$

или с учетом формулы (3.25)

$$J_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} [e^{i(x-\pi/4)} + e^{-i(x-\pi/4)}],$$

откуда

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (13.139)$$

Из формул (13.127)—(13.130) при $x \rightarrow \infty$ следует, что

$$y_1 \sim x^{-1/2} \cos x \quad \text{и} \quad y_2 \sim x^{-1/2} \sin x.$$

Поэтому из (13.131) получаем

$$J_0(x) \sim x^{-1/2} (A \cos x + B \sin x). \quad (13.140)$$

Сравнивая выражения (13.139) и (13.140), находим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = A \cos x + B \sin x,$$

$$\text{откуда} \quad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{\pi}{4}, \quad B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя найденные значения A и B в (13.131) и используя (13.127) и (13.128), получаем окончательно

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) + v \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

или

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[u \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + v \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (13.141)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Формулы (13.76) и (13.141) описывают два различных представления одной и той же функции $J_0(x)$. Первая из них дает ряд, сходящийся при всех значениях x , тогда как ряды в формуле (13.141) расходятся при любых x . Как уже отмечалось в гл. 1, хотя сходящийся ряд (13.76) прекрасно описывает функцию $J_0(x)$ при малых x , при больших значениях аргумента он оказывается бесполезным с вычислительной точки зрения вследствие ограниченности разрядной сетки современных ЭВМ. На практике любая попытка вычисления на ЭВМ функции $J_0(x)$ при больших x с помощью сходящегося ряда (13.76) будет терпеть неудачу, как только x превысит некоторое заданное значение, которое, правда, в значительной степени определяется мастерством программиста. В то же время, хотя расходящийся ряд (13.141) оказывается совершенно непригодным при малых значениях x , он

будет давать очень хорошее приближение к $J_0(x)$ при больших x , причем точность этого приближения с ростом x будет увеличиваться.

Упражнения

13.1. Найти два линейно независимых решения для каждого из следующих уравнений:

а) $xy'' + y' = 0$,

б) $x^2y'' - y = 0$,

в) $x^2y'' + xy' - y = 0$,

г) $x^2y'' + 2xy' - 4y = 0$,

д) $x^2y'' - xy' + y = 0$.

13.2. Найти три линейно независимых решения для каждого из следующих уравнений:

а) $x^2y''' + 2xy'' - 2y' = 0$,

б) $x^3y''' - 3xy' + 3y = 0$,

в) $x^3y''' + 2x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$,

г) $x^3y''' - 6x^2y'' + 7xy' - 7y = 0$.

13.3. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения в окрестности точки $x = 0$ и найти радиус сходимости полученных рядов:

а) $y'' - xy = 0$,

б) $y'' + xy' - 2y = 0$,

в) $y'' + y' - 2xy = 0$,

г) $y'' - xy' - y = 0$.

13.4. Рассмотреть уравнение Эрмита

$$y'' - 2xy' + \gamma y = 0.$$

Найти два линейно независимых частных решения этого уравнения, представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x = 0$, и показать, что один из них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma = 2n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

13.5. Рассмотреть уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma y = 0.$$

Построить два линейно независимых решения этого уравнения, представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x = 0$, и показать, что один из них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

13.6. Построить два линейно независимых решения уравнения Чебышева

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \gamma y = 0,$$

представляя их в виде степенных рядов в окрестности точки $x = 0$, и показать, что один из них вырождается в конечную сумму в случае, если $\gamma = n^2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

13.7. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в виде соответствующих степенных рядов в окрестности точки $x = 0$:

а) $4xy'' + 2y' - y = 0$,

б) $(2x + x^2)y'' + y' - 6xy = 0$,

в) $9x(1 - x)y'' - 12y' + 4y = 0$,

г) $2x(1 - x)y'' + (1 - x)y' + 3y = 0$.

13.8. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в окрестности точки $x = 0$ в виде степенных рядов:

а) $x^3y'' + x(x - 1)y' - xy = 0$,

б) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$,

в) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$,

г) $x(1 - x)y'' - 3xy' - y = 0$,

д) $y'' + x^2y = 0$,

е) $(2 + x^2)y'' + xy' + (1 + x)y = 0$.

13.9. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в окрестности точки $x = 0$ в виде степенных рядов:

а) $xy'' + (1 + x)y' + 2y = 0$,

б) $(x - x^2)y'' + (1 - x)y' - y = 0$,

в) $(x - x^2)y'' + (1 - 5x)y' - 4y = 0$,

г) $4(x^4 - x^3)y'' + 8x^2y' - y = 0$.

13.10. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, представляя их в окрестности точки $x = 0$ в виде степенных рядов:

а) $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$,

б) $xy'' - (1 + x)y' + 2(1 - x)y = 0$.

13.11. Показать, что точка $x = 0$ является устранимой особой точкой для уравнения

$$x^2y'' - (4x + \lambda_1 x^2)y' + (4 - \lambda_2 x)y = 0,$$

если: а) $\lambda_2 = -\lambda_1$; б) $\lambda_2 = -2\lambda_1$; в) $\lambda_2 = -3\lambda_1$. (Указание: Показать, что все построенные решения регулярны при $x = 0$.)

13.12. Показать, что функции

$$y_1 = x^{-1/3} \left[1 + \frac{3}{3!}x + \frac{9}{6!}x^2 + \frac{27}{9!}x^3 + \dots \right],$$

$$y_2 = \frac{1}{1!} + \frac{3}{4!}x + \frac{9}{7!}x^2 + \frac{27}{10!}x^3 + \dots,$$

$$y_3 = x^{1/3} \left[\frac{1}{2!} + \frac{3}{5!}x + \frac{9}{8!}x^2 + \frac{27}{11!}x^3 + \dots \right]$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$9x^2y''' + 27xy'' + 8y' - y = 0.$$

13.13. Показать, что функции

$$y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 3^2} + \dots,$$

$$y_2 = y_1 \ln x + 2 \left[-x - \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^3 + \dots \right],$$

$$y_3 = 2y_2 \ln x - y_1 (\ln x)^2 + \left[6x + \left(\frac{6}{2^2} + \frac{8}{2^4} + \frac{6}{2^4} \right) x^2 + \dots \right]$$

представляют собой три линейно независимых решения уравнения

$$x^2 y''' + 3xy'' + (1-x)y' - y = 0.$$

13.14. Показать, что выражение

$$y = c_1 \exp \left(x + \frac{1}{x} \right) + c_2 \exp \left(-x - \frac{1}{x} \right)$$

представляет собой общее решение уравнения

$$x^4 (1-x^2) y'' + 2x^3 y' - (1-x^2)^2 y = 0.$$

Показать, что точки $x = 0$ и $x = \infty$ являются иррегулярными особыми точками этого уравнения.

13.15. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, пригодных в окрестности точки $x = 0$:

а) $x^2 y'' + x(1-2x)y' - 2y = 0,$

б) $x^4 y'' + 2x^2 y' - y = 0,$

в) $x^3 y'' + 2(1-x)y' - y = 0.$

13.16. Для каждого из следующих уравнений построить два линейно независимых решения, пригодных при больших x :

а) $16x^3 y'' + 32xy' - (4x+5)y = 0,$

б) $xy'' + 2(1-x)y' - y = 0,$

в) $4x^2 y'' + 8xy' - (4x^2+3)y = 0.$

13.17. Рассмотреть модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' - xy = 0.$$

а) Показать, что в окрестности точки $x = 0$ оно имеет следующее ограниченное решение:

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Найти второе линейно независимое решение этого уравнения.

б) Построить асимптотическое решение для больших x , включающее в себя произвольную постоянную.

в) Показать, что

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \sin \theta} d\theta.$$

г) Построить асимптотическое разложение интеграла, полученного в п. «в», при больших x и с его помощью определить произвольную постоянную, введенную в п. «б».

13.18. Рассмотреть уравнение Бесселя первого порядка

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

а) Показать, что одно из решений этого уравнения можно представить в виде ряда

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right],$$

сходящегося при любых значениях x . Найти второе линейно независимое решение этого уравнения.

б) Разложить функцию $\sin \theta \exp(ix \sin \theta)$ в ряд по степеням x , проинтегрировать полученный результат по θ в пределах от нуля до 2π и получить формулу

$$J_1(x) = \frac{-i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta e^{ix \sin \theta} d\theta.$$

в) Построить асимптотическое разложение решения этого уравнения при больших x , включающее в себя две произвольные постоянные.

г) Найти главный член асимптотического разложения полученного в п. б) интеграла при $x \rightarrow \infty$ и с его помощью найти значения постоянных из в).

13.19. Для каждого из следующих уравнений построить асимптотические разложения трех линейно независимых решений при больших x :

а) $x^6 y''' + 6x^5 y'' - y = 0,$

б) $xy'' - (2x + 1)y' - (1 + x)y' + (2x + 3)y = 0.$

13.20. Рассмотреть уравнение Бесселя порядка ν

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

а) Показать, что одно из решений этого уравнения есть

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

Показать, что в случае, когда ν отлично от целого числа, решением этого уравнения служит также функция

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n-\nu}}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)}.$$

б) Показать, что при больших x

$$y \sim Ay_1 + By_2,$$

где

$$y_1 \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{ix} \left[1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots \right] \quad \text{и} \quad y_2 = y_1.$$

в) Воспользовавшись интегральным представлением

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos xt \, dt, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

показать, что

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi \right) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

г) Используя результат в), найти постоянные A и B из б).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

В этой главе мы будем строить приближенные решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр. Такие уравнения имеют вид

$$y'' + p(x, \lambda) y' + q(x, \lambda) y = 0, \quad (14.1)$$

где λ — безразмерный параметр, причем $\lambda \gg 1$. Уравнение (14.1) можно преобразовать к так называемому нормальному виду, т. е. к виду, не содержащему первой производной, если воспользоваться подстановкой

$$y(x) = P(x) u(x).$$

При этом

$$y' = P'u + Pu', \quad y'' = P''u + 2P'u' + Pu''.$$

Подставляя выражения для y , y' и y'' в уравнение (14.1), приведем его к виду

$$P''u + 2P'u' + Pu'' + pP'u + pPu' + qPu = 0. \quad (14.2)$$

Полагая коэффициент при u' равным нулю, находим

$$2P' + pP = 0. \quad (14.3)$$

Тогда уравнение (14.2) переписывается как

$$u'' + \left[\frac{P''}{P} + \frac{pP'}{P} + q \right] u = 0. \quad (14.4)$$

Интегрирование (14.3) дает

$$\ln P = -\frac{1}{2} \int p dx,$$

или

$$P = \exp \left[-\frac{1}{2} \int p dx \right]. \quad (14.5)$$

Дифференцируя выражение (14.5), имеем

$$P' = -\frac{1}{2} p \exp \left[-\frac{1}{2} \int p dx \right],$$

$$P'' = \left(-\frac{1}{2} p' + \frac{1}{4} p^2 \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int p dx \right].$$

При этом уравнение (14.4) принимает вид

$$u'' + \left[q - \frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \right] u = 0, \quad (14.6)$$

Таким образом, мы можем ограничиться исследованием уравнения

$$y'' + q(x, \lambda) y = 0, \quad (14.7)$$

поскольку исходное уравнение (14.1) всегда может быть преобразовано к виду (14.7). В качестве примера рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (14.8)$$

В данном случае $p = x^{-1}$, $q = 1$, так что преобразованное уравнение (14.6) имеет вид

$$u'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) u = 0. \quad (14.9)$$

Заметим, что нормальная форма (14.7) оказывается удобной для построения асимптотического решения дифференциального уравнения при больших значениях аргумента x .

В этой главе будем исследовать специальный класс уравнений (14.7), а именно уравнения

$$y'' + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)] y = 0. \quad (14.10)$$

Уравнения вида (14.10) называют обычно уравнениями Лиувилля. Прежде всего мы рассмотрим ВКБ-приближение, затем преобразование Лиувилля—Грина и, наконец, преобразование Лангрена для случая уравнений с точками поворота.

14.1. ВКБ-приближение

Предположим, что в интервале, на котором разыскивается решение уравнения (14.10), функция $q_1(x)$ дифференцируема, а функция $q_2(x)$ непрерывна. Разделив обе части уравнения (14.10) на λ^2 , имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} y'' + q_1 y + \frac{1}{\lambda^2} q_2 y = 0. \quad (14.11)$$

Если формально устремить λ в уравнении (14.11) к бесконечности, то (14.11) перейдет в уравнение вида

$$q_1 y = 0, \quad (14.12)$$

которое имеет только тривиальное решение $y = 0$. Следовательно, мы не сможем построить приближенное решение уравнения (14.10), если станем искать его в форме

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{\lambda} y_1(x) + \dots, \quad (14.13)$$

как это делалось в предыдущих главах.

Поясним идею используемого ниже метода на простом примере уравнений, в котором коэффициент q_1 равен постоянной, а коэф-

коэффициент q_2 равен нулю. В этом случае решение уравнения (14.10) имеет вид

$$y = c_1 \exp(i\lambda \sqrt{q_1} x) + c_2 \exp(-i\lambda \sqrt{q_1} x), \quad (14.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Если коэффициент q_1 отрицателен, общее решение уравнения (14.10) можно записать в виде

$$y = c_1 \exp(\lambda \sqrt{-q_1} x) + c_2 \exp(-\lambda \sqrt{-q_1} x). \quad (14.15)$$

В том и в другом случае оба линейно независимых решения можно выразить через показательные функции, причем параметр λ будет входить в показатель соответствующей экспоненты. Рассмотренный пример наводит на мысль вместо прямого разложения по обратным степеням λ искать приближенное решение уравнения (14.10) в виде

$$y = \exp[\lambda G(x, \lambda)], \quad (14.16)$$

а для функции G строить прямое разложение по обратным степеням λ . Вычисляя первую и вторую производные выражения (14.16), имеем

$$y' = \lambda G' e^{\lambda G}, \quad y'' = (\lambda^2 G'^2 + \lambda G'') e^{\lambda G}.$$

Подставляя выражения для y , y' и y'' в линейное уравнение (14.10), преобразуем его в следующее нелинейное уравнение:

$$\lambda^2 G'^2 + \lambda G'' + \lambda^2 q_1 + q_2 = 0,$$

или

$$G'' + q_1 + \frac{1}{\lambda} G' + \frac{1}{\lambda^2} q_2 = 0. \quad (14.17)$$

Как указывалось выше, прямое разложение для функции G мы будем искать в форме

$$G(x, \lambda) = G_0(x) + \frac{1}{\lambda} G_1(x) + \dots \quad (14.18)$$

Подставляя разложение (14.18) в уравнение (14.17), имеем

$$\left(G_0' + \frac{1}{\lambda} G_1' + \dots\right)^2 + q_1 + \frac{1}{\lambda} \left(G_0'' + \frac{1}{\lambda} G_1'' + \dots\right) + \frac{1}{\lambda^2} q_2 = 0,$$

$$\text{или} \quad G_0'' + \frac{2}{\lambda} G_0' G_1' + q_1 + \frac{1}{\lambda} G_0'' + \dots = 0. \quad (14.19)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при λ^0 и λ^{-1} , получаем

$$G_0'' + q_1 = 0, \quad (14.20)$$

$$G_0' + 2G_0' G_1' = 0. \quad (14.21)$$

Из уравнения (14.20) следует, что

$$G_0' = \begin{cases} \pm i \sqrt{q_1}, & \text{если } q_1 > 0, \\ \pm \sqrt{-q_1}, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases} \quad (14.22)$$

При этом

$$G_0 = \begin{cases} \pm i \int \sqrt{q_1} dx, & \text{если } q_1 > 0, \\ \pm \int \sqrt{-q_1} dx, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases} \quad (14.23)$$

Для того чтобы решить уравнение (14.21), разделим обе его части на $2G'_0$. В результате получим

$$\frac{1}{2} \frac{G''_0}{G'_0} + G'_1 = 0,$$

что после интегрирования дает

$$G_1 + \frac{1}{2} \ln G'_0 = 0.$$

Из дальнейшего будет ясно, что постоянную интегрирования в последнем соотношении можно опустить. Переписывая это соотношение в виде

$$G_1 = -\ln \sqrt{G'_0} \quad (14.24)$$

и подставляя (14.23) и (14.24) в разложение (14.18), имеем

$$G = \pm i \int \sqrt{q_1} dx - \frac{1}{\lambda} [\ln \sqrt{\pm i} + \ln \sqrt[4]{q_1}] + \dots \quad \text{при } q_1 > 0 \quad (14.25)$$

или

$$G = \pm \int \sqrt{-q_1} dx - \frac{1}{\lambda} [\ln \sqrt{\pm 1} + \ln \sqrt[4]{-q_1}] + \dots \quad \text{при } q_1 < 0. \quad (14.26)$$

Подстановка выражения (14.25) в формулу (14.16) дает

$$y = \exp \left\{ \pm i \lambda \int \sqrt{q_1} dx - [\ln \sqrt{\pm i} + \ln \sqrt[4]{q_1}] + \dots \right\},$$

что с учетом соотношения $\exp(-\ln z) = z^{-1}$ может быть переписано в виде

$$y \approx \frac{\exp \left[\pm i \lambda \int \sqrt{q_1} dx \right]}{\sqrt{\pm i} \sqrt[4]{q_1}}. \quad (14.27)$$

Формула (14.27) доставляет нам приближенные выражения для двух линейно независимых решений уравнения (14.10). Выражая экспоненты через тригонометрические функции, общее решение уравнения (14.10) можно приближенно записать в форме

$$y \approx \frac{c_1 \cos \left[\lambda \int \sqrt{q_1} dx \right] + c_2 \sin \left[\lambda \int \sqrt{q_1} dx \right]}{\sqrt[4]{q_1}}, \quad (14.28)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

В случае $q_1 < 0$ подстановка выражения (14.26) в формулу (14.16) и использование основного логарифмического тождества

позволяет приближенно записать общее решение уравнения (14.10) в виде

$$y \approx \frac{c_1 \exp \left[\lambda \int \sqrt{-q_1} dx \right] + c_2 \exp \left[-\lambda \int \sqrt{-q_1} dx \right]}{\sqrt[4]{-q_1}}. \quad (14.29)$$

Соотношения (14.28) и (14.29) называются обычно *ВКБ-приближениями* в честь Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна.

Отметим, что соотношения (14.28) и (14.29) становятся непригодными в окрестностях нулей функции $q_1(x)$ (и в самих этих точках). Эти нули называются обычно *точками поворота* или *точками перехода*. Задачи для уравнений с точками поворота рассматриваются в § 14.5 и 14.6.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$y'' + \lambda^2 (1+x)^2 y = 0. \quad (14.30)$$

В этом уравнении $q_1 = (1+x)^2 > 0$, так что соотношение (14.28) дает

$$y \approx \frac{c_1 \cos \left[\lambda \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) \right] + c_2 \sin \left[\lambda \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) \right]}{\sqrt{1+x}}. \quad (14.31)$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$y'' - \lambda^2 (1+x)^2 y = 0. \quad (14.32)$$

При этом $q_1 = -(1+x)^2 < 0$, и приближенное решение, согласно формуле (14.28), имеет вид

$$y \approx \frac{c_1 \exp \left[\lambda \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) \right] + c_2 \exp \left[-\lambda \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) \right]}{\sqrt{1+x}}. \quad (14.33)$$

14.2. Преобразование Лиувилля—Грина

В этом параграфе мы рассмотрим другой способ построения приближенного решения уравнений с большим параметром. Этот способ включает в себя использование так называемого преобразования Лиувилля—Грина. При этом производится замена как зависимых, так и независимых переменных по формулам

$$z = \varphi(x), \quad v(z) = \psi(x) y(x), \quad (14.34)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ выбираются таким образом, чтобы уравнение (14.10) перешло в новое уравнение, в котором наиболее существенные при $\lambda \rightarrow \infty$ члены имели постоянные коэффициенты. Из формул (14.34) следует, что

$$y = \frac{v(z)}{\psi(x)}, \quad (14.35)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi'}{\psi^2} v + \frac{1}{\psi} \frac{dv}{dx} = -\frac{\psi'}{\psi^2} v + \frac{\varphi'}{\psi} \frac{dv}{dz}, \quad (14.36)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'}{\psi^2} \right) v - \frac{\psi'}{\psi^2} \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \frac{\varphi'}{\psi} \frac{d^2 v}{dz^2} \frac{dz}{dx} = \\ &= \frac{\varphi'^2}{\psi} \frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{\varphi''}{\psi} - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi^3} \right) \frac{dv}{dz} - \left(\frac{\psi''}{\psi^2} - \frac{2\psi'^2}{\psi^3} \right) v.\end{aligned}\quad (14.37)$$

Подставляя выражения для y и y'' в уравнение (14.10), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'^2}{\psi} \frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{\varphi''}{\psi} - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi^3} \right) \frac{dv}{dz} - \left(\frac{\psi''}{\psi^2} - \frac{2\psi'^2}{\psi^3} \right) v + \\ + (\lambda^2 q_1 + q_2) \frac{v}{\psi} = 0,\end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\varphi'^2} \left(\psi'' - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi} \right) \frac{dv}{dz} + \left[\frac{\lambda^2 q_1}{\varphi'^2} + \frac{q_2}{\varphi'^2} - \frac{\psi''}{\psi\varphi'^2} + \frac{2\psi'^2}{\psi^2\varphi'^2} \right] v = 0.\quad (14.38)$$

Как указывалось выше, выбор функций φ и ψ обусловлен требованием, чтобы главная часть преобразованного уравнения (14.38) имела постоянные коэффициенты. С этой целью прежде всего обратим в нуль коэффициент при первой производной dv/dz , полагая

$$\psi'' - \frac{2\varphi'\psi'}{\psi} = 0.\quad (14.39)$$

Уравнение (14.39) можно решить с помощью разделения переменных. В результате получим

$$\frac{1}{2} \ln \varphi' = \ln \psi,$$

или

$$\psi = \sqrt{\varphi'}.\quad (14.40)$$

При этом уравнение (14.38) принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{\lambda^2 q_1}{\varphi'^2} + \delta \right) v = 0,\quad (14.41)$$

где

$$\delta = \frac{q_2}{\varphi'^2} - \frac{\psi''}{\psi\varphi'^2} + \frac{2\psi'^2}{\psi^2\varphi'^2}.\quad (14.42)$$

Уравнение (14.41) имеет два переменных коэффициента, а именно q_1/φ'^2 и δ . Поскольку на функции φ и ψ наложено только одно условие, у нас есть возможность связать их еще одним соотношением. Мы используем это второе условие, чтобы сделать постоянным коэффициент $\lambda^2 q_1/\varphi'^2$ при главном члене в уравнении (14.41). Не теряя общности, постоянную в соотношении $\lambda^2 q_1 \varphi'^2 = \text{const}$ можно выбрать равной 1 при $q_1 > 0$ или равной -1 при $q_1 < 0$. Таким образом,

$$\varphi'^2 = \begin{cases} \lambda^2 q_1, & \text{если } q_1 > 0, \\ -\lambda^2 q_1, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases}$$

При этом

$$z = \varphi = \begin{cases} \pm \lambda \int \sqrt{q_1} dx, & \text{если } q_1 > 0, \\ \pm \lambda \int \sqrt{-q_1} dx, & \text{если } q_1 < 0, \end{cases} \quad (14.43)$$

а из уравнения (14.40) следует, что

$$\psi = \begin{cases} \lambda^{1/2} \sqrt[4]{q_1}, & \text{если } q_1 > 0, \\ \lambda^{1/2} \sqrt[4]{-q_1}, & \text{если } q_1 < 0. \end{cases} \quad (14.44)$$

После сделанного выбора функции φ уравнение (14.41) принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \pm v = -\delta v, \quad (14.45)$$

где знаки «плюс» и «минус» относятся соответственно к случаям положительной или отрицательной функции q_1 .

В первом приближении можно пренебречь малым членом $-\delta v$ в правой части уравнения (14.45). В результате имеем уравнение вида

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \pm v \approx 0,$$

общее решение которого можно представить как

$$v = c_1 \cos z + c_2 \sin z \quad \text{при } q_1 > 0, \quad (14.46)$$

$$v = c_1 \exp z + c_2 \exp (-z) \quad \text{при } q_1 < 0. \quad (14.47)$$

Подставляя теперь выражения для z , ψ и v в формулу (14.35), получаем в первом приближении соотношение (14.28) в случае, когда $q_1 > 0$, и соотношение (14.29) при $q_1 < 0$.

14.3. Задачи на собственные значения

В этом параграфе мы используем ВКБ-приближение, чтобы найти собственные числа и собственные функции некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В качестве первого примера рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения

$$y'' + \lambda^2 q_1(x) y = 0 \quad (14.48)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (14.49)$$

при больших значениях параметра λ . Предполагается также, что функция q_1 положительна на отрезке $[0, 1]$. Поскольку $q_1 > 0$, общее решение уравнения (14.48) в первом приближении может быть представлено формулой (14.28). Кроме того, мы должны удовлетворить граничным условиям (14.49). Для упрощения вычис-

лений выберем нижние пределы интегрирования в формуле (14.28) равными нулю. Тогда формула (14.28) переписывается в виде

$$y \approx \frac{c_1 \cos \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] + c_2 \sin \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]}{\sqrt[4]{q_1(x)}}, \quad (14.50)$$

где τ — переменная интегрирования. Подставляя выражение (14.50) в граничное условие $y(0) = 0$, имеем

$$0 \approx \frac{c_1}{\sqrt[4]{q_1(0)}}, \quad \text{или} \quad c_1 = 0,$$

откуда
$$y \approx c_2 q_1^{-1/4} \sin \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right].$$

Подстановка этого выражения в граничное условие $y(1) = 0$ дает

$$0 = c_2 [q_1(1)]^{-1/4} \sin \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right].$$

Для существования нетривиального решения задачи необходимо, чтобы постоянная c_2 была отлична от нуля. Поэтому

$$\sin \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] = 0,$$

или
$$\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.51)$$

Отметим, что случай $n = 0$ приводит к тривиальному решению задачи (14.48), (14.49); по этой причине значение $n = 0$ не включено в формулу (14.51)¹. Таким образом, в первом приближении собственные числа определяются формулой

$$\lambda_n = n\pi \left[\int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]^{-1}, \quad (14.51a)$$

а соответствующие им собственные функции — формулой

$$y_n = q_1^{-1/4} \sin \left[\lambda_n \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]. \quad (14.52)$$

¹ В формулу (14.51) не включены также и отрицательные значения $n : n = -1, -2, -3, \dots$. Случай отрицательных n легко сводится к описываемому случаю ввиду нечетности функции $\sin x$. — *Прим. перев.*

Таблица 14.1

Сравнение приближенных значений собственных чисел, подсчитанных по методу возмущений, с точными численными значениями

Порядковый номер собственного числа	1	2	3	4	5	6	7
Метод возмущений	2.0944	4.1888	6.2832	8.3776	10.4720	12.5664	14.6608
Точное значение	2.0604	4.1686	6.2691	8.3668	10.4632	12.5590	14.6545
Ошибка (%)	1.65	0.49	0.23	0.13	0.08	0.06	0.04

Рассмотрим численный пример. Пусть $q_1(x) = (1+x)^3$, тогда формула (14.51a) примет вид

$$\lambda_n = n\pi \left[\int_0^1 (1+\tau) d\tau \right]^{-1} = \frac{2}{3} n\pi.$$

В табл. 14.1 приведены для сравнения собственные числа, подсчитанные по предыдущей приближенной формуле, и собственные числа, полученные с помощью численного интегрирования уравнения (14.48) и применения итерационного метода Ньютона—Рафсона¹. Совпадение оказывается очень хорошим даже в самом неблагоприятном случае, т. е. для наименьшего собственного числа $\lambda_1 \approx 2,0604$. Как и следует ожидать, точность решения, полученного методом возмущений, увеличивается с ростом номера собственных чисел.

В качестве второго примера рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения (14.48) при краевых условиях

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (14.53)$$

Для того чтобы иметь возможность подставить приближенное решение в первое из условий (14.53), продифференцируем выражение (14.50) по x . В результате получим

$$y' \approx -\lambda \sqrt{q_1} \left\{ c_1 \sin \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] - c_2 \cos \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] \right\} + O(1). \quad (14.54)$$

Отметим, что слагаемые, появляющиеся при дифференцировании множителя $q_1^{-1/4}$, суть величины $O(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Они малы

¹ Итерационный метод Ньютона—Рафсона используется при этом для решения трансцендентного уравнения, получающегося в результате выполнения исходных граничных условий. — Прим. перев.

Таблица 14.2

Сравнение приближенных значений собственных чисел, подсчитанных по методу возмущений, с точными численными значениями

Порядковый номер собственного числа	1	2	3	4	5	6	7
Метод возмущений	1.0472	3.1416	5.2360	7.3304	9.4248	11.5192	13.6136
Точное значение	1.1879	3.2089	5.2793	7.3621	9.4497	11.5397	13.6310
Ошибка (%)	11.84	2.10	0.82	0.43	0.26	0.18	0.13

по сравнению со слагаемыми, которые возникают при дифференцировании тригонометрических функций. Последние растут пропорционально λ при $\lambda \rightarrow \infty$. Воспользовавшись теперь условием $y'(0) = 0$, имеем $c_2 = 0$, так что выражение (14.50) принимает вид

$$y \approx c_1 q_1^{-1/4} \cos \left[\lambda \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right].$$

Подставляя последнее выражение в граничное условие $y(1) = 0$, приходим к уравнению

$$\cos \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right] = 0,$$

решения которого имеют вид

$$\lambda \int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, в первом приближении собственные числа задачи (14.48), (14.53) определяются формулой

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left[\int_0^1 \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]^{-1}, \quad (14.55)$$

а соответствующие им собственные функции — формулой

$$y_n = q_1^{-1/4} \cos \left[\lambda_n \int_0^x \sqrt{q_1(\tau)} d\tau \right]. \quad (14.56)$$

Если при этом вновь положить $q_1 = (1+x)^2$, то

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left[\int_0^1 (1+\tau) d\tau \right]^{-1} = \frac{2}{3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

В табл. 14.2 приведены для сравнения приближенные значения собственных чисел, подсчитанные по методу возмущений, и значения тех же собственных чисел, найденные с помощью численных методов. Как и следует ожидать, точность приближенного решения быстро возрастает с ростом номера собственных чисел. При этом уже для третьего собственного числа относительная погрешность не превышает одного процента.

14.4. Уравнения с медленно меняющимися коэффициентами

В этом параграфе рассмотрим уравнения вида

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + q_1(\tau) y = 0, \quad (14.57)$$

где $\tau = \varepsilon t$ и ε — малый безразмерный параметр. Таким образом, τ представляет собой по отношению к t «медленную» переменную. Переходя от t к τ , имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2},$$

в результате чего уравнение (14.57) принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + q_1(\tau) y = 0. \quad (14.58)$$

Полагая $\varepsilon = \lambda^{-1}$, перепишем уравнение (14.58) в виде

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \lambda^2 q_1(\tau) y = 0. \quad (14.59)$$

Уравнение (14.59) совпадает с уравнением (14.10), поэтому к нему применимо ВКБ-приближение, рассматривавшееся в § 14.1. Следовательно, учитывая соотношение

$$\lambda \int \sqrt{q_1} d\tau = \varepsilon \lambda \int \sqrt{q_1} dt = \int \sqrt{q_1} dt,$$

можно записать выражения, аналогичные (14.28) и (14.29), через исходную переменную t :

$$y \approx q_1^{-1/4} \left\{ c_1 \cos \left[\int \sqrt{q_1} dt \right] + c_2 \sin \left[\int \sqrt{q_1} dt \right] \right\}, \quad q_1 > 0, \quad (14.60)$$

$$y \approx (-q_1)^{-1/4} \left[c_1 e^{\int \sqrt{-q_1} dt} + c_2 e^{-\int \sqrt{-q_1} dt} \right], \quad q_1 < 0. \quad (14.61)$$

14.5. Уравнения с точкой поворота

Как указывалось в § 14.1, ВКБ-приближения (14.28) и (14.29) становятся непригодными в окрестностях нулей функции $q_1(x)$. Эти точки называются *точками поворота*, или *перехода*. Пусть,

например, $q_1 = 1 - x^3$. В этом случае формулы (14.28) и (14.29) можно представить в виде

$$y \approx \frac{c_1 \cos \left[\lambda \int_x^1 \sqrt{1 - \tau^3} d\tau \right] + c_2 \sin \left[\lambda \int_x^1 \sqrt{1 - \tau^3} d\tau \right]}{\sqrt[4]{1 - x^3}}, \quad \text{если } x < 1, \quad (14.62)$$

$$\text{и} \quad y \approx \frac{a_1 \exp \left[\lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} d\tau \right] + a_2 \exp \left[-\lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} d\tau \right]}{\sqrt[4]{x^3 - 1}}, \quad \text{если } x > 1, \quad (14.63)$$

где a_1 , a_2 , c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а верхний и нижний пределы интегрирования в первой и второй формулах соответственно выбраны равными 1, с тем чтобы входящие в них интегралы оказались положительными. Отметим, что при рассмотрении уравнений с точками поворота один из пределов интегрирования в формулах ВКБ-приближения удобнее всего принимать равным координате точки поворота. Можно считать, что формулы (14.62) и (14.63) дают два различных представления одной и той же функции $y(x)$, причем одно из этих представлений пригодно при $x < 1$, а другое при $x > 1$. При этом ясно, что постоянные a_n и c_n должны быть линейно связаны между собой, поскольку наше дифференциальное уравнение имеет второй порядок и его решение определяются лишь двумя произвольными постоянными. Один из рассматриваемых ниже методов нахождения связи между этими постоянными предусматривает построение разложения, пригодного в окрестности точки $x = 1$ (или так называемого внутреннего разложения), и сращивание этого разложения соответственно с разложениями (14.62) и (14.63). В следующем параграфе обсуждается также другой метод, позволяющий связать константы в (14.62) и (14.63); он основан на использовании преобразования Лангера.

Для того чтобы построить разложение, пригодное в окрестности точки $x = 1$, введем «растягивающее» преобразование независимой переменной x , с тем чтобы координаты точек, близких к $x = 1$, оказались величинами $O(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. С этой целью положим

$$\xi = (x - 1) \lambda^\nu, \quad \text{так что } x = 1 + \lambda^{-\nu} \xi, \quad (14.64)$$

причем показатель ν , точное значение которого будет определено ниже, считается положительным, чтобы преобразование (14.64) действительно было растягивающим. Производные по исходной переменной x преобразуются следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \lambda^\nu \frac{dy}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^{2\nu} \frac{d^2y}{d\xi^2}.$$

При этом уравнение (14.10) в случае $q_1 = 1 - x^3$ и $q_2 = 0$ принимает вид

$$\lambda^{2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \lambda^2 [1 - (1 + \lambda^{-\nu} \xi)^3] y = 0,$$

или

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\lambda^{2-3\nu} \xi \left(1 + \lambda^{-\nu} \xi + \frac{1}{3} \lambda^{-2\nu} \xi^2 \right) y = 0. \quad (14.65)$$

Если $\lambda \rightarrow \infty$, то второе и третье слагаемые в скобках в уравнении (14.65), поскольку $\nu > 0$, будут стремиться к нулю, и уравнение (14.65) примет вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\lambda^{2-3\nu} \xi y = 0. \quad (14.66)$$

Уравнение (14.66) имеет различную предельную форму при $\lambda \rightarrow \infty$ в зависимости от величины показателя ν . В случае $\nu > 2/3$ коэффициент $\lambda^{2-3\nu}$ стремится к нулю, и уравнение (14.66) переходит в уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = 0. \quad (14.67)$$

В случае $\nu < 2/3$ коэффициент $\lambda^{2-3\nu}$ стремится к бесконечности, и уравнение (14.66) имеет предельную форму

$$\xi y = 0. \quad (14.68)$$

Наконец, при $\nu = 2/3$ коэффициент $\lambda^{2-3\nu}$ равен единице, и уравнение (14.66) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - 3\xi y = 0. \quad (14.69)$$

Предельная форма (14.69) является «наименее вырожденной» из трех; она включает в себя уравнения (14.67) и (14.68) в качестве частных случаев. Кроме того, первые два случая соответствуют бесконечным наборам значений ν , в то время как третий случай определяется вполне определенным значением показателя ν . Следовательно, наиболее подходящей предельной формой является уравнение (14.69), соответствующее значению $\nu = 2/3$.

С точностью до коэффициента 3 уравнение (14.69) представляет собой так называемое *уравнение Эйри*, решения которого хорошо известны. Для того чтобы использовать эти решения, представляется удобным видоизменить преобразование (14.64), с тем чтобы результирующее уравнение не содержало множителя 3. Таким образом, вместо замены переменных (14.64) используем преобразование

$$z = 3^{1/3} (x - 1) \lambda^{2/3} \quad \text{или} \quad x = 1 + 3^{-1/3} \lambda^{-2/3} z, \quad (14.70)$$

в результате чего вместо уравнения (14.69) придем к уравнению Эйри в стандартной форме:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - zy = 0. \quad (14.71)$$

Общее решение уравнения (14.71) обычно выражают в виде

$$y^{(3)} = b_1 Ai(z) + b_2 Bi(z), \quad (14.72)$$

где b_1 и b_2 — произвольные постоянные, а $Ai(z)$ и $Bi(z)$ представляют собой функции Эйри первого и второго рода соответственно.

Теперь необходимо провести сращивание решения (14.72) с ВКБ-решениями (14.62) и (14.63). Для этого потребуются асимптотические разложения функций $Ai(z)$ и $Bi(z)$ при больших положительных z (т. е. при $x > 1$), чтобы сратить (14.72) с решением (14.63), и при больших по абсолютной величине отрицательных z (т. е. при $x < 1$), чтобы сратить (14.72) с решением (14.62).

Если мы будем искать указанные асимптотические разложения, исходя из дифференциального уравнения (14.71), то обнаружим, что первые члены этих разложений экспоненциально растут или затухают в случае положительных z и совершают синусоидальные колебания в случае отрицательных z . Более точно, используя ВКБ-приближение (14.28) и (14.29) при $q_1 = -z$, имеем

$$y \sim z^{-1/4} \left[\tilde{c}_1 \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + \tilde{c}_2 \sin\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \right] \quad \text{при } z \rightarrow -\infty$$

и

$$y \sim z^{-1/4} \left[\tilde{a}_1 e^{(2/3) z^{3/2}} + \tilde{a}_2 e^{-(2/3) z^{3/2}} \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Однако при этом нам по-прежнему не известны соотношения между постоянными \tilde{a}_n , \tilde{c}_n и a_n , c_n , с одной стороны, и \tilde{a}_n , \tilde{c}_n и b_n — с другой. Для того чтобы обойти это затруднение, обычно представляют решения уравнения (14.71) в интегральной форме и затем определяют главные члены асимптотических разложений полученных интегралов, подобно тому как мы делали это в примере 3 § 13.5.

Интегральные представления построенных выше двух линейно независимых решений уравнения Эйри можно получить с помощью модифицированного преобразования Лапласа. Функции Эйри первого и второго рода обычно определяют как

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3} t^3 + zt\right) dt, \quad (14.73)$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{3} t^3 + zt\right) + \sin\left(\frac{1}{3} t^3 + zt\right) \right] dt. \quad (14.74)$$

Главный член асимптотического разложения функции $Ai(z)$ при $z \rightarrow \infty$ найден в § 3.5 с помощью метода перевала. Так, из формулы (3.239) следует, что

$$Ai(z) \sim \frac{\exp\left[(-2/3) z^{3/2}\right]}{2 \sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (14.75)$$

Используя метод стационарной фазы, можно получить главный член асимптотики $Ai(z)$ при $z \rightarrow -\infty$. Из упражнения 3.21 следует, что

$$Ai(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (14.76)$$

Главные члены асимптотических разложений интегралов в (14.74) при $z \rightarrow \infty$ можно найти с помощью метода Лапласа и интегрирования по частям. Таким образом, мы имеем (см. упражнение 3.31)

$$Bi(z) \sim \frac{\exp \{(2/3) z^{3/2}\}}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (14.77)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях z асимптотика интегралов, входящих в (14.74), определяется с помощью метода Лапласа и метода стационарной фазы. В этом случае имеем (см. упражнение 3.31)

$$Bi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (14.78)$$

Асимптотические представления (14.75)–(14.78) дают нам искомые соотношения между \tilde{c}_n , \tilde{a}_n и b_n . Устремляя теперь в решении (14.72) z к бесконечности и используя представления (14.75) и (14.77), находим

$$y \sim \frac{b_1 \exp \{-(2/3) z^{3/2}\}}{2 \sqrt{\pi} z^{1/4}} + \frac{b_2 \exp \{(2/3) z^{3/2}\}}{\sqrt{\pi} z^{1/4}}. \quad (14.79)$$

Точно так же, устремляя в (14.72) z к $-\infty$ и используя представления (14.76) и (14.78), получаем

$$y \sim \frac{b_1}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{b_2}{\sqrt{\pi} (-z)^{1/4}} \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (14.80)$$

Для того чтобы найти соотношения между постоянными a_n и c_n в ВКБ-приближениях (14.62) и (14.63), необходимо срастить эти разложения с решением (14.72), справедливым в окрестности точки поворота. Чтобы срастить разложения (14.62) и (14.72), выразим в интегралах, входящих в (14.62), переменную x через z и устремим λ к бесконечности при фиксированном z . Таким образом, имеем

$$\lambda \int_x^1 \sqrt{1 - \tau^3} d\tau = \lambda \int_{1+\delta-1/3\lambda}^1 \sqrt{1 - \tau^3} d\tau,$$

откуда, полагая $\tau = 1 + 3^{-1/3}\lambda^{-2/3}t$, находим

$$\begin{aligned} \lambda \int_x^1 \sqrt{1 - \tau^3} d\tau &= \lambda \int_z^0 [-3^{-2/3}\lambda^{-2/3}t - 3^{1/3}\lambda^{-4/3}t^2 + \dots]^{1/2} 3^{-1/3}\lambda^{-2/3} dt \approx \\ &\approx \int_z^0 (-t)^{1/2} dt = \frac{2}{3} (-z)^{3/2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ z \text{ фикс.}}} y^{(1)} = \frac{c_1 \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right] + c_2 \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right]}{3^{1/6}\lambda^{-1/6} (-z)^{1/4}}. \quad (14.81)$$

Для того чтобы использовать условие сращивания, необходимо выразить решение $y^{(3)}$ через x при $x < 1$ и совершить предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном x . Эта процедура эквивалентна вычислению асимптотики $y^{(3)}$ при $z \rightarrow -\infty$; в результате имеем представление (14.80). Приравняв разложения (14.80) и (14.81) в соответствии с принципом сращивания, получаем

$$\begin{aligned} \pi^{1/2}\lambda^{1/6}3^{-1/6} \left\{ c_1 \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right] + c_2 \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right] \right\} = \\ = b_1 \sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] + b_2 \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Далее, используя тригонометрические формулы для синуса и косинуса суммы двух аргументов и приравнявая коэффициенты при $\cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right]$ и $\sin \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} \right]$ в обеих частях полученного равенства, находим

$$\begin{aligned} c_1 &= 3^{1/6}\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6} \left[b_1 \sin \frac{\pi}{4} + b_2 \cos \frac{\pi}{4} \right], \\ c_2 &= 3^{1/6}\pi^{-1/2}\lambda^{-1/6} \left[b_1 \cos \frac{\pi}{4} - b_2 \sin \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (14.82)$$

Перейдем теперь к сращиванию асимптотических представлений (14.63) и (14.72). Выразим переменную x в формуле (14.63) через z и совершим предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном положительном z , что соответствует $x > 1$. С этой целью запишем

$$\lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} d\tau = \lambda^{1+3^{-1/3}\lambda^{-2/3}z} \int_1^{\dots} \sqrt{\tau^3 - 1} d\tau$$

и, полагая $\tau = 1 + 3^{-1/3}\lambda^{-2/3}t$, преобразуем этот интеграл к виду

$$\lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} d\tau = \lambda \int_0^z [3^{2/3}\lambda^{-2/3}t + 3^{1/3}\lambda^{-4/3}t^2 + \dots]^{1/2} 3^{-1/3}\lambda^{-2/3} dt \approx \\ \approx \int_0^z t^{1/2} dt = \frac{2}{3} z^{3/2}.$$

Тогда из формулы (14.63) следует, что

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ z \text{ фикс.}}} y^{(2)} = 3^{-1/6}\lambda^{1/6}z^{-1/4} [a_1 \exp[(2/3)z^{3/2}] + a_2 \exp[(-2/3)z^{3/2}]. \quad (14.83)$$

Далее, необходимо выразить в решении (14.72) переменную z через x и совершить предельный переход $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном x , большем 1. Это эквивалентно нахождению асимптотики функции $y^{(3)}$ при $z \rightarrow \infty$; результат дается формулой (14.79). Приравнявая выражения (14.79) и (14.83) в соответствии с принципом сращения, получаем соотношение вида

$$3^{-1/6}\lambda^{1/6}\pi^{1/2} \left[a_1 \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + a_2 \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \right] = \\ = \frac{b_1}{2} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + b_2 \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right),$$

из которого после приравнивания коэффициентов при каждой из экспонент в левой и правой частях находим искомые связи между постоянными a_n и b_n :

$$a_1 = 3^{1/6}\lambda^{-1/6}\pi^{-1/2}b_2, \quad a_2 = \frac{1}{2} 3^{1/6}\lambda^{-1/6}\pi^{-1/2}b_1. \quad (14.84)$$

Итак, решение нашей задачи дается тремя отдельными разложениями: разложением (14.62), пригодным при $x < 1$, разложением (14.63), пригодным при $x > 1$, и разложением (14.72), справедливым в окрестности точки $x = 1$. При этом мы срастили полученные разложения с помощью координатной асимптотики для интегральных представлений функций Эйри. Результатом сращения явились соотношения (14.82) и (14.84), которые связали коэффициенты a_n , b_n и c_n всех трех разложений. Подобно тому как это было проделано в гл. 12, можно получить и составное равномерно пригодное разложение. Однако используемая при этом процедура оказывается сравнительно громоздкой. Другой метод получения разложения, пригодного всюду, включая окрестность точки поворота, заключается в применении преобразования Лангера и приводит к единому представлению решения во всей области через функции Эйри. Этот метод рассматривается в следующем параграфе.

14.6. Преобразование Лангера

Суть преобразования Лангера состоит в том, чтобы заменить зависимые и независимые переменные по формулам (14.34) и подобрать функции φ и ψ таким образом, чтобы преобразованное уравнение, будучи возможно более простым по форме, в то же время имело решения, поведение которых совпадало бы в основных чертах с поведением решений исходного уравнения. Например, если во всех точках интересующего нас интервала коэффициент $q_1 > 0$, то решения исходного уравнения (14.10) имеют колебательный характер, и поэтому функции φ и ψ следует выбрать так, чтобы главная часть преобразованного уравнения совпадала с уравнением

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + v = 0, \quad (14.85a)$$

которое представляет собой простейшее уравнение, обладающее осциллирующими решениями. Если же во всех точках рассматриваемого промежутка для уравнения (14.10) $q_1 < 0$, то с ростом x одно из решений этого уравнения будет экспоненциально расти, а другое — экспоненциально убывать. Поэтому функции φ и ψ в этом случае следует выбрать так, чтобы преобразованное уравнение с точностью до малых слагаемых совпадало с уравнением

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - v = 0, \quad (14.85b)$$

которое является наиболее простым уравнением, обладающим экспоненциально растущим и экспоненциально затухающим решениями. Наконец, если функция q_1 в интересующем нас интервале один раз меняет знак, как, например, функция $q_1 = 1 - x^2$ в рассмотренном нами в предыдущем параграфе случае, то решения исходного уравнения (14.10) будут иметь колебательный характер при $x < 1$ и экспоненциально расти или затухать при $x > 1$. Поэтому функции φ и ψ следует выбрать таким образом, чтобы преобразованное уравнение оказалось близким к такому уравнению, решения которого в заданной точке меняют свое поведение, переходя от осцилляций к экспоненциальному росту или затуханию¹. Простейшим уравнением с такими свойствами является уравнение Эйри

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - zv = 0, \quad (14.86)$$

рассматривавшееся нами в предыдущем параграфе. При $z > 0$ одно из решений уравнения (14.86) растет, другое убывает, в то время как при $z < 0$ оба решения имеют колебательный характер.

¹ При этом существенно, чтобы сохранялся порядок поведения коэффициента в точке перехода. В целом этот метод называют методом эталонных уравнений. — *Прим. ред.*

Приведенные рассуждения объясняют, почему ВКБ-приближение или преобразование Лиувилля—Грина становятся непригодными в окрестности точки поворота. В § 14.1 и 14.2 мы стремились представить решения уравнения (14.10) через элементарные функции — тригонометрические или показательную. Поскольку ни одна из указанных элементарных функций не может описать поведение решений уравнений с точкой поворота, справедливость ВКБ-приближений в окрестности этой точки должна нарушаться. Таким образом, разложение, равномерно пригодное для любых значений аргумента x , должно выражаться через неэлементарные функции, поведение которых качественно совпадает с поведением решений исходного уравнения.

С другой стороны, нарушение пригодности ВКБ-приближения в окрестности точки поворота можно объяснить тем, что преобразование (14.34) имеет особенность в этой точке. Согласно формулам преобразования Лиувилля—Грина, $\psi \sim \sqrt[4]{q_1}$. Поскольку функция q_1 обращается в нуль в точке поворота, то и функция ψ в этой точке также должна обращаться в нуль. Поэтому представление (14.35) становится непригодным в окрестности точки поворота, так как оно содержит деление на нуль. Следовательно, для того чтобы получить равномерно пригодное разложение, мы должны найти преобразование, регулярное всюду в интересующем нас интервале. В частности, функция ψ в этом интервале должна быть регулярной и не иметь нулей. Кроме того, из формулы (14.40) следует, что аналогичными свойствами должна обладать и функция $\varphi'(z)$. Исходя из этого, положим

$$\lambda^2 q_1 = \varphi'^2(z), \quad (14.87)$$

так что (14.41) принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \zeta(z) v = -\delta v, \quad (14.88)$$

и постараемся подобрать по возможности наиболее простую по форме функцию $\zeta(z)$, которая вместе с тем привела бы к преобразованию, не содержащему особенностей. Для того чтобы функция φ' была регулярной и не имела нулей в рассматриваемом интервале, функция $\zeta(z)$ должна иметь особенности и нули того же порядка, что и функция q_1 .

Пусть, в частности, функция $q_1(x)$ регулярна и имеет единственный нуль первого порядка (простая точка поворота), как, например, функция $1 - x^3$. Тогда функцию $\zeta(z)$ надо тоже выбрать так, чтобы она была регулярна и имела один простой нуль. Простейшей функцией, удовлетворяющей этим требованиям, является функция $\zeta(z) = z$. Если $q_1(x)$ регулярна и имеет единственный двойной нуль в интересующем нас интервале (т. е. в этом интервале существует точка поворота второго порядка), то и функция $\zeta(z)$ должна быть регулярной и иметь один двойной

нуль. Простейшей функцией этого типа является функция $\zeta(z) = z^2$. В случае точки поворота n -го порядка, когда функция $q_1(x)$ регулярна и имеет единственный нуль порядка n , в качестве функции $\zeta(z)$ следует выбрать функцию z^n . Если, наконец, $q_1(x)$ имеет два нуля в точках $x = a$ и $x = b$ ($b > a$) порядка m и n соответственно, то полагают $\zeta(z) = z^m(1 - z)^n$.

Существует еще одна причина, по которой происходит нарушение точности ВКБ-приближения и преобразования Лиувилля—Грина. Слагаемое δv в уравнении (14.45) мало по сравнению с другими членами уравнения только вдали от точки поворота. В самой же этой точке функция $\delta(z)$ имеет особенность и, следовательно,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \pm v = 0$$

в противоречии с нашим исходным предположением не является уже главной частью преобразованного уравнения. Так, в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, $q_1 = 1 - x^3$, и в соответствии с (14.43) и (14.44),

$$\psi = O[\lambda^{1/2}(x-1)^{1/1}], \quad \psi' = O(\lambda^2(x-1)) \quad \text{при } x \rightarrow 1 \text{ и } \lambda \rightarrow \infty.$$

При этом из формулы (14.42) следует, что

$$\delta = O\left[\frac{1}{\lambda^2(x-1)^{3/2}}\right] \quad \text{при } x \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Следовательно, коэффициент δ будет мал по сравнению с единицей при $\lambda \rightarrow \infty$ только при x , далеких от 1, т. е. вдали от точки поворота. Таким образом, чтобы убедиться в равномерности получающегося в результате разложения, необходимо проверить, всегда ли отброшенные члены преобразованного уравнения будут малы по сравнению с оставшимися.

Остановимся подробнее на случае простой точки поворота, когда функция q_1 в рассматриваемом интервале имеет единственный простой нуль, а функция $\zeta(z)$ должна быть регулярной в этом интервале и иметь в соответствующей точке единственный простой нуль. Простейшими функциями этого типа являются функции $\zeta = \pm z$. Ниже мы используем функцию $\zeta = -z$, для того чтобы преобразованное уравнение имело форму стандартного уравнения Эйри (14.86). Иначе говоря, запишем соотношение (14.87) в виде

$$\varphi \varphi' = -\lambda^2 q_1, \quad (14.89)$$

поскольку, согласно первой из формул (14.34), $z = \varphi$. Извлекая квадратный корень из обеих частей (14.89), получаем уравнение

$$\varphi^{1/2} \varphi' = \pm \lambda \sqrt{-q_1(x)},$$

которое после деления переменных приводится к виду

$$\varphi^{1/2} d\varphi = \pm \lambda \sqrt{-q_1(x)} dx.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\frac{2}{3} \varphi^{3/2} = \pm \lambda \int^x \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau,$$

где буквой τ обозначена переменная интегрирования. В качестве нижнего предела интегрирования удобно выбрать координату точки поворота. Пусть это будет, например, точка $x = \mu$. Тогда можно записать окончательно

$$\frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} \varphi^{3/2} = \pm \lambda \int_{\mu}^x \sqrt{-q_1(\tau)} d\tau. \quad (14.90)$$

Из уравнения (14.89) следует, что

$$\varphi' = -\lambda^2 \varphi^{-1} q_1$$

и, следовательно, в соответствии с уравнением (14.10)

$$\psi = \lambda^{1/2} \varphi^{-1/4} (-q_1)^{1/4}. \quad (14.91)$$

Как уже отмечалось выше, общее решение уравнения (14.86) выражается через функции Эйри в виде

$$v(z) = \bar{c}_1 Ai(z) + \bar{c}_2 Bi(z). \quad (14.92)$$

Подстановка выражений (14.91) и (14.92) в формулу (14.35) дает

$$y \sim z^{1/4} (-q_1)^{-1/4} [c_1 Ai(z) + c_2 Bi(z)], \quad (14.93)$$

при этом множитель $\lambda^{-1/2}$ включается в постоянные c_1 и c_2 .

Проверим теперь регулярность преобразования (14.34) и порядок величины слагаемого δ , отброшенного в преобразованном уравнении (14.41). Поскольку предполагается, что μ — простая точка поворота, то $q_1 = O(x - \mu)$ при $x \rightarrow \mu$. При этом из соотношения (14.90) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \varphi^{3/2} &\rightarrow \pm \lambda \int_{\mu}^x [-q_1(\mu)(\tau - \mu) + \dots]^{1/2} d\tau \approx \\ &\approx \lambda \sqrt{-q_1(\mu)} \int_{\mu}^x (\tau - \mu)^{1/2} d\tau = \pm \frac{2}{3} \lambda \sqrt{-q_1(\mu)} (x - \mu)^{3/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi = O(\lambda^{2/3} (x - \mu))$$

$$\text{и } \varphi' = O(\lambda^{2/3}) \text{ при } x \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \infty.$$

Наконец,

$$\psi = \sqrt{\varphi} = O(\lambda^{1/3}) \text{ при } x \rightarrow \mu, \lambda \rightarrow \infty,$$

что и доказывает регулярность преобразования всюду, включая точку поворота. Подставляя полученные выше оценки в соотношение (14.42), находим, что $\delta = O(\lambda^{-4/3})$ равномерно относительно x . Это означает, что слагаемое δv будет мало по сравнению

с членами, оставленными в уравнении (14.86), при всех значениях x . Таким образом, единое асимптотическое представление (14.93), в котором z дается соотношением (14.90), оказывается справедливым всюду, включая точку поворота.

14.7. Задачи на собственные значения для уравнений с точкой поворота

В этом параграфе мы применим полученные выше результаты к двум задачам на собственные значения. Сначала мы рассмотрим задачу

$$y'' + \lambda^2 (1 - x^3) y = 0, \quad (14.94)$$

$$y(0) = 0, \quad y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (14.95)$$

которая является прототипом задач, встречающихся в квантовой механике. Здесь $q_1 = 1 - x^3$, так что соотношение (14.90) принимает вид

$$\frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} \varphi^{3/2} = \lambda \int_1^x \sqrt{\tau^3 - 1} \, d\tau. \quad (14.96)$$

В формуле (14.96) выбран положительный знак перед квадратным корнем, с тем чтобы z было положительно при $x > 1$. Поэтому при $x \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$, и решение (14.93) в соответствии с асимптотическими представлениями (14.75) и (14.77) будет вести себя как

$$y \sim \frac{(x^3 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2} c_1 e^{-(2/3) z^{3/2}} + c_2 e^{(2/3) z^{3/2}} \right] \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\exp \left[\frac{2}{3} z^{3/2} \right]$ стремится к бесконечности намного быстрее, чем стремится к нулю множитель $(x^3 - 1)^{-1/4}$ при $x \rightarrow \infty$, то из условия ограниченности решения (т. е. второго из условий (14.95)) следует, что $c_2 = 0$. Таким образом, соотношение (14.93) принимает вид

$$y \sim c_1 z^{1/4} (x^3 - 1)^{-1/4} Ai(z). \quad (14.97)$$

Подчиняя решение граничному условию $y(0) = 0$, имеем

$$c_1 [z(0)]^{1/4} Ai[z(0)] = 0,$$

откуда с учетом требования нетривиальности решения находим

$$Ai[z(0)] = 0. \quad (14.98)$$

Поскольку z является функцией λ , корни уравнения (14.98) дают нам искомые собственные значения. Из соотношения (14.96) следует, что

$$\frac{2}{3} [z(0)]^{3/2} = \lambda \int_1^0 \sqrt{\tau^3 - 1} \, d\tau = -i\lambda \int_0^1 \sqrt{1 - \tau^3} \, d\tau,$$

Таблица 14.3

Сравнение приближенных значений собственных чисел, подсчитанных по методу возмущений, с точными численными значениями

Порядковый номер собственного числа	1	2	3	4
Метод возмущений	2.892	6.535	10.27	14.00
Численное значение	2.807	6.540	10.27	14.00

откуда

$$z(0) = -\lambda^{2/3} \left[\frac{3}{2} \int_0^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau \right]^{2/3}. \quad (14.99)$$

Следовательно, $z(0) \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и в соответствии с асимптотическим представлением (14.76) мы получаем оценку

$$Ai[z(0)] \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} [-z(0)]^{1/4}} \sin \left\{ \frac{2}{3} [-z(0)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (14.100)$$

Подставляя (14.99) и (14.100) в уравнение (14.98), имеем

$$\sin \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau + \frac{\pi}{4} \right] = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$\lambda \int_0^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

или
$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \left[\int_0^1 \sqrt{1-\tau^3} d\tau \right]^{-1}. \quad (14.101)$$

Таким образом, собственные функции даются формулой (14.97), где z определяется соотношением (14.96), а собственные числа λ_n — формулой (14.101).

В табл. 14.3 приведены для сравнения собственные числа, подсчитанные по приближенной формуле (14.101), и собственные числа, полученные с помощью численного интегрирования уравнения (14.94) и использования итерационного метода Ньютона—Рафсона. Совпадение оказывается очень хорошим, даже в самом неблагоприятном случае, т. е. для наименьшего собственного числа $\lambda_1 \approx 2,807$. При этом относительная погрешность определения первого собственного числа составляет 3 %, второго — 0,08 %. Третье же собственное значение вычисляется по асимптотической формуле (14.101) с четырьмя верными знаками.

В качестве второго примера рассмотрим задачу

$$y'' + \lambda^2 (1 - x^2) y = 0, \quad (14.102)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (14.103)$$

возникающую при расчете теплообмена в плоском канале в случае полностью развитого ламинарного течения. При этом $q_1 = 1 - x^2$, так что уравнение (14.102) имеет две точки поворота: одну при $x = 1$, а другую при $x = -1$. Однако в промежутке интегрирования находится только одна точка поворота, а именно $x = 1$. Поскольку задача решается на конечном промежутке, удобнее выразить решение уравнения Эйри не через функции Эйри, а через функции Бесселя.

Выбирая функцию $\zeta(z)$ равной z , полагаем

$$\lambda^2 (1 - x^2) = \varphi'^2 \varphi, \quad (14.104)$$

так что преобразованное уравнение с отброшенными малыми слагаемыми принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + zv = 0. \quad (14.105)$$

Решение уравнения (14.104) запишем как

$$\frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} \varphi^{3/2} = -\lambda \int_1^x \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \lambda H. \quad (14.106)$$

В формуле (14.106) выбран знак минус перед квадратным корнем с тем, чтобы z было положительно при $x \in [0, 1]$. Общее решение уравнения (14.105) можно представить через функции Бесселя порядка $1/3$ (см. упражнение 14.3). В результате имеем

$$v = \sqrt{z} \left[\tilde{c}_1 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) + \tilde{c}_2 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right]. \quad (14.107)$$

Из уравнения (14.104) следует, что

$$\varphi' = \lambda \varphi^{-1/2} \sqrt{1 - x^2},$$

и поэтому в соответствии с (14.40)

$$\varphi = \lambda^{1/2} z^{-1/4} (1 - x^2)^{1/4}. \quad (14.108)$$

Подставляя теперь выражения (14.107) и (14.108) в формулу (14.35) и используя соотношение (14.106), получаем окончательно

$$y \sim H^{1/2} (1 - x^2)^{-1/4} [c_1 J_{-1/3}(\lambda H) + c_2 J_{1/3}(\lambda H)]. \quad (14.109)$$

Для того чтобы подчинить решение граничному условию $y(1) = 0$, необходимо вычислить предел выражения (14.109) при $x \rightarrow 1$. С этой целью заметим, что при $x \rightarrow 1$

$$H = \int_x^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau \rightarrow \sqrt{2} \int_x^1 (1 - \tau)^{1/2} d\tau = \frac{2}{3} \sqrt{2} (1 - x)^{3/2}.$$

Кроме того, из упражнения 13.20 следует, что

$$J_{-1/3} = O(H^{-1/3}), \quad J_{1/3} = O(H^{1/3}) \quad \text{при } H \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$J_{-1/3} = O(1-x)^{-1/2}, \quad J_{1/3} = O(1-x)^{1/2} \quad \text{при } x \rightarrow 1.$$

Таким образом,

$$y = O\{(1-x)^{3/4}(1-x)^{-1/4}[c_1(1-x)^{-1/2} + c_2(1-x)^{1/2}]\},$$

или $y = c_1 O(1) + c_2 O(1-x) \quad \text{при } x \rightarrow 1.$

Это означает, что мы можем удовлетворить граничному условию $y(1) = 0$ только при $c_1 = 0$, так что соотношение (14.109) принимает вид

$$y \sim c_2 H^{1/2} (1-x^2)^{-1/4} J_{1/3}(\lambda H). \quad (14.110)$$

Удовлетворяя второму граничному условию $y(0) = 0$, получаем, что собственные значения λ_n должны быть корнями уравнения

$$J_{1/3} \left[\lambda \int_0^1 \sqrt{1-\tau^2} d\tau \right] = 0,$$

или

$$J_{1/3} \left(\frac{\pi \lambda}{4} \right) = 0. \quad (14.111)$$

Поскольку λ велико, можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя при больших значениях аргумента

$$J_{1/3}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{5\pi}{12} \right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

(см. упражнение 13.20). При этом вместо уравнения (14.111) имеем

$$\cos \left(\frac{\pi \lambda}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\pi \lambda}{4} - \frac{5\pi}{12} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, собственные функции даются формулой (14.110), а собственные числа определяются соотношением

$$\lambda_n = 4 \left(n + \frac{11}{12} \right). \quad (14.112)$$

В табл. 14.4 приведены для сравнения собственные числа, подсчитанные по приближенной формуле (14.112), и собственные числа, полученные с помощью численного интегрирования исходного уравнения и использования итерационного метода Ньютона—Рафсона. Совпадение результатов оказывается очень хорошим, даже для наименьшего собственного числа, приблизительно равного 3.6723. Как и следует ожидать, точность приближенной формулы быстро растет с увеличением номера собственных чисел. Так, уже пятое приближенное собственное значение имеет пять верных значащих цифр.

Таблица 14.4

Сравнение приближенных значений собственных чисел,
подсчитанных по методу возмущений, с точными численными
значениями

Порядковый номер собственного числа	1	2	3	4	5	6
Метод возмущений	3.6667	7.6667	11.6667	15.6667	19.6667	23.6667
Численное значение	3.6723	7.6688	11.6679	15.6675	19.6673	23.6672
Ошибка (%)	0.152	0.027	0.010	0.005	0.003	0.002

Упражнения

14.1. Рассмотреть уравнение Бесселя порядка $1/2$

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

Ввести преобразование, исключающее первую производную, и получить уравнение

$$u'' + u = 0.$$

Показать также, что

$$J_{1/2}(x) = x^{-1/2} (c_1 \sin x + c_2 \cos x).$$

14.2. Рассмотреть общее дифференциальное уравнение Бесселя

$$x^2 \zeta'' + x \zeta' + (x^2 - \nu^2) \zeta = 0$$

для цилиндрических функций $\zeta_\nu(x)$. Положив $x = \gamma z^\beta$ и $\zeta_\nu = z^{\alpha-\beta} u(z)$, или

$$u = z^{\beta\nu-\alpha} \zeta_\nu(\gamma z^\beta),$$

далее показать, что функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (2\alpha - 2\beta\nu + 1) z \frac{du}{dz} + [\beta^2 \gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\nu\beta)] u = 0.$$

14.3. Рассмотреть уравнение Эйри

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + zu = 0.$$

Используя результаты предыдущего упражнения, выразить общее решение этого уравнения через функции Бесселя дробного индекса

$$u = \sqrt{z} \left[c_1 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) + c_2 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right].$$

Указание: Представить уравнение в виде

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z^3 u = 0.$$

Сравнить это уравнение с уравнением из упражнения 14.2, положив

$$\begin{aligned} 2\alpha - 2\nu\beta &= 1, & \beta^2 \gamma^2 &= 1, \\ 2\beta &= 3, & \alpha(\alpha - 2\nu\beta) &= 0. \end{aligned}$$

14.4. Используя результаты упражнения 14.2, показать, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + z^n u = 0$$

может быть представлено в виде

$$u = \sqrt{z} \left[c_1 J_{\nu} \left(\frac{2}{n+2} z^{(n+2)/2} \right) + c_2 J_{-\nu} \left(\frac{2}{n+2} z^{(n+2)/2} \right) \right],$$

где $\nu = (n+2)^{-1}$.

14.5. Рассмотреть задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 y'' + (x^2 + 2x + 2) y &= 0, & \varepsilon \ll 1, \\ y(0) &= 0, & y(1) = 0. \end{aligned}$$

Показать, что

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 2} \, dx.$$

14.6. Показать, что большие по номеру собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2 f(x) u &= 0, & f(x) > 0, \\ u(0) &= 0, & u(1) = 0 \end{aligned}$$

даются приближенной формулой

$$\lambda_n = n\pi \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)} \, dx \right]^{-1}.$$

14.7. Показать, что большие по номеру собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2 f(x) u &= 0, & f(x) > 0, \\ u(0) &= 0, & u'(1) = 0 \end{aligned}$$

даются приближенной формулой

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)} \, dx \right]^{-1}.$$

14.8. Рассмотреть задачу о собственных значениях вида

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 x^2 y &= 0, \\ y(1) &= 0, \quad y(2) = 0. \end{aligned}$$

Показать, что

$$\lambda_n = \frac{2}{3} n\pi.$$

14.9. Показать, что большие по номеру собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} u'' + \lambda^2 f(x) u &= 0, & f(x) > 0, \\ u'(a) &= 0, \quad u(b) = 0, & b > a \end{aligned}$$

даются приближенной формулой

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \, dx \right]^{-1}.$$

14.10. Рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 (1 - x^2) y &= 0, \\ y'(0) &= 0, & y(1) = 0. \end{aligned}$$

Показать, что собственные числа с большим номером описываются приближенным соотношением

$$\lambda_n = 4 \left(n + \frac{5}{12} \right).$$

14.11. Применить метод ВКБ непосредственно к уравнению

$$xy'' + y' + \lambda^2 x (1 - x^2) y = 0, \quad \lambda \gg 1.$$

Указать область применимости полученного приближения.

14.12. Рассмотреть краевую задачу, описывающую теплообмен в плоском канале при полностью развитом турбулентном течении,

$$y'' + \lambda^2 (1 - x^2) f(x) y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

где $f(x) = f(-x) > 0$ при $x \in [0, 1]$. Показать, что

$$\lambda_n = \left(n + \frac{11}{12} \right) \pi \left[\int_0^1 \sqrt{(1 - \tau^2) f(\tau)} d\tau \right]^{-1}.$$

14.13. Рассмотреть задачу из предыдущего упражнения при краевых условиях

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Показать, что

$$\lambda_n = \left(n + \frac{5}{12} \right) \pi \left[\int_0^1 \sqrt{(1 - \tau^2) f(\tau)} d\tau \right]^{-1}.$$

14.14. Рассмотреть уравнение

$$y'' + \lambda^2 (1 - x^2)^2 = 0.$$

Показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ и $x > -1$ имеет место асимптотическое представление

$$y \sim H^{1/2} (1 - x^2)^{-1/2} [c_1 J_{1/4}(\lambda H) + c_2 J_{-1/4}(\lambda H)],$$

где

$$H = \int_1^x (1 - \tau^2) d\tau = x - 1 - \frac{1}{3} (x - 1)^3.$$

14.15. Рассмотреть уравнение

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0,$$

где $q(\mu) = q'(\mu) = 0$ и $q''(\mu) \neq 0$. Показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$y \sim H^{1/2} q^{-1/4} [c_1 J_{1/4}(\lambda H) + c_2 J_{-1/4}(\lambda H)],$$

где

$$H = \int_x^{\mu} \sqrt{q} dx.$$

14.16. Рассмотреть уравнение

$$\varepsilon y'' + (2x + 1) y' + 2y = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Провести преобразование, исключающее средний член уравнения, а затем применить к полученному уравнению метод ВКБ.

14.17. Рассмотреть уравнение

$$\varepsilon y'' + (2x + 1) y' + 2y = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Представить решение в форме $y = \exp[\varepsilon^{-1} G(x, \varepsilon)]$ и найти два члена разложения функции G .

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

В процессе использования методов возмущений, и в частности метода многих масштабов, нередко возникают совокупности задач, которые должны решаться последовательно, одна за другой. При этом задача первого порядка обычно оказывается однородной, в то время как задачи высших порядков будут неоднородными, но линейными. Для того чтобы получить зависимость решения от медленных переменных, нам необходимо исследовать задачи высших приближений, после чего функции медленных переменных подчиняются условиям, позволяющим преобразовать асимптотическое разложение в равномерно пригодное. В простых задачах о нелинейных колебаниях указанный процесс приводит к исключению секулярных членов и членов с малыми знаменателями. В задачах с одной степенью свободы такая операция выполняется легко. Все, что мы должны при этом сделать, — это положить равными нулю коэффициенты при тех слагаемых, которые порождают соответствующие секулярные члены. Однако для динамических систем со многими степенями свободы, которые описываются несколькими связанными между собой дифференциальными уравнениями, уничтожение секулярных членов представляет собой несколько более сложную задачу. Эта задача и ее приложения к динамическим системам с двумя степенями свободы составляют содержание первой части настоящей главы.

В других задачах неравномерность получаемых разложений проявляется в том, что мы не можем удовлетворить всем граничным условиям. Такую несогласованность удастся устранить только наложением некоторых условий, называемых условиями *разрешимости* (иначе условиями *согласования*, *интегрируемости* или *совместности*). Ниже эти условия выведены для случая неоднородного дифференциального уравнения второго порядка при различных краевых условиях. Полученные результаты используются затем при решении двух простых задач на собственные значения, задачи о волнах в канале с волнистыми стенками и задачи о колебаниях мембраны, близкой по форме к кругу. В § 15.10 и 15.11 выведены условия разрешимости для случая неоднородного уравнения четвертого порядка при различных краевых условиях. Эти результаты применяются затем еще к двум задачам, одна из которых возникает в теории устойчивости по-

граничного слоя, а другая — при рассмотрении колебаний пластин, близких по форме к круговому кольцу. Далее, в § 15.12 с помощью развитой теории решается вырожденная задача на собственные значения. В § 15.13 рассматривается система дифференциальных уравнений специального вида. Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка общего вида изучаются в § 15.14. § 15.15 посвящен рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений с внутренними граничными условиями. В § 15.16 рассматриваются интегральные уравнения, а в § 15.17 — краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.

15.1. Алгебраические уравнения

Рассмотрим прежде всего систему двух алгебраических уравнений:

$$x_1 - x_2 = b_1, \quad (15.1)$$

$$2x_1 - 2x_2 = b_2. \quad (15.2)$$

Очевидно, что эта система не имеет решения, если только не выполнено условие $b_2 = 2b_1$. В самом деле, умножив первое уравнение на 2, получим

$$2x_1 - 2x_2 = 2b_1. \quad (15.3)$$

Сравнивая уравнения (15.2) и (15.3), мы приходим к выводу, что для совместности уравнений (15.1) и (15.2) необходимо, чтобы $b_2 = 2b_1$. Если $b_2 \neq 2b_1$, то уравнения (15.1) и (15.2) оказываются противоречивыми, и, следовательно, у системы (15.1), (15.2) решений нет. Если же $b_2 = 2b_1$, то уравнения (15.1) и (15.2) будут линейно зависимы, и фактически имеем лишь одно исходное уравнение. Например, можно решить любое из уравнений (15.1), (15.2) относительно x_2 , записав

$$x_2 = x_1 - b_1. \quad (15.4)$$

В этом случае значение x_1 остается произвольным, и, следовательно, имеем бесчисленное множество решений исходной системы.

Если положить в уравнениях (15.1), (15.2) $b_n = 0$ и рассмотреть возникающую при этом однородную систему уравнений

$$x_1 - x_2 = 0,$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0,$$

то нетрудно видеть, что эта система имеет *нетривиальное решение* $x_2 = x_1$.

Видоизменим систему уравнений (15.1), (15.2) так, чтобы однородная система не имела нетривиальных решений. Рассмотрим, например, систему

$$x_1 - x_2 = b_1, \quad (15.5)$$

$$2x_1 + 2x_2 = b_2. \quad (15.6)$$

Умножение уравнения (15.5) на 2 дает

$$2x_1 - 2x_2 = 2b_1. \quad (15.7)$$

Складывая уравнения (15.6) и (15.7), получаем

$$4x_1 = b_2 + 2b_1,$$

а вычитая (15.7) из (15.6), получаем

$$4x_2 = b_2 - 2b_1.$$

Следовательно, система уравнений (15.5), (15.6) имеет решение

$$x_1 = \frac{1}{4}(b_2 + 2b_1), \quad x_2 = \frac{1}{4}(b_2 - 2b_1),$$

существующее при любых значениях b_1 и b_2 . В этом случае однородная система, соответствующая (15.5), (15.6), а именно система

$$x_1 - x_2 = 0,$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

обладает лишь тривиальным решением. В случае системы (15.1), (15.2) для существования решения требуется подчинить постоянные b_1 и b_2 условиям разрешимости, а соответствующая однородная система может иметь нетривиальное решение. В случае системы (15.5), (15.6), напротив, неоднородная система не требует наложения никаких условий на b_1 и b_2 для своей разрешимости, а соответствующая однородная система должна иметь только тривиальное решение.

Далее, рассмотрим систему третьего порядка

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_1, \quad (15.8)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = b_2, \quad (15.9)$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = b_3. \quad (15.10)$$

Сложение уравнений (15.9) и (15.10) дает

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b_2 + b_3. \quad (15.11)$$

Сравнивая уравнения (15.8) и (15.11), замечаем, что они совместны только при условии

$$b_2 + b_3 = b_1,$$

которое и представляет собой требуемое условие разрешимости. При этом уравнения системы (15.8)–(15.10) оказываются линейно зависимыми, и для нахождения решения достаточно использовать любые два из них.

Например, из уравнений (15.8) и (15.9) можно выразить x_1 и x_2 через x_3 . В результате имеем

$$x_1 = x_3 + \frac{1}{5}(b_1 - 2b_2), \quad x_2 = x_3 + \frac{1}{5}(2b_1 + b_2), \quad (15.12)$$

причем значение x_3 остается произвольным; следовательно, система (15.8)—(15.10) при выполнении условия разрешимости имеет бесчисленное множество решений. К условию разрешимости $b_1 = b_2 = b_3$ можно прийти иначе, подставив решение (15.12) в уравнение (15.10). Однородная система, соответствующая (15.8)—(15.10), имеет нетривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3$.

Приведенные рассуждения показывают, что в случае, если однородная система имеет нетривиальное решение, неоднородная система имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть удовлетворяет условию разрешимости. Покажем это теперь для системы линейных алгебраических уравнений общего вида

$$Ax = b, \quad (15.13)$$

где A представляет собой квадратную матрицу порядка N , а x и b — вектор-столбцы с N компонентами. Эта система имеет единственное решение при произвольных правых частях b тогда и только тогда, когда однородная система

$$Ax = 0 \quad (15.14)$$

обладает только тривиальным решением. Если у однородной системы существует нетривиальное решение, то неоднородная система не имеет решений, если только компоненты вектора b не удовлетворяют специальным условиям разрешимости. В принципе эти условия разрешимости можно получить с помощью процесса исключения неизвестных. Другой способ получения условий разрешимости состоит в использовании так называемой *расширенной матрицы* B . Матрица B представляет собой $N \times (N + 1)$ матрицу, получающуюся добавлением столбца b_1, b_2, \dots, b_N к так называемой матрице коэффициентов A . Таким образом, если матрица коэффициентов имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad (15.15)$$

то расширенная матрица имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} & b_N \end{bmatrix}. \quad (15.16)$$

При этом условии разрешимости можно сформулировать следующим образом: *система линейных алгебраических уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы B совпадает с рангом матрицы коэффициентов A .*

Отметим, что однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов обращается в нуль, т. е.

$$|A| = 0.$$

При этом ранг матрицы A меньше N , и поэтому ранг матрицы B тоже меньше N . Следовательно, определитель любой квадратной матрицы N -го порядка, образованной из матрицы B вычеркиванием одного из столбцов, должен равняться нулю. Любое такое условие, например,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} & b_N \end{vmatrix} = 0 \quad (15.17)$$

дает некоторое условие разрешимости. Это условие разрешимости можно интерпретировать еще и по-другому. Если $|A| \neq 0$, то для нахождения решения x_1, x_2, \dots, x_N можно использовать правило Крамера. Например,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_N & a_{N2} & a_{N3} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}}{|A|}. \quad (15.18)$$

Если $|A| = 0$, то, как видно из формулы (15.18), x_1 обращается в бесконечность. Следовательно, система уравнений (15.13) неразрешима, если только одновременно не обращается в нуль и определитель в числителе дроби (15.18). При этом мы имеем неопределенность вида $0/0$.

Условие разрешимости системы (15.13) в случае, когда соответствующая однородная система обладает нетривиальным решением, можно выразить еще и следующим образом. Рассмотрим векторное уравнение, транспонированное по отношению к уравнению (15.13), и умножим его справа на вектор-столбец \bar{u} , где черта сверху означает комплексное сопряжение, а так называемый сопряженный вектор-столбец \bar{u} определяется ниже. В результате имеем

$$(Ax)^T \bar{u} = b^T \bar{u}, \quad (15.19)$$

где верхний индекс T означает операцию транспонирования, т. е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{N1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1N} & a_{2N} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}^T = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N].$$

Поскольку $(Ax)^T = x^T A^T$, соотношение (15.19) можно переписать в виде

$$x^T A^T \bar{u} = b^T \bar{u}.$$

Следовательно,

$$x^T \overline{A^T u} = b^T \bar{u},$$

или

$$x^T \overline{A^T u} = b^T \bar{u}, \quad (15.20)$$

где матрица $A^* = \overline{A^T}$ представляет собой матрицу, сопряженную к матрице A . Матрица A называется *самосопряженной*, если $A^* = A$, т. е. такая матрица будет либо эрмитовой, либо симметричной, в зависимости от того, является ли она комплексной или вещественной. Если однородная система (15.13) имеет нетривиальное решение x , то $|A| = |A^*| = 0$. Последнее равенство означает, что однородная система

$$A^* u = 0 \quad (15.21)$$

имеет нетривиальное решение.

Определив вектор u как решение однородной системы (15.21), обратимся вновь к неоднородной системе (15.13), т. е. к случаю $b \neq 0$. Подставляя соотношение (15.21) в (15.20), получаем следующую форму условий разрешимости:

$$b^T \bar{u} = 0, \quad (15.22)$$

где u — любое решение сопряженной системы. Иначе говоря, условие разрешимости требует, чтобы правая часть системы (15.13) была ортогональна к любому решению однородной сопряженной системы.

Если определить внутреннее произведение вектор-столбцов u и v как

$$(u, v) = u^T \bar{v}, \quad (15.23)$$

то соотношения (15.19) и (15.20) можно переписать в виде

$$(Ax, u) = (x, A^* u) = (b, u), \quad (15.24a)$$

а соотношение (15.22) — в виде

$$(b, u) = 0. \quad (15.246)$$

Хотя мы показали только необходимость условия (15.246), на самом деле оно является и достаточным условием разрешимости системы (15.13).

Рассмотрим в качестве примера систему (15.8)—(15.10). В этом случае

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (15.25)$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (15.26)$$

и $A^* = A^T$, поскольку матрица A вещественная. Далее, сопряженная система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (15.27)$$

или

$$u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0, \quad (15.28a)$$

$$2u_1 + u_2 + u_3 = 0, \quad (15.286)$$

$$-3u_1 + u_2 - 4u_3 = 0. \quad (15.28в)$$

Система уравнений (15.28) имеет нетривиальное решение, поскольку таким свойством обладает система (15.8)—(15.10). Умножая уравнение (15.286) на 2 и складывая с (15.28a), имеем

$$5u_1 + 5u_3 = 0.$$

В то же время вычитая из уравнения (15.286) уравнение (15.28в), имеем снова

$$5u_1 + 5u_3 = 0.$$

Следовательно, $u_3 = -u_1$. При этом из уравнения (15.286) вытекает, что $u_2 = -u_1$. Таким образом, сопряженная задача имеет решение вида

$$u = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Подчиняя теперь вектор b условию ортогональности к решению однородной сопряженной системы, находим, что условие разрешимости имеет вид

$$b_1 - b_2 - b_3 = 0,$$

что полностью согласуется с условием, полученным выше с помощью исключения неизвестных. Заметим, что условие разрешимости в форме (15.17) удобно для применения, и поэтому мы будем часто использовать его в дальнейшем.

Применим теперь полученные выше результаты к двум задачам о колебаниях гироскопических систем с двумя степенями свободы.

15.2. Нелинейные колебания гироскопических систем с двумя степенями свободы

Рассмотрим свободные колебания гироскопической системы с двумя степенями свободы с учетом квадратично нелинейных возвращающих сил. Такая задача сводится к исследованию системы уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + \dot{u}_2 + 2u_1 &= 2u_1u_2, \\ \ddot{u}_2 - \dot{u}_1 + 2u_2 &= u_1^2\end{aligned}\quad (15.29)$$

при малых, но конечных амплитудах.

Будем искать равномерное разложение с помощью метода многих масштабов в виде

$$\begin{aligned}u_1 &= \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \dots, \\ u_2 &= \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \dots,\end{aligned}\quad (15.30)$$

где $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ и ε — малый безразмерный параметр, характеризующий амплитуду колебаний. Подставляя разложения (15.30) в уравнения (15.29) и используя соотношение (5.45), получаем

$$\begin{aligned}(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12}) + (D_0 + \varepsilon D_1)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22}) + \\ + 2(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12}) + \dots = 2(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12})(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22}) + \dots, \\ (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22}) - (D_0 + \varepsilon D_1)(\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12}) + \\ + 2(\varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22}) + \dots = (\varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12})^2 + \dots.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этих уравнений, имеем для порядка ε :

$$D_0^2 u_{11} + D_0 u_{21} + 2u_{11} = 0, \quad (15.31a)$$

$$D_0^2 u_{21} - D_0 u_{11} + 2u_{21} = 0; \quad (15.31б)$$

для порядка ε^2 :

$$D_0^2 u_{12} + D_0 u_{22} + 2u_{12} = -2D_0 D_1 u_{11} - D_1 u_{21} + 2u_{11} u_{21},$$

$$D_0^2 u_{22} - D_0 u_{12} + 2u_{22} = -2D_0 D_1 u_{21} + D_1 u_{11} + u_{11}^2. \quad (15.32)$$

Уравнения (15.31) образуют систему двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Следовательно, их решения можно получить, полагая

$$u_{11} = c_1 \exp(i\omega T_0), \quad u_2 = c_2 \exp(i\omega T_0). \quad (15.33)$$

Подстановка (15.33) в уравнение (15.31) дает

$$\begin{aligned} (2 - \omega^2) c_1 + i\omega c_2 &= 0, \\ -i\omega c_1 + (2 - \omega^2) c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы (15.34), определитель матрицы ее коэффициентов должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & i\omega \\ -i\omega & 2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$(2 - \omega^2)^2 - \omega^2 = 0,$$

или $\omega^4 - 5\omega^2 + 4 = (\omega^2 - 4)(\omega^2 - 1) = 0,$

откуда $\omega = 1$ и $\omega = 2$, если рассматривать только положительные частоты. При $\omega = 1$ из первого из уравнений (15.34) следует, что

$$c_1 + ic_2 = 0, \quad \text{или} \quad c_2 = ic_1.$$

При $\omega = 2$ из того же уравнения имеем

$$-2c_1 + 2ic_2 = 0, \quad \text{или} \quad c_2 = -ic_1.$$

Следовательно, общее решение системы (15.31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_{11} &= A_1(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-iT_0} + A_2(T_1) e^{2iT_0} + \bar{A}_2(T_1) e^{-2iT_0}, \\ u_{21} &= iA_1(T_1) e^{iT_0} - i\bar{A}_1(T_1) e^{-iT_0} - iA_2(T_1) e^{2iT_0} + i\bar{A}_2(T_1) e^{-2iT_0}. \end{aligned} \quad (15.35)$$

Как и в случае колебательной системы с одной степенью свободы, амплитуды A_1 и A_2 нельзя определить на этом этапе итерационного процесса. Они будут определены на следующем этапе из условий разрешимости неоднородной задачи.

Подставляя решения (15.35) в систему уравнений (15.32), имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{12} + D_0 u_{22} + 2u_{12} &= -2iA_1' e^{iT_0} - 4iA_2' e^{2iT_0} - iA_1' e^{iT_0} + \\ &+ iA_2' e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + 2(A_1 e^{iT_0} + \bar{A}_1 e^{-iT_0} + \\ &+ A_2 e^{2iT_0} + \bar{A}_2 e^{-2iT_0})(iA_1 e^{iT_0} - \\ &- i\bar{A}_1 e^{-iT_0} - iA_2 e^{2iT_0} + i\bar{A}_2 e^{-2iT_0}), \\ D_0^2 u_{22} - D_0 u_{12} + 2u_{22} &= 2A_1' e^{iT_0} - 4A_2' e^{2iT_0} + A_1' e^{iT_0} + \\ &+ A_2' e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + (A_1 e^{iT_0} + \bar{A}_1 e^{-iT_0} + \\ &+ A_2 e^{2iT_0} + \bar{A}_2 e^{-2iT_0})^2. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований и упрощений последняя система примет вид

$$D_0^2 u_{12} + D_0 u_{22} + 2u_{12} = -i(3A_1' + 4A_2 \bar{A}_1) e^{iT_0} + \\ + i(-3A_2' + 2A_1^2) e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}), \quad (15.36)$$

$$D_0^2 u_{22} - D_0 u_{12} + 2u_{22} = (3A_1' + 2A_2 \bar{A}_1) e^{iT_0} + \\ + (-3A_2' + A_1^2) e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}). \quad (15.37)$$

Поскольку однородная система, соответствующая (15.36), (15.37), имеет решения, пропорциональные $\exp(\pm iT_0)$ и $\exp(\pm 2iT_0)$, слагаемые в правых частях, пропорциональные этим экспонентам, порождают в решении u_{12} , u_{22} секулярные члены. Заметим, что правая часть каждого из уравнений (15.36) и (15.37) содержит слагаемые, пропорциональные $\exp(\pm iT_0)$ и $\exp(\pm 2iT_0)$, и поэтому нет необходимости полагать коэффициент при каждой из этих экспонент в обоих уравнениях равным нулю. Более того, если бы мы поставили такое условие, то получили бы четыре несовместных комплексных уравнения относительно A_1 и A_2 . Поэтому для того чтобы уничтожить секулярные члены (т. е. чтобы найти соответствующие условия разрешимости), будем искать частное решение, не содержащее резонансных слагаемых, соответствующих $\exp(iT_0)$ и $\exp(2iT_0)$, в виде

$$u_{12} = P_1(T_1) e^{iT_0} + P_2(T_1) e^{2iT_0}, \\ u_{22} = Q_1(T_1) e^{iT_0} + Q_2(T_1) e^{2iT_0}. \quad (15.38)$$

Подставляя решения (15.38) в уравнения (15.36), (15.37), имеем

$$(P_1 + iQ_1) e^{iT_0} + (-2P_2 + 2iQ_2) e^{2iT_0} = -i(3A_1' + 4A_2 \bar{A}_1) \times \\ \times e^{iT_0} + i(-3A_2' + 2A_1^2) e^{2iT_0}, \\ (-iP_1 + Q_1) e^{iT_0} + (-2iP_2 - 2Q_2) e^{2iT_0} = (3A_1' + 2A_2 \bar{A}_1) \times \\ \times e^{iT_0} + (-3A_2' + A_1^2) e^{2iT_0}.$$

Приравнявая коэффициенты при каждой из экспонент в обеих частях полученных уравнений, находим

$$P + iQ_1 = -i(3A_1' + 4A_2 \bar{A}_1), \quad (15.39a)$$

$$-iP_1 + Q_1 = 3A_1' + 2A_2 \bar{A}_1, \quad (15.39b)$$

$$-2P_2 + 2iQ_2 = i(-3A_2' + 2A_1^2), \\ -2iP_2 - 2Q_2 = -3A_2' + A_1^2. \quad (15.40)$$

Уравнения (15.39) образуют неоднородную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно P_1 и Q_1 . Соответствующая однородная система имеет нетривиальное решение, так как определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

При этом условии разрешимости системы (15.39) может быть записано в одной из двух форм:

$$\begin{vmatrix} 1 & -i(3A_1' + 4A_2\bar{A}_1) \\ -i & 3A_1' + 2A_2\bar{A}_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} -i(3A_1' + 4A_2\bar{A}_1) & i \\ 3A_1' + 2A_2\bar{A}_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В двумерном случае оба этих условия приводят к одному и тому же результату, но в случае систем более высокой размерности это, вообще говоря, не так. В настоящем случае оба равенства эквивалентны условию вида

$$A_1' = -A_2\bar{A}_1. \quad (15.41)$$

Аналогичным образом, определитель системы (15.40) равен нулю, и эта система имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие разрешимости:

$$\begin{vmatrix} -2 & i(-3A_2' + 2A_1^2) \\ -2i & -3A_2' + A_1^2 \end{vmatrix} = 0,$$

равносильное уравнению

$$A_2' = \frac{1}{2} A_1^2. \quad (15.42)$$

Уравнения (15.41) и (15.42) описывают модуляцию амплитуд A_1 и A_2 , т. е. их изменение с медленным временем T_1 . Как и в случае динамических систем с одной степенью свободы, амплитуды A_1 и A_2 обычно представляют в показательной форме и в уравнениях (15.41) и (15.42) отделяют вещественные и мнимые части. Решением этих уравнений завершается построение разложения первого порядка. Мы не будем здесь входить в детали этого решения, а отошлем заинтересованного читателя к книге Найфэ и Мука.

15.3. Гирскопические системы с параметрическим возбуждением

Рассмотрим параметрически возбуждаемую линейную систему с двумя степенями свободы. Иначе говоря, будем исследовать решения системы уравнений вида

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \dot{u}_2 + 2u_1 + 2\varepsilon \cos \Omega t (f_{11}u_1 + f_{12}u_2) &= 0, \\ \ddot{u}_2 - \dot{u}_1 + 2u_2 + 2\varepsilon \cos \Omega t (f_{21}u_1 + f_{22}u_2) &= 0 \end{aligned} \quad (15.43)$$

при малых ε . Предположим для определенности, что частота Ω положительна. Используя метод многих масштабов, будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \dots, \\ u_2 &= u_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \dots \end{aligned} \quad (15.44)$$

Подставляя разложения (15.44) в систему (15.43), учитывая соотношение (5.43) и выражая $\cos \Omega t$ в виде $\cos \Omega T_0$, получаем

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_{10} + \varepsilon u_{11}) + (D_0 + \varepsilon D_1)(u_{20} + \varepsilon u_{21}) + \\ + 2(u_{10} + \varepsilon u_{11}) + 2\varepsilon \cos \Omega T_0(f_{11}u_{10} + f_{12}u_{20}) + \dots = 0, \\ (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_{20} + \varepsilon u_{21}) - (D_0 + \varepsilon D_1)(u_{10} + \varepsilon u_{11}) + \\ + 2(u_{20} + \varepsilon u_{21}) + 2\varepsilon \cos \Omega T_0(f_{21}u_{10} + f_{22}u_{20}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем для порядка ε^0 :

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{10} + D_0 u_{20} + 2u_{10} &= 0, \\ D_0^2 u_{20} - D_0 u_{10} + 2u_{20} &= 0; \end{aligned} \quad (15.45)$$

для порядка ε^1 :

$$D_0^2 u_{11} + D_0 u_{21} + 2u_{11} = -2D_0 D_1 u_{10} - D_1 u_{20} - 2 \cos \Omega T_0(f_{11}u_{10} + f_{12}u_{20}), \quad (15.46)$$

$$D_0^2 u_{21} - D_0 u_{11} + 2u_{21} = -2D_0 D_1 u_{20} + D_1 u_{10} - 2 \cos \Omega T_0(f_{21}u_{10} + f_{22}u_{20}). \quad (15.47)$$

Как и в предыдущем параграфе, общее решение системы дифференциальных уравнений (15.45) можно представить как

$$\begin{aligned} u_{10} &= A_1(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-iT_0} + A_2(T_1)e^{2iT_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-2iT_0}, \\ u_{20} &= iA_1e^{iT_0} - i\bar{A}_1e^{-iT_0} - iA_2e^{2iT_0} + i\bar{A}_2e^{-2iT_0}, \end{aligned} \quad (15.48)$$

где A_1 и A_2 подлежат определению из условий разрешимости на следующем этапе итерационного процесса. Подстановка выражений (15.48) в уравнения (15.46) и (15.47) дает

$$D_0^2 u_{11} + D_0 u_{21} + 2u_{11} = -3A_1'e^{iT_0} - 3iA_2'e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) - (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0})(f_{11}A_1e^{iT_0} + f_{11}A_2e^{2iT_0} + if_{12}A_1e^{iT_0} - if_{12}A_2e^{2iT_0} + (\text{к. с.})),$$

$$D_0^2 u_{21} - D_0 u_{11} + 2u_{21} + 3A_1'e^{iT_0} - 3A_2'e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) - (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0})(f_{21}A_1e^{iT_0} + f_{21}A_2e^{2iT_0} + if_{22}A_1e^{iT_0} - if_{22}A_2e^{2iT_0} + (\text{к. с.})),$$

или

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{11} + D_0 u_{21} + 2u_{11} &= -3A_1'e^{iT_0} - 3A_2'e^{2iT_0} - \\ &- (f_{11} + if_{12})A_1[e^{i(1+\Omega)T_0} + e^{i(1-\Omega)T_0}] - \\ &- (f_{11} - if_{12})A_2[e^{i(2+\Omega)T_0} + e^{i(2-\Omega)T_0}] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (15.49)$$

$$D_0^2 u_{21} - D_0 u_{11} + 2u_{21} = 3A_1' e^{iT_0} - 3A_2' e^{2iT_1} - \\ - (f_{21} + if_{22}) A_1 [e^{i(1+\Omega)T_0} + e^{i(1-\Omega)T_0}] - \\ - (f_{21} - if_{22}) A_2 [e^{i(2+\Omega)T_0} + e^{i(2-\Omega)T_0}] + (\text{к. с.}). \quad (15.50)$$

Когда амплитуды A_1 и A_2 постоянны, как в случае прямого разложения, правые части уравнений (15.49) и (15.50) содержат слагаемые, которые могут порождать в решении секулярные члены при определенных значениях Ω . Так, резонансные члены появятся в u_{11} и u_{21} , если любой из показателей экспонент в (15.49) и (15.50) будет равен ± 1 или ± 2 , поскольку функции $\exp(\pm iT_0)$ и $\exp(\pm 2iT_0)$ являются решениями соответствующей однородной системы. Итак, условия появления секулярных членов суть следующие:

$$1 + \Omega = \pm 2, \quad 1 - \Omega = \pm 2, \quad 1 + \Omega = \pm 1, \quad 1 - \Omega = \pm 1, \\ 2 + \Omega = \pm 2, \quad 2 - \Omega = \pm 2, \quad 2 + \Omega = \pm 1, \quad 2 - \Omega = \pm 1,$$

т. е. параметрический резонанс наступает при $\Omega = 0, 1, 2, 3, 4$. Если заменить точное равенство на приближенное, то вместо секулярных членов появятся члены с малыми знаменателями. Рассмотрим случай $\Omega \approx 3$.

Для того чтобы уничтожить члены с малыми знаменателями, мы прежде всего преобразуем их в секулярные члены, вводя параметр расстройки по формуле

$$\Omega = 3 + \varepsilon\sigma \quad (15.51)$$

и соответственно записывая

$$\Omega T_0 = 3T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = 3T_0 + \sigma T_1. \quad (15.52)$$

Подставляя соотношение (15.52) в уравнения (15.49) и (15.50), имеем

$$D_0^2 u_{11} + D_0 u_{21} + 2u_{11} = -[3iA_1' + (f_{11} + if_{12}) \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1}] e^{iT_0} - \\ - [3iA_2' + (f_{11} - if_{12}) \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1}] e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}), \quad (15.53)$$

$$D_0^2 u_{21} - D_0 u_{11} + 2u_{21} = [3A_1' - (f_{21} + if_{22}) \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1}] e^{iT_0} - \\ - [3A_2' + (f_{21} - if_{22}) \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1}] e^{2iT_0} + (\text{к. с.}) + (\text{Н. С. Ч.}). \quad (15.54)$$

Для того чтобы вывести соответствующие условия разрешимости, будем искать частное решение системы (15.53), (15.54), не содержащее секулярных членов, в виде

$$u_{11} = P_1(T_1) \exp(iT_0) + P_2(T_1) \exp(2iT_0), \quad (15.55)$$

$$u_{21} = Q_1(T_1) \exp(iT_0) + Q_2(T_1) \exp(2iT_0).$$

Как и в предыдущем параграфе, подставляя решения (15.55) в уравнения (15.53) и (15.54) и приравнявая коэффициенты при

$\exp(iT_0)$ и $\exp(2iT_0)$ в обеих частях каждого из уравнений, получаем

$$\begin{aligned} P_1 + iQ_1 &= -3iA'_1 - (f_{11} + if_{12})\bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1), \\ -iP_1 + Q_1 &= 3A'_1 - (f_{21} + if_{22})\bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1), \end{aligned} \quad (15.56)$$

$$\begin{aligned} -2P_2 + 2iQ_2 &= -3iA'_2 - (f_{11} - if_{12})\bar{A}_1 \exp(i\sigma T_1), \\ -2iP_2 - 2Q_2 &= -3A'_2 - (f_{21} - if_{22})\bar{A}_1 \exp(i\sigma T_1). \end{aligned} \quad (15.57)$$

Поскольку однородная система (15.56) обладает нетривиальным решением, неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3iA'_1 - (f_{11} + if_{12})\bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1) \\ -i & 3A'_1 - (f_{21} + if_{22})\bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие можно переписать в виде

$$A'_1 = \frac{1}{6} [f_{21} - f_{12} + i(f_{11} + f_{12})] \bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1). \quad (15.58)$$

Условие разрешимости системы (15.57) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -2 & -3iA'_2 - (f_{11} - if_{12})\bar{A}_1 \exp(i\sigma T_1) \\ -2i & -3A'_2 - (f_{21} - if_{22})\bar{A}_1 \exp(i\sigma T_1) \end{vmatrix} = 0,$$

или
$$A'_2 = -\frac{1}{6} [f_{21} - f_{12} - i(f_{11} + f_{22})] \bar{A}_1 \exp(i\sigma T_1). \quad (15.59)$$

Уравнения (15.58) и (15.59) описывают модуляцию амплитуд A_1 и A_2 . За деталями анализа этих уравнений мы вновь отсылаем читателя к книге Найфа и Мука.

15.4. Краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка

В этом параграфе будут выведены условия разрешимости краевых задач для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с неоднородными граничными условиями общего вида. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y &= \\ &= f(x), \quad a < x < b, \end{aligned} \quad (15.60)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{21}y(a) + \alpha_{13}y'(b) + \alpha_{14}y(b) &= \beta_1, \\ \alpha_{21}y'(a) + \alpha_{22}y(a) + \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) &= \beta_2, \end{aligned} \quad (15.61)$$

где граничные операторы линейно независимы, т. е. матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{bmatrix}$$

имеет ранг 2, и, следовательно, существует по крайней мере одна невырожденная субматрица размером 2×2 . Иначе говоря, по крайней мере один из определителей

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{22} & \alpha_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{34} = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Граничные условия (15.61) называют смешанными или неразделенными, поскольку они содержат значения искомой функции и ее производной на обоих концах промежутка.

В этом параграфе рассмотрим случай, когда определитель $\Delta_{13} \neq 0$. Разрешая уравнения (15.61) относительно $y'(a)$ и $y'(b)$, имеем

$$y'(a) = \gamma_{11}y(a) + \gamma_{12}y(b) + \delta_1, \quad (15.62)$$

$$y'(b) = \gamma_{21}y(a) + \gamma_{22}y(b) + \delta_2.$$

где

$$\gamma_{11} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{13}}, \quad \gamma_{12} = \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{13}}, \quad \gamma_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}, \quad \gamma_{22} = -\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}},$$

$$\delta_1 = \frac{\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}}{\Delta_{13}}, \quad \delta_2 = \frac{\beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21}}{\Delta_{13}}. \quad (15.63)$$

Предпошлем подробному выводу условий разрешимости поясняющий дальнейшее простой пример. Рассмотрим задачу вида

$$y'' + \pi^2 y = \pi \sin \pi x, \quad (15.64)$$

$$y(0) = \beta_1, \quad y(1) = \beta_2.$$

В данном случае граничные условия разделены, а соответствующая однородная задача

$$y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (15.65)$$

имеет нетривиальное решение $y = \sin \pi x$. Поэтому неоднородная задача не будет иметь решения, если только не окажется удовлетворенным соответствующее условие разрешимости. Для того чтобы получить указанное условие, будем искать решение задачи (15.64) в предположении, что оно существует. Общее решение уравнения (15.64) представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения (см. приложение Б). В результате имеем

$$y = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x - 0,5x \cos \pi x, \quad (15.66)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Подчиняя решение (15.66) граничным условиям (15.64), получаем

$$c_2 = \beta_1, \quad -c_2 + \frac{1}{2} = \beta_2.$$

Эти уравнения несовместны, и, следовательно, исходная задача (15.64) не имеет решения, если только не выполнено соотношение

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad (15.67)$$

которое и представляет собой искомое условие разрешимости. При этом решение задачи (15.64) имеет вид

$$y = c_1 \sin \pi x + \beta_1 \cos \pi x - \frac{1}{2} x \cos \pi x. \quad (15.68)$$

Для того чтобы найти условия разрешимости в общем случае, нет необходимости проводить указанную выше процедуру, в особенности если не представляет интерес явный вид решения, как, например, в задачах теории возмущений. Вместо этого воспользуемся идеей обращения к сопряженной задаче. Умножим уравнение (15.60) на функцию $u_1(x)$, которую будем называть *сопряженным решением*, подлежащим определению в дальнейшем. В результате получим

$$p_2 u y'' + p_1 u y' + p_0 u y = f u. \quad (15.69)$$

Почленное интегрирование соотношения (15.69) от a до b (т. е. по интересующему нас промежутку, на котором решается крайняя задача) дает

$$\int_a^b p_2 u y'' dx + \int_a^b p_1 u y' dx + \int_a^b p_0 u y dx = \int_a^b f u dx. \quad (15.70)$$

Далее, проинтегрируем по частям первые два слагаемых в (15.70), чтобы перейти от дифференцирования функции y к дифференцированию функции u . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b p_2 u y'' dx &= p_2 u y' \Big|_a^b - \int_a^b (p_2 u)' y' dx \\ \text{и} \quad \int_a^b (p_2 u)' y' dx &= (p_2 u)' y \Big|_a^b - \int_a^b (p_2 u)'' y dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_a^b p_2 u y'' dx = [p_2 u y' - (p_2 u)' y]_a^b + \int_a^b (p_2 u)'' y dx. \quad (15.71)$$

Кроме того,

$$\int_a^b p_1 u y' dx = p_1 u y \Big|_a^b - \int_a^b (p_1 u)' y dx. \quad (15.72)$$

Подставляя соотношения (15.71) и (15.72) в (15.70), имеем

$$[p_2 u' - (p_2)' u + p_1 u]_a^b + \int_a^b (p_2 u)' u dx - \\ - \int_a^b (p_1 u)' u dx + \int_a^b p_0 u u dx = \int_a^b f u dx,$$

или

$$\int_a^b [p_2 u'' + (2p_2' - p_1) u' + (p_2'' - p_1' + p_0) u] u dx + \\ + \{p_2 u' + [(p_1 - p_2') u - p_2 u']\}_a^b = \int_a^b f u dx. \quad (15.73)$$

Приравнивая нулю подынтегральное выражение в левой части соотношения (15.73), получим уравнение относительно функции u :

$$p_2 u'' + (2p_2' - p_1) u' + (p_2'' - p_1' + p_0) u = 0, \quad (15.74)$$

которое обычно называют *сопряженным* по отношению к однородному уравнению (15.60). Для того чтобы найти вид граничных условий, необходимых для замыкания сопряженной задачи, рассмотрим однородную задачу, соответствующую (15.60), (15.62), т. е. положим $f = 0$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Тогда соотношение (15.73) и условие (15.62) примут вид

$$\{p_2 u' + [(p_1 - p_2') u - p_2 u']\}_{x=b} - \\ - \{p_2 u' + [(p_1 - p_2') u - p_2 u']\}_{x=a} = 0, \quad (15.75)$$

$$y'(a) = \gamma_{11} u(a) + \gamma_{12} u(b), \quad y'(b) = \gamma_{21} u(a) + \gamma_{22} u(b). \quad (15.76)$$

Подставляя выражения для $y'(a)$ и $y'(b)$ в соотношение (15.75) и собирая члены, содержащие $u(a)$ и $u(b)$, получим

$$[\gamma_{21} p_2 u|_{x=b} - (\gamma_{11} p_2 + p_1 - p_2') u|_{x=a} + p_2 u'|_{x=a}] u(a) - \\ - [\gamma_{12} p_2 u|_{x=a} - (\gamma_{22} p_2 + p_1 - p_2') u|_{x=b} + p_2 u'|_{x=b}] u(b) = 0. \quad (15.77)$$

Выберем граничные условия сопряженной задачи так, чтобы коэффициенты при $u(a)$ и $u(b)$ обращались в нуль каждый в отдельности, т. е.

$$\gamma_{21} p_2 u|_{x=b} - (\gamma_{11} p_2 + p_1 - p_2') u|_{x=a} + p_2 u'|_{x=a} = 0, \\ \gamma_{12} p_2 u|_{x=a} - (\gamma_{22} p_2 + p_1 - p_2') u|_{x=b} + p_2 u'|_{x=b} = 0. \quad (15.78)$$

Таким образом, функция u представляет решение краевой задачи для уравнения (15.74) с граничными условиями (15.78).

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (15.60), называется *самосопряженным*, если оно совпадает с сопряженным ему уравнением (15.74). Эти уравнения совпадают в случае, если

$$2p_2' - p_1 = p_1, \quad p_2'' - p_1' = 0, \quad (15.79)$$

или $p_1 = p_2'$. При этом однородное уравнение, соответствующее (15.60), имеет вид

$$p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y = 0,$$

или

$$(p_2 y')' + p_0 y = 0. \quad (15.80)$$

Сопряженное уравнение (15.74) можно тогда записать как

$$(p_2 u')' + p_0 u = 0, \quad (15.81)$$

а граничные условия (15.78) примут вид

$$\begin{aligned} u'(a) &= \gamma_{11} u(a) - \gamma_{21} p_2(b) p_2^{-1}(a) u(b), \\ u'(b) &= -\gamma_{12} p_2(a) p_2^{-1}(b) u(a) + \gamma_{22} u(b). \end{aligned} \quad (15.82)$$

Отметим, что граничные условия (15.82), вообще говоря, отличаются от граничных условий (15.76), если только не выполнено равенство

$$-\gamma_{21} p_2(b) = -\gamma_{12} p_2(a). \quad (15.83)$$

Если же соотношения (15.79) и (15.83) выполнены, то сопряженное дифференциальное уравнение (15.81) и граничные условия для него (15.82) совпадают с исходным однородным дифференциальным уравнением (15.80) и граничными условиями (15.76). В этом случае самосопряженной называют краевую задачу в целом.

Если однородное дифференциальное уравнение второго порядка не является самосопряженным (т. е. $p_1 \neq p_2'$), его всегда можно преобразовать в самосопряженное, умножив на подходящую функцию v . Для того чтобы найти функцию v , умножим однородное уравнение, соответствующее (15.60), на v . В результате получим

$$p_2 v y'' + p_1 v y' + p_0 v y = 0. \quad (15.84)$$

Условие самосопряженности уравнения (15.84) имеет вид

$$p_1 v = (p_2 v)' = p_2 v' + p_2' v,$$

откуда

$$\frac{v'}{v} = \frac{p_1}{p_2} - \frac{p_2'}{p_2},$$

или

$$\ln v = \int \frac{p_1}{p_2} dx - \ln p_2.$$

Таким образом,

$$v = p_2^{-1} \exp \int \frac{p_1}{p_2} dx. \quad (15.85)$$

Следует отметить, что дифференциальное уравнение порядка выше второго преобразовать в самосопряженное не всегда возможно.

Определив сопряженную краевую задачу (15.74), (15.78), вернемся к неоднородной задаче (15.60), (15.62), с тем чтобы найти вид соответствующего условия разрешимости. С учетом того, что

функция u удовлетворяет уравнению (15.74), соотношение (15.73) принимает вид

$$[p_2 u y' + (p_1 - p_2') u y - p_2 u' y]_{x=b} - \\ - [p_2 u y' + (p_1 - p_2') u y - p_2 u' y]_{x=a} = \int_a^b f u \, dx. \quad (15.86)$$

Подставляя выражения для $y'(a)$ и $y'(b)$ из условий (15.62) в соотношение (15.86), имеем

$$\delta_2 p_2 u|_{x=b} - \delta_1 p_2 u|_{x=a} + [\gamma_{21} p_2 u|_{x=b} - (\gamma_{11} p_2 + \\ + p_1 - p_2') u|_{x=a} + p_2 u'|_{x=a}] y(a) - \\ - [\gamma_{12} p_2 u|_{x=a} - (\gamma_{22} p_2 + p_1 - p_2') u|_{x=b}] y(b) = \int_a^b f u \, dx. \quad (15.87)$$

Поскольку члены в квадратных скобках в соответствии с условиями (15.78) обращаются в нуль, соотношение (15.87) сводится к искомому условию разрешимости:

$$\delta_2 p_2(b) u(b) + \delta_1 p_2(a) u(a) = \int_a^b f(x) u(x) \, dx, \quad (15.88)$$

где u представляет собой решение сопряженной краевой задачи (15.74), (15.78).

В качестве частного случая рассмотрим неоднородную задачу Штурма—Лиувилля

$$[p(x) y'] + q(x) y - \lambda r(x) y = f(x), \quad (15.89a)$$

$$y'(a) = \gamma_{11} y(a) + \gamma_{12} y(b), \quad (15.89b)$$

$$y'(b) = \gamma_{21} y(a) + \gamma_{22} y(b). \quad (15.89b)$$

При формулировке задачи (15.89) предполагается, что выполнено соотношение (15.83) и, кроме того, что $r(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Если значение параметра λ не совпадает ни с одним из собственных чисел однородной задачи (т. е. однородная задача имеет только тривиальное решение), то неоднородная задача имеет единственное решение при любой непрерывной функции $f(x)$. С другой стороны, если параметр λ равен какому-либо собственному числу однородной задачи (т. е. однородная задача имеет нетривиальное решение), неоднородная задача разрешима лишь при условии

$$\int_a^b f(x) u(x) \, dx = 0, \quad (15.90)$$

т. е. при условии ортогональности функции $f(x)$ собственной функции, отвечающей собственному значению λ . Этот результат составляет содержание теоремы, обычно называемой альтернативой Фредгольма:

При заданном значении λ либо неоднородная задача имеет единственное решение при любой непрерывной функции f , либо однородная задача имеет нетривиальное решение.

В следующем параграфе мы рассмотрим краевую задачу с граничными условиями общего вида (15.61). В § 15.6 и 15.7 применим развитую теорию к двум задачам о собственных значениях, а в § 15.8 — к задаче о звуковых волнах в канале с волнистыми стенками. В § 15.9 мы видоизменим полученные выше результаты, с тем чтобы применить их к задаче для дифференциального уравнения с регулярной особой точкой, и используем модифицированную теорию в задаче о колебаниях мембраны, близкой по форме к кругу.

15.5. Граничные условия общего вида

Сопряженный оператор

Обозначим через L дифференциальный оператор второго порядка, определяемый дифференциальным выражением (15.60), т. е.

$$L(y) \equiv \left[p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \right] y, \quad (15.91)$$

где p_2' , p_1' и p_0 представляют собой непрерывные функции в промежутке $[a, b]$. Если $y(x)$ и $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции, то имеем

$$\int_a^x u L(y) dx = \int_a^x [(p_2 u) y'' + (p_1 u) y' + (p_0 u) y] dx, \quad a \leq x \leq b. \quad (15.92)$$

Как и в предыдущем параграфе, интегрирование соотношения (15.92) по частям дает

$$\begin{aligned} \int_a^x u L(y) dx &= [p_2 u y' - (p_2 u)' y + p_1 u y]_a^x + \\ &+ \int_a^x [(p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u] y dx. \end{aligned} \quad (15.93)$$

Обозначим дифференциальный оператор, входящий в подынтегральное выражение в правой части (15.93), через L^* , т. е.

$$\begin{aligned} L^*(u) &\equiv (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u = \\ &= \left[p_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1) \frac{d}{dx} + p_0 + p_2'' - p_1' \right] u. \end{aligned} \quad (15.94)$$

При этом соотношение (15.93) переписывается как

$$\int_a^x [u L(y) - y L^*(u)] dx = [p_2 (u y' - y' u) + (p_1 - p_2') u y]_a^x. \quad (15.95)$$

Оператор L^* называется *сопряженным* по отношению к оператору L . Умножая соотношение (15.94) на y и интегрируя полученный результат по частям, легко показать, что L является сопряженным оператором по отношению к оператору L^* . Таким образом, операторы L и L^* взаимно сопряжены.

Как и в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение

$$L^*(u) = 0 \quad (15.96)$$

будем называть сопряженным дифференциальному уравнению

$$L(y) = 0. \quad (15.97)$$

Если же $L = L^*$, то оператор L и дифференциальное уравнение $L(y) = 0$ будем называть *самосопряженными*. Сравнивая выражения (15.91) и (15.94), приходим к выводу, что $L = L^*$ тогда и только тогда, когда

$$2p'_2 - p_1 = p_1.$$

Таким образом, оператор L будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $p_1 = p'_2$. При этом

$$L = L^* = p_2 \frac{d^2}{dx^2} + p'_2 \frac{d}{dx} + p_0.$$

Как указывалось в § 15.4, любое дифференциальное уравнение вида (15.97) можно преобразовать в самосопряженную форму, умножив на функцию v , определяемую равенством (15.85).

Дифференцируя соотношение (15.95) по x , получаем так называемую формулу Лагранжа

$$uL(y) - yL^*(u) = \frac{d}{dx} [p_2(uy' - u'y) + (p_1 - p'_2)uy]. \quad (15.98)$$

Выражение в квадратных скобках называется *билинейной* дифференциальной формой от u и y , поскольку при заданном y это выражение линейно по u , в то время как при заданном u оно линейно по переменной y . Полагая в соотношении (15.95) $x = b$, получаем формулу Грина

$$\int_a^b [uL(y) - yL^*(u)] dx = [p_2(uy' - u'y) + (p_1 - p'_2)uy]_a^b. \quad (15.99)$$

Правая часть этой формулы может быть записана как

$$\begin{aligned} R = [p_2(uy' - u'y) + (p_1 - p'_2)uy]_a^b &= p_2(b)u(b)y'(b) - \\ &- p_2(b)u'(b)y(b) + [p_1(b) - p'_2(b)]u(b)y(a) - p_2(a)u(a)y'(a) + \\ &+ p_2(a)u'(a)y(a) - [p_1(a) - p'_2(a)]u(a)y(a) = u_b^T P y_b, \end{aligned} \quad (15.100)$$

где

$$u_b = \begin{bmatrix} u'(a) \\ u(a) \\ u'(b) \\ u(b) \end{bmatrix}, \quad y_b = \begin{bmatrix} y'(a) \\ y(a) \\ y'(b) \\ y(b) \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_2(a) & 0 & 0 \\ -p_2(a) & p_2'(a) - p_1(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_2(b) \\ 0 & 0 & p_2(b) & p_1(b) - p_2'(b) \end{bmatrix}. \quad (15.101)$$

Отметим, что

$$|P| = [p_2(a) p_2(b)]^2,$$

и, следовательно, матрица P — невырожденная. Подстановка выражения (15.100) в соотношение (15.99) дает

$$\int_a^b [uL(y) - yL^*(u)] dx = u_b^T P y_b. \quad (15.102)$$

Сопряженная однородная задача

Поскольку граничные условия общего вида (15.61) включают в себя линейные комбинации компонент $y'(a)$, $y(a)$, $y'(b)$ и $y(b)$ вектора y_b , введем следующее невырожденное линейное преобразование y_b в вектор Y :

$$Y = Ay_b, \quad (15.103)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}. \quad (15.104)$$

Заметим, что указанное преобразование может быть выполнено бесчисленным множеством способов в зависимости от выбора матрицы A . Правда, мы уже наложили некоторые ограничения на A , потребовав, чтобы первые две строки этой матрицы совпадали с коэффициентами α_{ij} в граничных условиях (15.61). Однако две нижние строки матрицы A остаются при этом произвольными, за исключением того, что они должны быть линейно независимы друг от друга и от двух верхних строк с тем, чтобы определитель $|A|$ не обращался в нуль. При заданном ненулевом векторе y_b две последние строки матрицы A можно выбрать так, чтобы придать любые требуемые значения компонентам Y_3 и Y_4 . Это замечание используется в дальнейшем при нахождении вида сопряженных граничных условий.

Поскольку $|A| \neq 0$, мы можем обратить преобразование (14.103) и получить

$$y_b = A^{-1}Y.$$

При этом формулу (15.102) можно переписать как

$$\int_a^b [uL(y) - yL^*(u)] dx = u_b^T P A^{-1} Y,$$

или

$$\int_a^b [uL(y) - yL^*(u)] dx = U^T Y = U_1 Y_1 + U_2 Y_2 + U_3 Y_3 + U_4 Y_4, \quad (15.105)$$

где

$$U^T = u_b^T P A^{-1}, \quad U = (A^{-1})^T P^T u_b. \quad (15.106)$$

Билинейная форма $U^T Y$ в соотношении (15.105) называется *каноническим представлением* билинейной формы в правой части тождества (15.102).

Для того чтобы найти граничные условия сопряженной задачи, положим в соотношении (15.105) $L(y) = 0$ и $L^*(u) = 0$ и получим

$$U_1 Y_1 + U_2 Y_2 + U_3 Y_3 + U_4 Y_4 = 0. \quad (15.107)$$

Из формулы (15.103) и граничных условий (15.61) следует, что однородные граничные условия, соответствующие (15.61), эквивалентны равенствам

$$Y_1 = \alpha_{11} y'(a) + \alpha_{12} y(a) + \alpha_{13} y'(b) + \alpha_{14} y(b) = 0, \quad (15.108a)$$

$$Y_2 = \alpha_{21} y'(a) + \alpha_{22} y(a) + \alpha_{23} y'(b) + \alpha_{24} y(b) = 0. \quad (15.108b)$$

С учетом равенств (15.108) соотношение (15.107) принимает вид

$$U_3 Y_3 + U_4 Y_4 = 0. \quad (15.109)$$

Как указывалось выше, при ненулевом векторе u_b последние две строки матрицы A могут быть выбраны так, чтобы компоненты Y_3 и Y_4 принимали любые требуемые значения, лишь бы Y_3 и Y_4 не обращались в нуль одновременно. В частности, нижние строки матрицы A можно выбрать из условия $Y_3 = 1$, $Y_4 = 0$. При этом из соотношения (15.103) следует, что $U_3 = 0$. Аналогичным образом, нижние строки матрицы A можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $Y_3 = 0$ и $Y_4 = 1$. Тогда из соотношения (15.103) вытекает, что $U_4 = 0$. Таким образом, задача, сопряженная задаче

$$L(y) = 0, \quad Y_1 = Y_2 = 0, \quad (15.110)$$

имеет вид

$$L^*(u) = 0, \quad U_3 = U_4 = 0, \quad (15.111)$$

где U_3 и U_4 связаны с компонентами $u'(a)$, $u(a)$, $u'(b)$ и $u(b)$ вектора u_b соотношением (15.106). Краевая задача (15.110) на-

зывается самосопряженной тогда и только тогда, когда $L = L^*$ и каждая из двух компонент U_3 и U_4 является линейной комбинацией $Y_1(u_b)$ и $Y_2(u_b)$, т. е. $u(x)$ пропорциональна $y(x)$.

Поскольку граничные условия (15.61) линейно независимы, по крайней мере один из определителей

$$\Delta_{ij} = \alpha_{1i}\alpha_{2j} - \alpha_{1j}\alpha_{2i}, \quad i \neq j$$

матриц-блоков

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{2j} \end{bmatrix}$$

должен быть отличным от нуля. Чтобы иметь возможность сравнить эти результаты с теми, которые были получены в предыдущем параграфе, предположим, что $\Delta_{13} \neq 0$. Далее, выберем такие Y_3 и Y_4 , чтобы строки матрицы A были линейно независимы. Например, положим $Y_3 = y(a)$ и $Y_4 = -y(b)$. При этом матрица A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (15.112)$$

Из формулы (15.112) следует, что $|A| = -\Delta_{13} \neq 0$. Тогда

$$(A^{-1})^T = -\frac{1}{\Delta_{13}} \begin{bmatrix} -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{21} & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ \Delta_{23} & -\Delta_{13} & \Delta_{12} & 0 \\ \Delta_{24} & 0 & -\Delta_{14} & \Delta_{13} \end{bmatrix}. \quad (15.113)$$

Подставляя матрицы (15.101) и (15.113) в соотношение (15.106), имеем

$$U = -\frac{1}{\Delta_{13}} \times \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{23}p_2(a) & 0 & \alpha_{21}p_2(b) \\ 0 & -\alpha_{13}p_2(a) & 0 & -\alpha_{11}p_2(b) \\ -\Delta_{13}p_2(a) & -\Delta_{23}p_2(a) & 0 & \Delta_{12}p_2(b) \\ 0 & -\Delta_{13}[p_2'(a) - p_1(a)] & -\Delta_{13}p_2(b) & -\Delta_{14}p_2(b) + \Delta_{13}[p_1(b) - p_2'(b)] \end{bmatrix} u_b. \quad (15.114)$$

Следовательно, граничные условия сопряженной задачи имеют вид

$$U_3 = p_2(a)u'(a) + [p_2'(a) - p_1(a) + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}p_2(a)]u(a) - \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}p_2(b)u(b) = 0, \quad (15.115a)$$

$$U_4 = p_2(b) u'(b) + \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{13}} p_2(a) u(a) - \\ - \left[p_1(b) - p_2'(b) - \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} p_2(b) \right] u(b) = 0, \quad (15.1156)$$

что полностью совпадает с граничными условиями (15.78), если учесть соотношения (15.63).

Для того чтобы краевая задача (15.60), (15.61) была самосопряженной, необходимо, чтобы $L = L^*$ и чтобы каждая из компонент U_3 и U_4 являлась линейной комбинацией $Y_1(u_b)$ и $Y_2(u_b)$. Как указывалось выше, $L = L^*$ тогда и только тогда, когда $p_1 = = p_2'$. При этом условия (15.115) принимают вид

$$u'(a) + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} u(a) - \frac{\Delta_{12} p_2(b)}{\Delta_{13} p_2(a)} u(b) = 0, \\ u'(b) + \frac{\Delta_{34} p_2(a)}{\Delta_{13} p_2(b)} u(a) + \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} u(b) = 0. \quad (15.116)$$

Разрешая равенства (15.61) относительно $y'(a)$ и $y'(b)$ при $\beta_1 = = \beta_2 = 0$ и заменяя y на u , получаем

$$u'(a) = - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} u(a) + \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{13}} u(b), \\ u'(b) = - \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}} u(a) - \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} u(b). \quad (15.117)$$

Сравнивая граничные условия (15.116) и (15.117), заключаем, что они совпадают тогда и только тогда, когда

$$p_2(a) \Delta_{34} = p_2(b) \Delta_{12}. \quad (15.118)$$

Соотношение (15.118) представляет собой равенство (15.83), полученное в предыдущем параграфе. Следовательно, краевая задача (15.60), (15.61) при $\Delta_{13} \neq 0$ самосопряжена тогда и только тогда, когда выполнены соотношение (15.118) и равенство $p_1 = = p_2'$.

Условие разрешимости

Определив сопряженную краевую задачу, вернемся к решению неоднородной задачи (15.60), (15.61). Используя определение (15.111), перепишем формулу Грина (5.105) в виде

$$\int_a^b u L(y) dx = Y_1 U_1 + Y_2 U_2. \quad (15.119)$$

В силу уравнения (15.60) и граничных условий (15.61) $L(y) = = f(x)$, $Y_1 = \beta_1$ и $Y_2 = \beta_2$; тогда из соотношения (15.119) вытекает, что условие разрешимости имеет вид

$$\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 = \int_a^b f(x) u(x) dx. \quad (15.120)$$

Для того чтобы сравнить условие (15.120) с условием разрешимости (15.88), полученным в предыдущем параграфе, используем связь U_1 и U_2 с вектором u , описываемую формулой (15.114), т. е.

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\alpha_{23}\rho_2(a)}{\Delta_{13}} u(a) - \frac{\alpha_{21}\rho_2(b)}{\Delta_{13}} u(b), \\ U_2 &= \frac{\alpha_{13}\rho_2(a)}{\Delta_{13}} u(a) + \frac{\alpha_{11}\rho_2(b)}{\Delta_{13}} u(b). \end{aligned} \quad (15.121)$$

При этом соотношение (15.120) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\Delta_{13}} \rho_2(q) u(b) - \frac{\alpha_{23}\beta_1 - \alpha_{13}\beta_2}{\Delta_{13}} u(a) \rho_2(a) = \\ = \int_a^b f(x) u(x) dx, \end{aligned}$$

что полностью совпадает с условием (15.88), если учесть соотношения (15.63).

Сравнивая вывод условия разрешимости в настоящем и предыдущем параграфах, можно заметить, что процедура, использованная в § 15.4, требует меньшего объема вычислений. Поэтому, если приходится иметь дело с граничными условиями общего вида, подобными (15.61), можно порекомендовать выразить какие-либо два из граничных значений (функции или производной) через два других, аналогично тому как это проделано в (15.62), и затем действовать, как в предыдущем параграфе.

15.6. Простая задача на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} y'' + [\lambda + \varepsilon g(x)] y &= 0, \quad \varepsilon \ll 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (15.122)$$

где λ — собственные числа. Поскольку значения λ зависят от малого параметра ε , будем искать равномерное разложение первого порядка с помощью метода растянутых параметров, раскладывая в ряды по степени ε не только решение y , но и собственные числа λ :

$$\begin{aligned} y &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots. \end{aligned} \quad (15.123)$$

Подставляя разложения (15.123) в уравнение и граничные условия (15.122), имеем

$$\begin{aligned} y_0'' + \varepsilon y_1'' + [\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon g](y_0 + \varepsilon y_1) + \dots &= 0, \\ y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots &= 0, \quad y_0(\pi) + \varepsilon y_1(\pi) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε дает для порядка ε^0 :

$$\begin{aligned} y_0'' + \lambda_0 y_0 &= 0, \\ y_0(0) = y_0(\pi) &= 0; \end{aligned} \quad (15.124)$$

для порядка ε :

$$y_1'' + \lambda_0 y_1 = -g y_0 - \lambda_1 y_0, \quad (15.125)$$

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0. \quad (15.126)$$

Общее решение дифференциального уравнения в (15.124) можно записать как

$$y_0 = c_1 \cos \sqrt{\lambda_0} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda_0} x.$$

Воспользовавшись краевым условием $y_0(0) = 0$, находим $c_1 = 0$. При этом второе граничное условие приводит к уравнению

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda_0} \pi = 0.$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение (т. е. при $c_2 \neq 0$), λ_0 должно удовлетворять уравнению

$$\sin \sqrt{\lambda_0} \pi = 0, \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda_0} \pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, с точностью до членов первого порядка малости собственные функции имеют вид

$$y_0 = \sin nx, \quad (15.127)$$

а собственные числа равны

$$\lambda_0 = n^2. \quad (15.128)$$

Подставляя выражения (15.127) и (15.128) в уравнение (15.125), получаем

$$y_1'' + n^2 y_1 = -g(x) \sin nx - \lambda_1 \sin nx. \quad (15.129)$$

Поскольку однородная задача, соответствующая (15.129), (15.126), имеет нетривиальное решение, неоднородная задача обладает решением, только если выполнено некоторое условие разрешимости. Вместо того чтобы применять общие результаты предыдущего параграфа, на наш взгляд, будет более поучительным вновь вывести это условие для рассматриваемого частного случая. В уравнении (15.129) $p_2 = 1$ и $p_1 = 0$, так что $p_2' = p_1$, т. е. условие (15.118) выполнено, и задача является самосопряженной. Следовательно, в качестве решения сопряженной задачи можно взять функцию $u = y_0 \sin nx$. Умножая уравнение (15.129) на u и интегрируя полученный результат от $x = 0$ до $x = \pi$, после некоторых преобразований получим

$$\int_0^\pi y_1 (u'' + n^2 u) dx + [y_1' u_1 - y_1 u_1'] = - \int_0^\pi [g(x) + \lambda_1] u \sin x dx. \quad (15.130)$$

Поскольку $u = \sin nx$ и $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$, левая часть соотношения (15.130) обращается в нуль, и условие разрешимости принимает вид

$$\int_0^{\pi} g(x) \sin^2 nx \, dx + \lambda_1 \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = 0.$$

С учетом того, что второй интеграл равен $\pi/2$, последнее соотношение переписывается как

$$\lambda_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin^2 nx \, dx. \quad (15.131)$$

Подставляя выражения (15.127), (15.128) и (15.131) в разложения (15.123), находим, что в первом приближении

$$y = \sin nx + O(\varepsilon),$$

$$\lambda = n^2 - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin^2 nx \, dx + O(\varepsilon^2). \quad (15.132)$$

15.7. Вырожденная задача на собственные значения

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$y'' + [\lambda + \varepsilon f(x)] y = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (15.133)$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$$

Как и в предыдущем параграфе, будем искать равномерное разложение первого порядка, раскладывая y и λ в ряды по степеням ε :

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (15.134)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$$

Подставляя разложение (15.134) в уравнение и граничные условия (15.133) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях этих соотношений, получаем для порядка ε^0 :

$$y_0'' + \lambda_0 y_0 = 0, \quad (15.135)$$

$$y_0(0) = y_0(1), \quad y_0'(0) = y_0'(1);$$

для порядка ε :

$$y_1'' + \lambda_0 y_1 = -(\lambda_1 + f) y_0, \quad (15.136)$$

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_1'(0) = y_1'(1).$$

Общее решение уравнения в (15.135) можно записать как

$$y_0 = a_1 \cos \sqrt{\lambda_0} x + a_2 \sin \sqrt{\lambda_0} x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (15.135), имеем

$$a_1 = a_1 \cos \sqrt{\lambda_0} + a_2 \sin \sqrt{\lambda_0},$$

$$a_2 = -a_1 \sin \sqrt{\lambda_0} + a_2 \cos \sqrt{\lambda_0},$$

или

$$(\cos \sqrt{\lambda_0} - 1) a_1 + \sin \sqrt{\lambda_0} a_2 = 0, \quad (15.137)$$

$$-\sin \sqrt{\lambda_0} a_1 + (\cos \sqrt{\lambda_0} - 1) a_2 = 0.$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы уравнений (15.137), ее определитель должен равняться нулю, т. е.

$$(\cos \sqrt{\lambda_0} - 1)^2 - \sin^2 \sqrt{\lambda_0} = 0, \quad (15.138a)$$

что при действительных λ_0 дает¹

$$\sin \sqrt{\lambda_0} = 0 \text{ или } \cos \sqrt{\lambda_0} = 1,$$

$$\text{откуда } \lambda_0 = 4n^2\pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15.138b)$$

причем из системы уравнений (15.137) вытекает, что a_1 и a_2 могут быть произвольными числами.

Тогда

$$y_0 = a_1 \cos 2\pi n x + a_2 \sin 2\pi n x \quad (15.139)$$

при произвольных a_1 и a_2 .

Таким образом, при любом $\lambda_0 = 4n^2\pi^2$, где $n \geq 1$, существуют две линейно независимые собственные функции, а именно $\cos 2\pi n x$ и $\sin 2\pi n x$. Задачи на собственные значения с двумя или более собственными функциями, отвечающими одному и тому же собственному числу, называются *вырожденными*. Вырождение является результатом симметрии и может быть снято, если эта симметрия будет нарушена. Покажем, что в данном примере асимметрию, устраняющую вырождение исходной задачи, может вносить член $f(x) y(x)$.

Подставляя решение (15.139) в уравнение (15.136) и учитывая, что $\lambda_0 = 4n^2\pi^2$, имеем

$$y'' + 4n^2\pi^2 y_1 = -(\lambda_1 + f)(a_1 \cos 2\pi n x + a_2 \sin 2\pi n x). \quad (15.140)$$

Поскольку задача для однородного уравнения, соответствующего (15.140), совпадает с задачей (15.135) и поэтому имеет нетривиальное решение, неоднородная задача относительно y_1 имеет решение, только если выполнены условия разрешимости. Для нахождения этих условий умножим уравнение (15.140) на $u(x)$ и проинтегрируем полученный результат от $x = 0$ до $x = 1$. В результате некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} & [y_1' u - y_1 u']_0^1 + \int_0^1 y_1 (u'' + 4n^2\pi^2 u) dx = \\ & = - \int_0^1 u (\lambda_1 + f) (a_1 \cos 2\pi n x + a_2 \sin 2\pi n x) dx. \end{aligned} \quad (15.141)$$

¹ Комплексных решений уравнение (15.138a) не имеет. — Прим. перев.

Для того чтобы найти вид уравнения и граничных условий сопряженной задачи, рассмотрим прежде всего задачу для однородного уравнения, соответствующего (15.140), т. е. положим в формуле (15.141) $\lambda_1 = 0$ и $f = 0$. Сопряженное уравнение получаем, как обычно, обращая в нуль коэффициент при y в интегральном члене в соотношении (15.141), т. е.

$$u'' + 4\pi^2 u = 0. \quad (15.142)$$

При этом соотношение (15.141) принимает вид

$$y_1'(1)u(1) - y_1(1)u'(1) - y_1'(0)u(0) + y_1(0)u'(0) = 0. \quad (15.143)$$

Но в силу граничных условий (15.136) $y_1(0) = y_1(1)$ и $y_1'(0) = -y_1'(1)$, и, следовательно, соотношение (15.143) можно переписать как

$$[u(1) - u(0)]y_1'(1) - [u'(1) - u'(0)]y_1(1) = 0. \quad (15.144)$$

Выбирая сопряженные граничные условия так, чтобы коэффициенты при $y_1(1)$ и $y_1'(1)$ обращались в нуль одновременно, имеем

$$u(1) = u(0), \quad u'(1) = u'(0). \quad (15.145)$$

Таким образом, однородная краевая задача, соответствующая (15.136), является самосопряженной, и поэтому

$$u = \sin 2\pi n x \text{ или } \cos 2\pi n x. \quad (15.146)$$

Определив сопряженную задачу, вернемся к неоднородной краевой задаче. Используя уравнение (15.142) и граничные условия (15.145), приведем формулу Грина (15.141) к виду

$$\int_0^1 u(x) [\lambda_1 + f(x)] (a_1 \cos 2\pi n x + a_2 \sin 2\pi n x) dx = 0, \quad (15.147)$$

откуда и получаются искомые условия разрешимости. Отметим, что соотношение (15.147) должно выполняться для всех допустимых функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям сопряженной задачи. В данном случае, если $n \geq 1$, $u(x) = \sin 2\pi n x$ или $\cos 2\pi n x$. Следовательно, неоднородная задача (15.140) разрешима относительно y_1 , только если условие (15.147) выполняется при $u(x) = \sin 2\pi n x$ и $u(x) = \cos 2\pi n x$.

Полагая в соотношении (15.147) функцию $u(x)$ равной $\sin 2\pi n x$ и $\cos 2\pi n x$ соответственно, получаем

$$f_{12} a_1 + (\lambda_1 + f_{11}) a_2 = 0 \quad (15.148)$$

$$\text{и} \quad (\lambda_1 + f_{22}) a_1 + f_{12} a_2 = 0, \quad (15.149)$$

где

$$f_{11} = 2 \int_0^1 f(x) \sin^2 2\pi n x dx,$$

$$f_{12} = 2 \int_0^1 f(x) \sin 4\pi n x dx,$$

$$f_{22} = 2 \int_0^1 f(x) \cos^2 2\pi n x dx.$$

Требование существования нетривиального решения системы уравнений (15.148), (15.149) приводит к условию обращения в нуль определителя этой системы, т. е.

$$\lambda_1^2 + (f_{11} + f_{22})\lambda_1 + f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda^{(1, 2)} = -\frac{1}{2} (f_{11} + f_{22}) \mp \frac{1}{2} [(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2]^{1/2}. \quad (15.150)$$

Тогда из уравнения (15.149) следует, что

$$a_2 = -\frac{\lambda_1^{(m)} + f_{22}}{f_{12}} a_1. \quad (15.151)$$

Таким образом, в первом приближении имеем либо

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \cos 2\pi n x - \frac{\lambda_1^{(1)} + f_{22}}{f_{12}} \sin 2\pi n x + O(\varepsilon), \\ \lambda^{(1)} &= 4n^2\pi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \{f_{11} + f_{22} + [(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2]^{1/2}\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (15.152)$$

либо

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \cos 2\pi n x - \frac{\lambda_1^{(2)} + f_{22}}{f_{12}} \sin 2\pi n x + O(\varepsilon), \\ \lambda^{(2)} &= 4n^2\pi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \{f_{11} + f_{22} - [(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2]^{1/2}\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15.153)$$

Следовательно, при условии, что $\lambda_1^{(1)}$ отличается от $\lambda_1^{(2)}$ (т. е. $f_{11} \neq f_{22}$ и $f_{12} \neq 0$), вырождение снимается, поскольку каждому из собственных чисел $\lambda^{(m)}$ соответствует только одна собственная функция $y^{(m)}$. Если $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, то вырождение может быть снято в высших приближениях теории возмущений.

15.8. Звуковые волны в канале с волнистыми стенками

Рассмотрим задачу о распространении линейных гармонических звуковых волн в плоском канале (волноводе), ширина которого меняется по синусоидальному закону. Математически задача ставится так:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \omega^2 \Phi = 0, \quad (15.154)$$

$$\Phi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (15.155)$$

$$\Phi_y = \epsilon k_w \Phi_x \cos k_w x \quad \text{при} \quad y = 1 + \epsilon \sin k_w x, \quad (15.156)$$

где ω и k_w — постоянные величины и ϵ — малый безразмерный параметр. За исключением формы граничных условий, данная задача является прототипом задач о распространении по волноводам электромагнитных и упругих волн.

В качестве первого шага для получения равномерно пригодного разложения первого порядка построим прямое разложение вида

$$\Phi = \Phi_0(x, y) + \epsilon \Phi_1(x, y) + \dots \quad (15.157)$$

Отметим, что граничное условие (15.156) поставлено при $y = 1 + \epsilon \sin k_w x$. Поэтому при подстановке разложения (15.157) в граничное условие малый параметр ϵ будет входить не только в коэффициенты при последовательных членах разложения, но и в аргумент функции Φ . Поскольку обычная процедура метода возмущений состоит в приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях ϵ , мы не сможем провести ее до тех пор, пока не исключим параметр ϵ из аргумента Φ . Чтобы добиться этого, проведем так называемый *перенос граничных условий*. В данном случае мы перенесем граничные условия с поверхности $y = 1 + \epsilon \sin k_w x$ на плоскость $y = 1$ с помощью тейлоровского степенного разложения. Запишем Φ_y при $y = 1 + \epsilon \sin k_w x$ в условии (15.156) как

$$\Phi_y(x, 1 + \epsilon \sin k_w x).$$

Раскладывая эту функцию в ряд Тейлора в окрестности $y = 1$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_y(x, 1 + \epsilon \sin k_w x) = & \Phi_y(x, 1) + \Phi_{yy}(x, 1) \epsilon \sin k_w x + \\ & + \frac{1}{2!} \Phi_{yyy}(x, 1) \epsilon^2 \sin^2 k_w x + \\ & + \frac{1}{3!} \Phi_{yyyy}(x, 1) \epsilon^3 \sin^3 k_w x + \dots \end{aligned}$$

Аналогичным образом раскладываем в ряд Тейлора производную Φ_x :

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, 1 + \epsilon \sin k_w x) = & \Phi_x(x, 1) + \Phi_{xy}(x, 1) \epsilon \sin k_w x + \\ & + \frac{1}{2!} \Phi_{xyy}(x, 1) \epsilon^2 \sin^2 k_w x + \\ & + \frac{1}{3!} \Phi_{xyyy}(x, 1) \epsilon^3 \sin^3 k_w x + \dots \end{aligned}$$

Подставляя полученные тейлоровские разложения в граничные условия (15.156), находим

$$\varphi_y(x, 1) + \varepsilon \varphi_{yy}(x, 1) \sin k_w x = \varepsilon k_w \varphi_x(x, 1) \cos k_w x + \dots \quad (15.158)$$

Тем самым мы совершили перенос граничных условий с поверхности $y = 1 + \varepsilon \sin k_w x$ на плоскость $y = 1$ и исключили ε из аргументов функций φ_x и φ_y . Теперь можно продолжить процесс построения прямого разложения.

Подставляя разложение (15.157) в уравнение (15.154) и граничные условия (15.155) и (15.158), имеем

$$\varphi_{0xx} + \varepsilon \varphi_{1xx} + \varphi_{0yy} + \varepsilon \varphi_{1yy} + \omega^2 \varphi_0 + \varepsilon \omega^2 \varphi_1 + \dots = 0,$$

$$\varphi_{0y}(x, 0) + \varepsilon \varphi_{1y}(x, 0) + \dots = 0,$$

$$\varphi_{0y}(x, 1) + \varepsilon \varphi_{1y}(x, 1) + \varepsilon \varphi_{0yy}(x, 1) \sin k_w x = \varepsilon k_w \varphi_{0x}(x, 1) \cos k_w x + \dots$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях каждого из написанных выше соотношений приводит к последовательности задач следующего вида:

для порядка ε^0 :

$$\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \omega^2 \varphi_0 = 0, \quad (15.159)$$

$$\varphi_{0y}(x, 0) = 0, \quad (15.160)$$

$$\varphi_{0y}(x, 1) = 0; \quad (15.161)$$

для порядка ε :

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} + \omega^2 \varphi_1 = 0, \quad (15.162)$$

$$\varphi_{1y}(x, 0) = 0, \quad (15.163)$$

$$\varphi_{1y}(x, 1) = -\varphi_{0yy}(x, 1) \sin k_w x + k_w \varphi_{0x}(x, 1) \cos k_w x. \quad (15.164)$$

Поскольку уравнение (15.159) имеет постоянные коэффициенты, соответствующая задача может быть решена с помощью метода разделения переменных. С этой целью положим

$$\varphi_0 = X(x) Y(y). \quad (15.165)$$

В результате имеем

$$X''Y + XY'' + \omega^2 XY = 0, \quad (15.166)$$

$$X(x) Y'(0) = 0, \quad (15.167)$$

$$X(x) Y'(1) = 0. \quad (15.168)$$

Разделив (15.166) на произведение XY и перегруппировав члены уравнения, получим

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \omega^2. \quad (15.169)$$

Поскольку левая часть (15.169) зависит только от x , а правая часть только от y , обе части этого уравнения должны равняться одной и той же постоянной, т. е.

$$-\frac{X''}{X} = b, \quad (15.170)$$

$$\frac{Y''}{Y} + \omega^2 = b. \quad (15.171)$$

Уравнение (15.170) можно записать как

$$X'' + bX = 0.$$

В случае распространяющихся волн функция X должна меняться по синусоидальному закону, поэтому b должно быть положительным.

Обычно полагают $b = k^2$, так что

$$X = \exp(\pm ikx), \quad (15.172)$$

где k — так называемое волновое число. Полагая $b = k^2$, перепишем уравнение (15.171) в виде

$$Y'' + (\omega^2 - k^2) Y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Y = c_1 \sin \sqrt{\omega^2 - k^2} y + c_2 \cos \sqrt{\omega^2 - k^2} y. \quad (15.173)$$

Поскольку $X(x)$ не обращается в нуль тождественно, из соотношений (15.167) и (15.168) следует, что

$$Y'(0) = Y'(1) = 0. \quad (15.174)$$

Подчиняя этим условиям решение (15.173), находим, что $c_1 = 0$ и $\sqrt{\omega^2 - k^2} = \pi n$, или

$$k_n^2 = \omega^2 - \pi^2 n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.175)$$

Тогда

$$Y = \cos \pi n y. \quad (15.176)$$

Подставляя выражения (15.172) и (15.176) в формулу (15.165), имеем

$$\varphi_0 = e^{ik_n x} \cos \pi n y \text{ или } e^{-ik_n x} \cos \pi n y, \quad (15.177)$$

где одно из решений соответствует волне, распространяющейся в прямом направлении, а другое решение — волне, распространяющейся в обратном направлении. Решение, соответствующее заданному номеру n , называется n -й модой.

Возьмем решение со знаком плюс в показателе экспоненты. Подставляя его в граничное условие (15.164), имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{1y}(x, 1) &= (-1)^n n^2 \pi^2 e^{ik_n x} \sin k_w x + i(-1)^n k_n k_w e^{ik_n x} \cos k_w x = \\ &= (-1)^n n^2 \pi^2 e^{ik_n x} \frac{(-i)}{2} (e^{ik_w x} - e^{-ik_w x}) + \\ &\quad + i(-1)^n k_n k_w e^{ik_n x} \cdot \frac{1}{2} (e^{ik_w x} + e^{-ik_w x}) = \\ &= \zeta_1 e^{i(k_n + k_w)x} + \zeta_2 e^{i(k_n - k_w)x},\end{aligned}\quad (15.178)$$

$$\text{где } \zeta_1 = \frac{1}{2}(-1)^n i(k_n k_w - n^2 \pi^2), \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}(-1)^n i(k_n k_w + n^2 \pi^2). \quad (15.179)$$

Чтобы найти решение задачи (15.162), (15.163), (15.178) относительно φ_1 , заметим, что граничное условие (15.178) неоднородно и его форма позволяет воспользоваться разделением переменных в следующем виде:

$$\varphi_1 = \Phi_1(y) e^{i(k_n + k_w)x} + \Phi_2(y) e^{i(k_n - k_w)x}. \quad (15.180)$$

Подставляя выражение (15.180) в уравнение (15.162) и граничные условия (15.163) и (15.178), имеем

$$\begin{aligned}[\Phi_1'' + \alpha_1^2 \Phi_1] e^{i(k_n + k_w)x} + [\Phi_2'' + \alpha_2^2 \Phi_2] e^{i(k_n - k_w)x} &= 0, \\ \Phi_1'(0) e^{i(k_n + k_w)x} + \Phi_2'(0) e^{i(k_n - k_w)x} &= 0, \\ \Phi_1'(1) e^{i(k_n + k_w)x} + \Phi_2'(1) e^{i(k_n - k_w)x} &= \zeta_1 e^{i(k_n + k_w)x} + \zeta_2 e^{i(k_n - k_w)x},\end{aligned}$$

где $\alpha_1^2 = \omega^2 - (k_n + k_w)^2$, $\alpha_2^2 = \omega^2 - (k_n - k_w)^2$. (15.181)

Приравнявая коэффициенты при каждой из экспонент в обеих частях этих соотношений, получаем

$$\Phi_1'' + \alpha_1^2 \Phi_1 = 0, \quad (15.182)$$

$$\Phi_1'(0) = 0, \quad \Phi_1'(1) = \zeta_1;$$

$$\Phi_2'' + \alpha_2^2 \Phi_2 = 0, \quad (15.183)$$

$$\Phi_2'(0) = 0, \quad \Phi_2'(1) = \zeta_2.$$

Общее решение уравнения (15.182) записывается как

$$\Phi_1 = c_1 \cos \alpha_1 y + c_2 \sin \alpha_1 y.$$

С учетом граничных условий (15.182) находим, что

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -\zeta_1 \alpha_1^{-1} \sin^{-1} \alpha_1$$

и, следовательно,

$$\Phi_1 = -\frac{\zeta_1 \cos \alpha_1 y}{\alpha_1 \sin \alpha_1}.$$

Аналогичным образом, решение задачи (15.183) можно представить в виде

$$\Phi_2 = -\frac{\zeta_2 \cos \alpha_2 y}{\alpha_2 \sin \alpha_2}.$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_1 = -\frac{\zeta_1 \cos \alpha_1 y}{\alpha_1 \sin \alpha_1} e^{i(k_n + k_w)x} - \frac{\zeta_2 \cos \alpha_2 y}{\alpha_2 \sin \alpha_2} e^{i(k_n - k_w)x}. \quad (15.184)$$

Подставляя теперь решения (15.177) и (15.184) в разложение (15.157), получаем

$$\begin{aligned} \varphi = \cos \pi n y e^{i k_n x} - \varepsilon \left[\frac{\zeta_1 \cos \alpha_1 y}{\alpha_1 \sin \alpha_1} e^{i(k_n + k_w)x} + \right. \\ \left. + \frac{\zeta_2 \cos \alpha_2 y}{\alpha_2 \sin \alpha_2} e^{i(k_n - k_w)x} \right] + \dots \end{aligned} \quad (15.185)$$

Анализ разложения (15.185) показывает, что оно становится непригодным при $\sin \alpha_1 = O(\varepsilon)$ или $\sin \alpha_2 = O(\varepsilon)$. Если $\sin \alpha_1$ или $\sin \alpha_2$ обращается в нуль, второй член разложения (15.185) оказывается неограниченным. При $\sin \alpha_i = O(\varepsilon)$ появляются члены с малыми знаменателями, и разложение становится неравномерным.

Поскольку равенство $\sin \alpha_i = 0$ означает, что $\alpha_i = \pi m$, $m = 0, 1, \dots$, пригодность прямого разложения нарушается при условиях

$$\omega^2 - (k_n + k_w)^2 \approx \pi^2 m^2 \quad \text{или} \quad \omega^2 - (k_n - k_w)^2 \approx \pi^2 m^2 \quad (15.186)$$

в соответствии с равенствами (15.181). Учитывая дисперсионное соотношение (15.175), формулам (15.186) можно придать вид

$$(k_n + k_w)^2 \approx k_m^2 \quad \text{или} \quad (k_n - k_w)^2 \approx k_m^2,$$

$$\text{или} \quad k_w \approx \pm k_n \pm k_m. \quad (15.187)$$

Иначе говоря, прямое разложение перестает быть справедливым тогда, когда волновое число, характеризующее «волнистость» стенки волновода, равно сумме или разности волновых чисел k_m и k_n двух распространяющихся мод, т. е. при наличии комбинационного резонанса.

Для того чтобы найти разложение, пригодное при $k_w \approx \approx k_n - k_m$, введем параметр расстройки σ по формуле

$$k_w = k_n - k_m + \varepsilon \sigma. \quad (15.188)$$

Кроме того, будем использовать метод многих масштабов и искать решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \varepsilon) = \varphi(x_0, x_1, y, \varepsilon) = \varphi_0(x_0, x_1, y) + \\ + \varepsilon \varphi_1(x_0, x_1, y) + \dots, \end{aligned} \quad (15.189)$$

где $x_0 = x$ и $x_1 = \varepsilon x$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} + \dots \quad (15.190)$$

Подставляя разложения (15.189) и (15.190) в уравнения (15.154) и граничные условия (15.155) и (15.158) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем для порядка ε^0 :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \omega^2 \varphi_0 = 0, \quad (15.191)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 1;$$

для порядка ε :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \omega^2 \varphi_1 = -2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_0 \partial x_1}, \quad (15.192)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad (15.193)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \sin k_w x_0 + k_w \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \cos k_w x_0 \text{ при } y = 1, \quad (15.194)$$

где $\sin k_w x$ и $\cos k_w x$ выражены через переменную x_0 в предположении, что величина k_w достаточно далека от нуля.

Решение (15.191) можно получить с помощью метода разделения переменных, как это сделано выше. Однако теперь вместо решения (15.177), содержащего одну моду, выберем φ_0 в виде, содержащем две взаимодействующие моды, т. е. запишем решение в виде

$$\varphi_0 = A_n(x_1) \cos \pi n y e^{ik_n x_0} + A_m(x_1) \cos \pi m y e^{ik_m x_0}, \quad (15.195)$$

где k_m и k_n определены соотношением (15.175), а функции A_m и A_n подлежат определению в дальнейшем из условия разрешимости задачи второго приближения. Подставляя выражение (15.195) в уравнение (15.192) и граничное условие (15.194), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \omega^2 \varphi_1 = & -2ik_n A_n' \cos \pi n y e^{ik_n x_0} - \\ & -2ik_m A_m' \cos \pi m y e^{ik_m x_0}, \end{aligned} \quad (15.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = & \zeta_{1n} A_n e^{i(k_n + k_w)x_0} + \zeta_{2n} A_n e^{i(k_n - k_w)x_0} + \\ & + \zeta_{1m} A_m e^{i(k_m + k_w)x_0} + \zeta_{2m} A_m e^{i(k_m - k_w)x_0} \text{ при } y = 1, \end{aligned} \quad (15.197)$$

где ζ_{1n} , ζ_{2n} и ζ_{1m} , ζ_{2m} определены соотношениями (15.179) при значениях индекса, равных соответственно n и m .

Для того чтобы найти вид условий разрешимости для задачи второго приближения, подставим прежде всего соотношение (15.188) в граничное условие (15.197), с тем чтобы преобразовать члены с малыми знаменателями в секулярные члены. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = & \zeta_{1n} A_n e^{i(2k_n - k_m + \varepsilon \sigma) x_0} + \zeta_{2n} A_n e^{i(k_m - \varepsilon \sigma) x_0} + \\ & + \zeta_{1m} A_m e^{i(k_n + \varepsilon \sigma) x_0} + \zeta_{2m} A_m e^{i(2k_m - k_n - \varepsilon \sigma) x_0}, \quad y = 1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = & \zeta_{1n} A_n e^{i\sigma x_1} e^{i(2k_n - k_m) x_0} + \zeta_{2n} A_n e^{-i\sigma x_1} e^{ik_m x_0} + \\ & + \zeta_{1m} A_m e^{i\sigma x_1} e^{ik_n x_0} + \zeta_{2m} A_m e^{-i\sigma x_1} e^{i(2k_m - k_n) x_0}, \quad y = 1. \quad (15.198) \end{aligned}$$

Заметим, что только члены, пропорциональные $\exp(ik_m x_0)$ и $\exp(ik_n x_0)$ в правых частях (15.196) и (15.198), могут привести к несовместности, поэтому условия разрешимости должны быть наложены лишь на эти слагаемые. Эти условия разрешимости можно получить, если искать частное решение, соответствующее указанным членам, в виде

$$\Phi_1 = \Phi_n(x_1, y) e^{ik_n x_0} + \Phi_m(x_1, y) e^{ik_m x_0}. \quad (15.199)$$

Подставляя выражение (15.199) в уравнение (15.196) и граничные условия (15.193) и (15.198) и приравнявая коэффициенты при $\exp(ik_n x_0)$ и $\exp(ik_m x_0)$ в обеих частях этих соотношений, с учетом формулы (15.175) получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \pi^2 n^2 \Phi_n = -2ik_n A'_n \cos \pi n y, \quad (15.200)$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \zeta_{1n} A_m e^{i\sigma x_1}, \quad y = 1;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} + \pi^2 m^2 \Phi_m = -2ik_m A'_m \cos \pi m y, \quad (15.201)$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = \zeta_{2n} A_n e^{-i\sigma x_1}, \quad y = 1.$$

Таким образом, нахождение условий разрешимости для Φ_1 сводится к определению условий разрешимости для функций Φ_n и Φ_m .

Уравнение задачи (15.200) самосопряженное благодаря тому, что в этом уравнении $p_2 = 1$ и $p_1 = 0$. Поэтому решение сопряженной задачи можно выбрать в виде $u(y) = \cos \pi n y$. Умножая ука-

занное уравнение на $u(y)$ и интегрируя полученный результат по частям от $y = 0$ до $y = 1$, получаем

$$\int_0^1 (u'' + \pi^2 n^2 u) \Phi_n dy + \left[\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} u - \Phi_n u' \right]_0^1 = 2ik_n A_n' \int_0^1 u \cos \pi n y dy. \quad (15.202)$$

Поскольку $u = \cos \pi n y$, соотношение (15.202) переходит в равенство

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \cos \pi n y \Big|_0^1 = -i\delta k_n A_n',$$

где $\delta = 1$ при $n \geq 1$ и $\delta = 2$ при $n = 0$. Используя граничные условия задачи (15.200), имеем

$$\begin{aligned} (-1)^n \zeta_{1m} A_m e^{i\sigma x_1} &= -i\delta k_n A_n', \\ \text{или} \quad A_n' &= (-1)^n i \zeta_{1m} k_n^{-1} \delta^{-1} A_m e^{i\sigma x_1}. \end{aligned} \quad (15.203)$$

Аналогичным образом, при $m \neq 0$ можно найти условие разрешимости задачи (15.201)

$$A_m' = (-1)^m i \zeta_{2n} k_m^{-1} A_n e^{-i\sigma x_1}. \quad (15.204)$$

Если положить

$$A_n = a_n \exp(i\gamma_1 x_1), \quad A_m = a_m \exp(i\gamma_2 x_1), \quad (15.205)$$

где $a_n, a_m, \gamma_1, \gamma_2$ — постоянные величины, то из уравнений (15.204), (15.205) следует, что

$$i\gamma_1 a_n = (-1)^n i \zeta_{1m} k_n^{-1} \delta^{-1} a_m, \quad (15.206)$$

$$i\gamma_2 a_m = (-1)^m i \zeta_{2n} k_m^{-1} a_n, \quad (15.207)$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \sigma. \quad (15.208)$$

Исключение γ_2 и a_m из системы уравнений (15.206)—(15.208) дает

$$\gamma_1(\gamma_1 - \sigma) = (-1)^{n+m} (k_n k_m \delta)^{-1} \zeta_{1m} \zeta_{2n},$$

$$\text{или} \quad \gamma_1^2 - \sigma \gamma_1 - (-1)^{n+m} (k_n k_m \delta)^{-1} \zeta_{1m} \zeta_{2n} = 0.$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \sigma \mp \left[\frac{1}{4} \sigma^2 + (-1)^{n+m} (k_n k_m \delta)^{-1} \zeta_{1m} \zeta_{2n} \right]^{1/2}. \quad (15.209)$$

Подстановка этих выражений в (15.205) позволяет определить зависимость амплитуд двух взаимодействующих мод от медленной переменной x_1 .

15.9. Колебания мембраны, близкой по форме к кругу

Рассмотрим малые колебания мембраны, форма которой близка к кругу. В безразмерном виде математическая постановка задачи сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (15.210)$$

$$|w| < \infty \text{ при } r = 0, \quad (15.211)$$

$$w = 0 \text{ при } r = 1 + \varepsilon f(\theta), \quad (15.212)$$

причем средний радиус мембраны равен 1, так что

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0. \quad (15.213)$$

Рассматривая гармонические по времени колебания, положим

$$w(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta) \cos(\omega t + \tau), \quad (15.214)$$

где ω — безразмерная частота. Подставляя выражение (15.214) в условия задачи (15.210)—(15.212), для амплитуды колебаний получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (15.215)$$

$$|\varphi| < \infty \text{ при } r = 0, \quad (15.216)$$

$$\varphi = 0 \text{ при } r = 1 + \varepsilon f(\theta). \quad (15.217)$$

Как и в предыдущем параграфе, необходимо перенести граничные условия с линии $r = 1 + \varepsilon f(\theta)$ на окружность $r = 1$ с помощью разложения в ряд Тейлора. Таким образом, условие (15.217) перепишем в виде

$$\varphi(1, \theta) + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}(1, \theta) f(\theta) + \dots = 0. \quad (15.218)$$

Для того чтобы построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции φ , используем метод растянутых параметров, раскладывая φ и ω в ряды следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0(r, \theta) + \varepsilon \varphi_1(r, \theta) + \dots, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \end{aligned} \quad (15.219)$$

Подставляя разложение (15.219) в уравнение (15.215) и условия (15.216) и (15.218) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

для порядка ϵ^0 :

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} + \omega_0^2 \varphi_0 = 0, \quad (15.220)$$

$$|\varphi_0(0, \theta)| < \infty, \quad (15.221)$$

$$\varphi_0(1, \theta) = 0; \quad (15.222)$$

для порядка ϵ^1 :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = -2\omega_0 \omega_1 \varphi_0, \quad (15.223)$$

$$|\varphi_1(0, \theta)| < \infty \quad (15.224)$$

$$\varphi_1(1, 0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}(1, \theta) f(\theta). \quad (15.225)$$

Решение задачи нулевого порядка можно получить с помощью метода разделения переменных. Так, полагая в уравнении (15.220)

$$\varphi_0 = R(r) \Theta(\theta), \quad (15.226)$$

имеем

$$R''\Theta + \frac{1}{r} R'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' + \omega_0^2 R\Theta = 0,$$

или

$$\frac{1}{R} (r^2 R'' + rR' + r^2 \omega_0^2 R) + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

Следовательно,

$$\Theta'' = -\beta \Theta, \quad r^2 R'' + rR' + \omega_0^2 r^2 R = \beta R.$$

Решение уравнения для функции Θ можно представить как

$$\Theta = \tilde{c}_1 \cos \sqrt{\beta} \theta + \tilde{c}_2 \sin \sqrt{\beta} \theta.$$

Для однозначности Θ , а значит, и φ_0 следует положить $\sqrt{\beta} = n$, где n — некоторое целое число.

Тогда

$$\Theta = \tilde{c}_1 \cos n\theta + \tilde{c}_2 \sin n\theta, \quad (15.227)$$

и уравнение для функции R принимает вид

$$r^2 R'' + rR' + (\omega_0^2 r^2 - n^2) R = 0.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Бесселя порядка n ; его общее решение записывается в виде

$$R = c_3 J_n(\omega_0 r) + c_4 Y_n(\omega_0 r). \quad (15.228)$$

Подставляя выражение (15.226) в условия (15.221) и (15.222), получаем граничные условия для функции R : $|R(0)| < \infty$ и $R(1) = 0$. Поскольку при $r \rightarrow 0$ $Y_n \rightarrow \infty$ (см. § 13.3), условие

$|R(0)| < \infty$ требует, чтобы $c_4 = 0$. При этом граничное условие $R(1) = 0$ приводит к характеристическому уравнению

$$J_n(\omega_0) = 0. \quad (15.229)$$

Таким образом, имеем

$$\omega_0 = \Omega_{nm}, \quad (15.230)$$

где Ω_{nm} — корни уравнения $J_n(\Omega) = 0$. Следовательно,

$$\varphi_0 = J_n(\Omega_{nm}r) [c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta],$$

$$\text{или} \quad \varphi_0 = J_n(\Omega_{nm}r) (A_{nm}e^{in\theta} + \bar{A}_{nm}e^{-in\theta}), \quad (15.231)$$

где A_{nm} — комплексные постоянные. Решение вида (15.231) при заданных n и m называется nm -й модой; полное же решение задачи содержит сумму вкладов всех мод. Исследуем теперь влияние отклонения формы мембраны от круга на частоту Ω_{nm} nm -й моды.

Заметим, что при заданной частоте Ω_{nm} существуют две колебательные моды, а именно

$$J_n(\Omega_{nm}r) \cos n\theta \quad \text{и} \quad J_n(\Omega_{nm}r) \sin n\theta.$$

Следовательно, о круглой мембране можно говорить как о вырожденной системе, поскольку одному собственному значению (частоте) соответствуют две линейно независимые собственные функции (моды). Вырождение является результатом высокой симметрии системы и, как показано ниже, может быть снято при нарушении симметрии.

Подставляя выражение (15.231) в уравнение (15.223) и граничное условие (15.225) и полагая $\omega_0 = \Omega_{nm}$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \Omega_{nm}^2 \varphi_1 = \\ & = -2\Omega_{nm}\omega_1 J_n(\Omega_{nm}r) (A_{nm}e^{in\theta} + \bar{A}_{nm}e^{-in\theta}), \end{aligned} \quad (15.232)$$

$$\varphi_1(1, \theta) = -\Omega_{nm} J'_n(\Omega_{nm}) f(\theta) [A_{nm}e^{in\theta} + \bar{A}_{nm}e^{-in\theta}]. \quad (15.233)$$

Далее, разложим функцию $f(\theta)$ в ряд Фурье:

$$f(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} f_q e^{iq\theta}, \quad f_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-iq\theta} d\theta, \quad (15.234)$$

где $f_0 = 0$ в соответствии с условием (15.213). Следуя методу разделения переменных, представим в виде ряда Фурье и искомую функцию φ_1 :

$$\varphi_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k(r) e^{ik\theta}. \quad (15.235)$$

Подставляя ряд (15.235) в уравнение (15.232), имеем

$$\sum_k \left[\Phi_k'' + \frac{1}{r} \Phi_k' + \left(\Omega_{nm}^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) \Phi_k \right] e^{ik\theta} = \\ = -2\Omega_{nm}\omega_1 J_n(\Omega_{nm}r) [A_{nm}e^{in\theta} + \bar{A}_{nm}e^{-in\theta}],$$

что после умножения на $\exp(-is\theta)$ и интегрирования от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ дает

$$\Phi_n'' + \frac{1}{r} \Phi_n' + \left(\Omega_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n = -2\Omega_{nm}\omega_1 A_{nm} J_n(\Omega_{nm}r), \quad (15.236)$$

$$\Phi_s'' + \frac{1}{r} \Phi_s' + \left(\Omega_{nm}^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) \Phi_s = 0, \quad s \neq n. \quad (15.237)$$

Аналогичным образом, подставляя ряды (15.234) и (15.235) в граничное условие (15.233), имеем

$$\sum_k \Phi_k(1) e^{ik\theta} = -\Omega_{nm} J_n'(\Omega_{nm}) \sum_k [A_{nm} f_q e^{i(q+n)\theta} + \\ + \bar{A}_{nm} f_q e^{i(q-n)\theta}],$$

что после умножения на $\exp(-is\theta)$ и интегрирования от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ дает

$$\Phi_s(1) = -\Omega_{nm} J_n'(\Omega_{nm}) [A_{nm} f_{s-n} + \bar{A}_{nm} f_{s+n}]. \quad (15.238)$$

Наконец, подставляя ряд (15.235) в условие (15.224) приходим к выводу, что функции $\Phi_s(r)$ должны удовлетворять условию ограниченности:

$$|\Phi_s(0)| < \infty. \quad (15.239)$$

В случае если $s \neq n$, задача (15.237)–(15.239) для функции Φ_s имеет единственное решение, потому что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Поскольку мы не собираемся продолжать разложение до членов более высоких порядков по ε , нет необходимости находить функции Φ_s . При $s = n$ однородная задача, соответствующая (15.236), (15.238), (15.239), имеет нетривиальное решение, и поэтому неоднородная задача имеет решение только при выполнении некоторого условия разрешимости. Для нахождения упомянутого условия умножим уравнение (15.236) на r , с тем чтобы это уравнение можно было переписать в самосопряженной форме

$$(r\Phi_n')' + \left(\Omega_{nm}^2 r - \frac{n^2}{r} \right) \Phi_n = -2\Omega_{nm}\omega_1 A_{nm} r J_n(\Omega_{nm}r). \quad (15.240)$$

Кроме того, полагая в граничном условии (15.238) $s = n$, имеем

$$\Phi_n(1) = -\Omega_{nm} f_{2n} J'_n(\Omega_{nm} \bar{A}_{nm}), \quad (15.241)$$

поскольку $f_0 = 0$ в соответствии с (15.213).

Заметим, что уравнение (15.240) имеет регулярную особую точку в начале координат, и поэтому вместо условия типа (15.61) в роли граничного условия в этой точке выступает условие ограниченности (15.239). В связи с этим придется рассмотреть построение сопряженной задачи и вывод условия разрешимости более подробно.

Умножая уравнение (15.240) на $u(r)$ и интегрируя полученный результат по частям в пределах от $r = 0$ до $r = 1$, находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_n \left[(ru')' + \left(\Omega_{nm}^2 r - \frac{n^2}{r} \right) u \right] dr + [ru\Phi'_n - ru'\Phi_n]_0^1 = \\ = -2\Omega_{nm}\omega_1 A_{nm} \int_0^1 ru J'_n(\Omega_{nm} r) dr. \end{aligned} \quad (15.242)$$

Для того чтобы определить вид уравнения и граничных условий сопряженной задачи, прежде всего используем формулу (15.242) для случая однородного уравнения, соответствующего (15.240) (т. е. положим правую часть (15.242) равной нулю). Как и ранее, полагая равным нулю коэффициент при Φ_n в подынтегральном выражении в левой части (15.242), получаем следующее сопряженное уравнение:

$$(ru')' + \left(\Omega_{nm}^2 r - \frac{n^2}{r} \right) u = 0. \quad (15.243)$$

Учитывая, кроме того, граничные условия однородной задачи $\Phi_n(1) = 0$ и $|\Phi_n(0)| < \infty$, приведем соотношение (15.242) к виду

$$u(1)\Phi'_n(1) - \lim_{r \rightarrow 0} [ru\Phi'_n - ru'\Phi_n] = 0. \quad (15.244)$$

Выберем сопряженные граничные условия так, чтобы оба члена в соотношении (15.244) обращались в нуль независимо, т. е.

$$u(1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} [ru\Phi'_n - ru'\Phi_n] = 0.$$

Второе условие удовлетворяется, если функция u ограничена при $r \rightarrow 0$. Таким образом, сопряженные граничные условия, которым подчинена функция u , имеют вид

$$u(1) = 0, \quad |u(0)| < \infty. \quad (15.245)$$

Следовательно, рассматриваемая однородная задача является самосопряженной, и в качестве решения сопряженной задачи можно взять функцию $u = J_n(\Omega_{nm} r)$.

Возвращаясь к неоднородной задаче, из соотношения (15.249) получаем искомое условие разрешимости

$$\Omega_{nm} J'_n(\Omega_{nm}) f_{2n} \bar{A}_{nm} = -2\Omega_{nm} \omega_1 A_{nm} \int_0^1 r J_n^2(\Omega_{nm} r) dr. \quad (15.246)$$

Для вычисления интеграла в левой части (15.246) применим формулу

$$\int_0^r r J_n^2(\alpha r) dr = \frac{1}{2} r^2 J_n'^2(\alpha r) + \frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2}\right) J_n^2(\alpha r). \quad (15.247)$$

Полагая в (15.247) $\alpha = \Omega_{nm}$ и используя тот факт, что $J_n(\Omega_{nm}) = 0$, находим

$$\int_0^1 r J_n^2(\Omega_{nm} r) dr = \frac{1}{2} J_n'^2(\Omega_{nm}). \quad (15.248)$$

Подстановка соотношения (15.248) в условие (15.246) дает

$$\Omega_{nm} f_{2n} \bar{A}_{nm} = -\omega_1 A_{nm}. \quad (15.249)$$

Для того чтобы исследовать соотношение (15.249), представим коэффициенты A_{nm} и f_{2n} в показательной форме, а именно

$$A_{nm} = \frac{1}{2} a_{nm} e^{i\beta_{nm}}, \quad f_{2n} = F_{2n} e^{i\nu_{2n}}. \quad (15.250)$$

В результате получим

$$\omega_1 = -\Omega_{nm} F_{2n} e^{i(\nu_{2n} - 2\beta_{nm})}. \quad (15.251)$$

Поскольку поправка ω_1 к частоте является вещественной величиной, то из отношения (15.251) следует, что

$$\nu_{2n} - 2\beta_{nm} = 0 \text{ или } \pi.$$

Следовательно,

$$\beta_{nm} = \frac{\nu_{2n}}{2} \text{ или } \frac{1}{2}(\nu_{2n} - \pi), \quad (15.252)$$

и соотношение (15.251) может принять одну из двух форм

$$\omega_1 = -\Omega_{nm} F_{2n} \text{ или } \omega_1 = \Omega_{nm} F_{2n}. \quad (15.253)$$

Подставляя выражения (15.250), (15.252) и (15.253) в формулу (15.231), полученный результат — в разложение (15.219) и, на-

конец, разложение (15.219) — в формулу (15.214), получаем в первом приближении

$$\omega^{(1)} = a_{nm} J_n(\Omega_{nm} r) \cos\left(n\theta + \frac{1}{2} v_{2n}\right) \cos(\omega^{(1)} t + \tau) + \dots, \quad (15.254)$$

$$\omega^{(2)} = a_{nm} J_n(\Omega_{nm} r) \sin\left(n\theta + \frac{1}{2} v_{2n}\right) \cos(\omega^{(2)} t + \tau) + \dots, \quad (15.255)$$

где

$$\omega^{(1)} = \Omega_{nm} (1 - \varepsilon F_{2n}) + \dots, \quad (15.256)$$

$$\omega^{(2)} = \Omega_{nm} (1 + \varepsilon F_{2n}) + \dots.$$

Заметим, что в случае круглой мембраны одному собственному числу Ω_{nm} соответствуют две линейно независимые собственные функции. Однако в случае почти круглой мембраны различные собственные функции отвечают различным собственным числам $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, если $F_{2n} \neq 0$. Если же $F_{2n} = 0$, то для того, чтобы снять вырождение, нам необходимо продолжить разложение до членов более высокого порядка.

15.10. Краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка

В этом параграфе рассмотрим вопрос о построении сопряженной задачи и найдем условия разрешимости краевых задач для линейных неоднородных уравнений четвертого порядка при неоднородных граничных условиях. Точнее говоря, мы будем исследовать задачу

$$p_4(x) \varphi^{IV} + p_3(x) \varphi''' + p_2(x) \varphi'' + p_1(x) \varphi' + p_0(x) \varphi = f(x), \quad (15.257)$$

$$\varphi(0) = \beta_1, \quad \varphi'(0) = \beta_2, \quad \varphi(1) = \beta_3, \quad \varphi'(1) = \beta_4. \quad (15.258)$$

Краевую задачу для уравнения четвертого порядка при смешанных граничных условиях общего вида обсудим в следующем параграфе, а в § 15.12 изучим задачу о собственных значениях для уравнения четвертого порядка.

Для того чтобы найти условия разрешимости задачи (15.257), (15.258), умножим уравнение (15.257) на функцию $u(x)$, которая является решением сопряженной задачи и подлежит определению в дальнейшем, и проинтегрируем полученный результат почленно

в пределах от $x = 0$ до $x = 1$ (т. е. по всему промежутку, определяемому граничными условиями). В результате получим

$$\int_0^1 p_4 u \varphi^{IV} dx + \int_0^1 p_3 u \varphi''' dx + \int_0^1 p_2 u \varphi'' dx + \int_0^1 p_1 u \varphi' dx + \\ + \int_0^1 p_0 u \varphi dx = \int_0^1 u f dx. \quad (15.259)$$

Далее, проинтегрируем члены, содержащие производные функции φ , по частям, чтобы «перебросить» дифференцирование на функцию u . Выпишем результаты интегрирования по частям для каждого члена в левой части (15.259) в отдельности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_4 u \varphi^{IV} dx &= p_4 u \varphi''' \Big|_0^1 - \int_0^1 (p_4 u)' \varphi''' dx = \\ &= [p_4 u \varphi''' - (p_4 u)' \varphi'']_0^1 + \int_0^1 (p_4 u)'' \varphi'' dx = \\ &= [p_4 u \varphi''' - (p_4 u)' \varphi'' + (p_4 u)'' \varphi']_0^1 - \int_0^1 (p_4 u)''' \varphi' dx = \\ &= [p_4 u \varphi''' - (p_4 u)' \varphi'' + (p_4 u)'' \varphi' - (p_4 u)''' \varphi]_0^1 + \int_0^1 (p_4 u)^{IV} \varphi dx, \\ \int_0^1 p_3 u \varphi''' dx &= [p_3 u \varphi''' - (p_3 u)' \varphi'' + (p_3 u)'' \varphi']_0^1 - \int_0^1 (p_3 u)''' \varphi dx, \\ \int_0^1 p_2 u \varphi'' dx &= [p_2 u \varphi'' - (p_2 u)' \varphi']_0^1 + \int_0^1 (p_2 u)'' \varphi dx, \\ \int_0^1 p_1 u \varphi' dx &= [p_1 u \varphi - (p_1 u)' \varphi]_0^1 + \int_0^1 (p_1 u)' \varphi dx, \\ \int_0^1 p_0 u \varphi dx &= p_0 u \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 (p_0 u)' \varphi dx. \end{aligned}$$

С помощью найденных выражений перепишем соотношение (15.259) как

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi [(p_4 u)^{IV} + (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u] dx + \\ + [p_4 u \varphi''' - [(p_4 u)' - p_3 u] \varphi'' + [(p_4 u)'' - (p_3 u)' + p_2 u] \varphi' - \\ - [(p_4 u)''' - (p_3 u)'' + (p_2 u)' - p_1 u] \varphi]_0^1 = \int_0^1 f u dx. \quad (15.260) \end{aligned}$$

Как и ранее, сопряженное уравнение получим, приравняв нулю коэффициент при φ в подынтегральной функции в левой части (15.260). В результате имеем

$$(p_4 u)^{IV} - (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u = 0. \quad (15.261)$$

Для того чтобы однородное уравнение, соответствующее (15.257), было самосопряженным, оно должно совпадать с уравнением (15.261). Раскрывая производные и перегруппировывая члены в (15.261), приведем это уравнение к виду

$$p_4 u^{IV} + (4p_4' - p_3)u''' + (6p_4'' - 3p_3' + p_2)u'' + \\ + (4p_4''' - 3p_3'' + 2p_2' - p_1)u' + (p_4^{IV} - p_3''' + p_2'' - p_1' + p_0)u = 0. \quad (15.262)$$

Условие совпадения уравнений (15.257) и (15.262) дает

$$4p_4' - p_3 = p_3, \quad 4p_4'' - 3p_3' + 2p_2' - p_1 = p_1,$$

$$6p_4''' - 3p_3'' + p_2 = p_2, \quad p_4^{IV} - p_3''' + p_2'' - p_1' + p_0 = p_0,$$

$$\text{или} \quad p_3 = 2p_4', \quad p_3' = 2p_4'', \quad p_1 = 2p_4''' - \frac{3}{2}p_3'' + p_2' = -p_4'' + p_2'.$$

При этом уравнение (15.257) принимает вид

$$p_4 \varphi^{IV} + 2p_4' \varphi''' + p_2 \varphi'' + (p_2' - p_4'') \varphi' + p_0 \varphi = 0,$$

$$\text{или} \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(p_4 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[(p_2 - p_4'') \frac{d\varphi}{dx} \right] + p_0 \varphi = 0. \quad (15.263)$$

Таким образом, произвольное самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка без правой части может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(A_2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(A_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) + A_0 \varphi = 0. \quad (15.264)$$

Заметим, что в то время, как любое дифференциальное уравнение второго порядка может быть приведено к самосопряженному виду путем умножения на специально подобранную функцию, произвольное дифференциальное уравнение порядка выше второго, вообще говоря, не может быть преобразовано в самосопряженное.

Для того чтобы найти сопряженные граничные условия, рассмотрим соотношение (15.260) для однородной задачи (т. е. при $f = 0$, $\beta_n = 0$):

$$\{p_4 u \varphi'' - [(p_3 u)' - p_3 u] \varphi' + [(p_4 u)'' - (p_2 u)' + p_2 u] \varphi - \\ - [(p_4 u)'' - (p_3 u)'] + (p_3 u)' - p_3 u\} \varphi \Big|_0^1 = 0.$$

Учитывая уравнение (15.261) и однородные граничные условия $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0$, получаем

$$\{p_4 u\}_1 \varphi''(1) - [(p_4 u)' - p_3 u]_1 \varphi'(1) - p_4 u|_0 \varphi''(0) + \\ + [(p_3 u)' - p_3 u]_0 \varphi'(0) = 0. \quad (15.265)$$

Выберем сопряженные граничные условия так, чтобы соотношение (15.265) выполнялось при произвольных значениях $\varphi''(0)$, $\varphi''(1)$, $\varphi'''(0)$ и $\varphi'''(1)$. Для этого необходимо положить равным нулю коэффициент при каждой из указанных величин. В результате имеем

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (15.266)$$

Таким образом, сопряженная задача включает в себя уравнения (15.261) и краевые условия (15.266).

Для того чтобы найти условие разрешимости неоднородной задачи, вернемся к соотношению (15.260). Используя уравнение и граничные условия, которым подчинена функция u , находим

$$[p_4 u'' \varphi' - (p_4 u'' + 3p_4' u'' - p_3 u'') \varphi]_0^1 = \int_0^1 u f dx. \quad (15.267)$$

Подставляя в соотношение (15.267) граничные условия (15.258), перепишем (15.267) как

$$(p_4 u'' \beta_4 - p_4 u'' \beta_3 - 3p_4' u'' \beta_3 + p_3 u'' \beta_3)|_1 - \\ - (p_4 u'' \beta_2 - p_4 u'' \beta_1 - 3p_4' u'' \beta_1 + p_3 u'' \beta_1)|_0 = \int_0^1 f u dx. \quad (15.268)$$

Выбирая в качестве функции u любое нетривиальное решение однородной сопряженной задачи, из соотношения (15.268) можно получить условие разрешимости задачи (15.257), (15.258). Ясно, что в случае, когда сопряженная однородная задача имеет лишь тривиальное решение, условие (15.268) удовлетворяется при любых значениях β_n и при произвольной функции $f(x)$.

Применим теперь полученные результаты к двум модельным задачам.

Пример 1

При исследовании вопросов устойчивости пространственных течений вблизи плоских поверхностей, если сформулировать соответствующую гидродинамическую задачу с помощью функции тока и пользоваться методом многих масштабов, возникает так называемая неоднородная задача Орра—Зоммерфельда следующего вида:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 \varphi - iR(Uk - \omega)\left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - k^2 \varphi\right) + ikR \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi = f. \quad (15.269)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy}(0) = 0,$$

$$\varphi \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (15.270)$$

где величины R , k и ω не зависят от y , а U и f являются заданными функциями y . При этом соответствующая однородная задача представляет собой задачу на собственные значения, у которой существует нетривиальное решение, только если выполнено определенное условие разрешимости.

Раскрывая производные в (15.269), перепишем это уравнение как

$$\varphi^{IV} - (2k^2 + ikRU - i\omega R) \varphi'' + (k^4 + ik^3RU - i\omega k^2R + ikRU'') \varphi = f. \quad (15.271)$$

Здесь

$$p_4 = 1, \quad p_3 = 0, \quad p_2 = -(2k^2 + ikRU - i\omega R), \\ p_1 = 0, \quad p_0 = k^4 + ik^3RU - i\omega k^2R + ikRU''.$$

При этом сопряженное уравнение (15.261) переписывается в виде

$$u^{IV} - [(2k^2 + ikRU - i\omega R) u]'' + (k^4 + ik^3RU - i\omega k^2R + ikRU'') u = 0,$$

или

$$u^{IV} - (2k^2 + ikRU - i\omega R) u'' - 2ikRU' u' + (k^4 + ik^3RU - i\omega k^2R) u = 0.$$

После некоторых преобразований последнее уравнение можно представить как

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 u - iR(kU - \omega) \left(\frac{d^2 u}{dy^2} - k^2 u\right) - 2ikR \frac{dU}{dy} \frac{du}{dy} = 0. \quad (15.272)$$

Граничные условия для функции u имеют вид

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \\ u, u' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (15.273)$$

Определив таким образом сопряженную задачу, воспользуемся соотношением (15.268), заменяя в нем верхний предел, равный 1, на ∞ . Тогда условие разрешимости сводится к соотношению

$$\int_0^\infty f u dy = 0. \quad (15.274)$$

Пример 2

Исследование колебаний пластины, имеющей форму, близкую к круговому кольцу, в случае жестко закрепленной кромки, если пользоваться при этом методом растянутых параметров, приводит к следующей неоднородной задаче:

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 - \omega_{nm}^2\right] \varphi = f(r), \quad (15.275)$$

$$\varphi(a) = \beta_1, \quad \varphi'(a) = \beta_2, \quad \varphi(b) = \beta_3, \quad \varphi'(b) = \beta_4, \quad (15.276)$$

где n , β_k ($k = 1, 2, 3, 4$) и ω_{nm} — постоянные величины и $b > a$. Соответствующая (15.276), (15.275) однородная задача имеет нетривиальное решение, поэтому для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнить специальное условие.

Вместо того чтобы раскрывать дифференциальный оператор в круглых скобках в (15.275), группировать члены с производными одного порядка и применять затем условие разрешимости, выведенное в предыдущем параграфе, покажем, что удобнее иметь дело непосредственно с уравнением (15.275), которое можно преобразовать в самосопряженное, умножая его на функцию $v(r) = r$. При этом для вывода условия разрешимости уравнение (15.275) следует умножить на $ru(r)$, где $u(r)$ — решение сопряженной однородной задачи, которое подлежит определению в дальнейшем. Производя указанное умножение и интегрируя полученный результат от $r = a$ до $r = b$, получаем

$$\int_a^b ru \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r} \right)^2 - \omega_{nm}^2 \right] \varphi dr = \int_a^b r u f dr. \quad (15.277)$$

Если положить

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \varphi = \psi, \quad (15.278)$$

то первое слагаемое в левой части (15.277) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_a^b ru \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi dr &= \int_a^b \left[u \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{n^2 u \psi}{r} \right] dr = \\ &= \left[ru \frac{d\psi}{dr} - r \frac{du}{dr} \psi \right]_a^b + \int_a^b \psi \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{n^2 u}{r} \right] dr. \end{aligned} \quad (15.279)$$

Подставляя выражение (15.278) в (15.279) и вновь интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{n^2 u}{r} \right] dr &= \int_a^b \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} \varphi \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{n^2 u}{r^2} \right] dr = \int_a^b \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} \varphi \right] \chi dr = \\ &= \left[r \frac{d\varphi}{dr} \chi - r \varphi \frac{d\chi}{dr} \right]_a^b + \int_a^b \varphi \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} \chi \right] dr, \end{aligned} \quad (15.280)$$

где $\chi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{n^2 u}{r^2} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) u. \quad (15.281)$

Подставляя выражение (15.281) в (15.280), имеем

$$\int_a^b \psi \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{n^2 u}{r} \right] dr = \left[r \frac{d\varphi}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{n^2 u}{r^2} \right) - \right. \\ \left. - r \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{n^2 u}{r^2} \right) \right]_a^b + \\ + \int_a^b r \varphi \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 u dr. \quad (15.282)$$

Наконец, подставляя (15.282) в (15.279), а полученный результат — в соотношение (15.277), получаем

$$\int_a^b r \varphi \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 - \omega_{nm}^2 \right] u dr + \\ + \left[r u \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{n^2 \varphi}{r^2} \right) - r \frac{du}{dr} \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{n^2 \varphi}{r^2} \right) + \right. \\ \left. + r \frac{d\varphi}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{n^2 u}{r^2} \right) - \right. \\ \left. - r \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{n^2 u}{r^2} \right) \right]_a^b = \int_a^b r u f dr. \quad (15.283)$$

Как обычно, приравнявая нулю коэффициент при φ в подынтегральной функции в левой части (15.283), получаем сопряженное уравнение

$$\left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 - \omega_{nm}^2 \right] u = 0, \quad (15.284)$$

которое полностью совпадает с однородным уравнением, соответствующим (15.275). Следовательно, это уравнение является самосопряженным. Далее, полагая в граничных условиях (15.276) $\beta_k = 0$, ($k = 1, 2, 3, 4$) и подставляя полученный результат в соотношение (15.283), а также полагая в нем $f = 0$, имеем

$$[r u \varphi'' + u \varphi'' - r u' \varphi'']_a^b = 0,$$

или

$$b u(b) \varphi''(b) + [u(b) - b u'(b)] \varphi''(b) - \\ - a u(a) \varphi''(a) - [u(a) - a u'(a)] \varphi''(a) = 0. \quad (15.285)$$

Сопряженные граничные условия, как и ранее, найдем из того условия, чтобы левая часть (15.285) обращалась в нуль при произвольных значениях $\varphi''(a)$, $\varphi''(b)$, $\varphi'''(a)$ и $\varphi'''(b)$. Для этого

следует приравнять нулю коэффициенты при каждой из указанных производных, т. е.

$$u(a) = u(b) = 0, \quad u'(a) = u'(b) = 0. \quad (15.286)$$

Сравнивая, наконец, уравнение (15.284) с уравнением (15.275), а граничные условия (15.286) с условиями (15.276), замечаем, что однородная краевая задача, соответствующая (15.275), (15.276), является самосопряженной.

Определив сопряженную однородную задачу, вернемся к неоднородной задаче (15.275), (15.276), с тем чтобы найти недостающее условие разрешимости. Используя уравнение (15.284) и граничные условия (15.286) для функции u и подставляя граничные условия (15.276) в соотношение (15.283), получаем искомое условие разрешимости в виде

$$\begin{aligned} b\beta_4 u''(b) - b\beta_3 u'''(b) - \beta_3 u''(b) - a\beta_2 u''(a) + \\ + a\beta_1 u'''(a) + \beta_1 u''(a) = \int_a^b r u f dr. \end{aligned} \quad (15.287)$$

15.11. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с граничными условиями общего вида

В этом параграфе мы выведем условие разрешимости для краевой задачи вида

$$p_4(x) \varphi^{IV} + p_3(x) \varphi''' + p_2(x) \varphi'' + p_1(x) \varphi' + p_0(x) \varphi = f(x), \quad a < x < b, \quad (15.288)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (15.289)$$

где φ_j представляют собой соответствующие компоненты $\varphi''(a)$, $\varphi'''(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi(a)$, $\varphi''(b)$, $\varphi'''(b)$, $\varphi'(b)$, $\varphi(b)$ вектор-столбца φ_b . Предполагается, что граничные условия (15.289) линейно независимы, т. е. существует по крайней мере одна невырожденная квадратная субматрица 4-го порядка матрицы $\{\alpha_{ij}\}$.

Для того чтобы определить вид сопряженной задачи, обозначим дифференциальный оператор в левой части уравнения (15.288) через L , т. е.

$$L(\varphi) = p_4 \varphi^{IV} + p_3 \varphi''' + p_2 \varphi'' + p_1 \varphi' + p_0 \varphi, \quad a < x < b, \quad (15.290)$$

где p_4^{IV} , p_3''' , p_2'' , p_1' и p_0 предполагаются непрерывными на промежутке $[a, b]$. Пусть $\varphi(x)$ и $u(x)$ — две произвольные функции, непрерывные на $[a, b]$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно. Тогда имеем

$$\int_a^b u L(\varphi) dx = \int_a^b [p_4 u \varphi^{IV} + p_3 u \varphi''' + p_2 u \varphi'' + p_1 u \varphi' + p_0 u \varphi] dx. \quad (15.291)$$

Интегрируя соотношение (15.291) по частям, с тем чтобы «перебросить» дифференцирование с функции φ на функцию u , получаем

$$\int_a^b u L(\varphi) dx = \int_a^b \varphi [(p_4 u)^{IV} - (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u] dx + \\ + \{p_4 u \varphi'' - [(p_4 u)' - (p_3 u)] \varphi' + [(p_4 u)'' - (p_3 u)' + p_2 u] \varphi - \\ - [(p_4 u)''' - (p_3 u)'' + (p_2 u)' - p_1 u] \varphi\}_a^b. \quad (15.292)$$

Далее, обозначим дифференциальный оператор в подинтегральном выражении в левой части (15.292) через L^* , т. е.

$$L^*(u) = (p_4 u)^{IV} - (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u. \quad (15.293)$$

При этом соотношение (15.292) может быть переписано в виде следующей формулы Грина:

$$\int_a^b [u L(\varphi) - \varphi L^*(u)] dx = \{p_4 u \varphi'' - [p_4 u' + (p_4' - p_3) u] \varphi' + \\ + [p_4 u'' + (2p_4' - p_3) u' + (p_4'' - p_3' + p_2) u] \varphi - [p_4 u''' + \\ + (3p_4' - p_3) u'' + (3p_4'' - 2p_3' + p_2) u' + \\ + (p_4''' - p_3'' + p_2' - p_1) u] \varphi\}_a^b. \quad (15.294)$$

Оператор L^* называют сопряженным по отношению к оператору L . Нетрудно проверить, что оператор L сопряжен оператору L^* , так что L и L^* взаимно сопряжены друг с другом. Как и в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение

$$L^*(u) = 0 \quad (15.295)$$

будем называть сопряженным дифференциальному уравнению

$$L(\varphi) = 0, \quad (15.296)$$

и наоборот. Если же $L = L^*$, то будем говорить, что оператор L и дифференциальное уравнение $L(\varphi) = 0$ являются самосопряженными. Сравнивая уравнения (15.290) и (15.293), заключаем, как и в предшествующем параграфе, что оператор L будет самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$p_3 = 2p_4', \quad p_1 = p_2' - p_4''.$$

При этом уравнение (15.290) можно переписать как

$$L(\varphi) = \frac{d^2}{dx^2} \left(p_4 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[(p_2 - p_4'') \frac{d\varphi}{dx} \right] + p_0 \varphi. \quad (15.297)$$

Правая часть тождества (15.294) называется билинейной дифференциальной формой относительно φ и u , поскольку при заданной функции φ она линейна по u , а при заданной u — линейна

по φ . Используя векторно-матричную форму записи, перепишем формулу (15.294) в виде

$$\int_a^b [uL(\varphi) - \varphi L^*(u)] dx = u_b^T P \varphi_b, \quad (15.298)$$

где вектор φ_b определен ранее, u_b представляет собой вектор-столбец с компонентами $u'''(a)$, $u''(a)$, $u'(a)$, $u(a)$, $u'''(b)$, $u''(b)$, $u'(b)$, $u(b)$, а матрица P определяется соотношением

$$P = \begin{bmatrix} \Lambda_a & 0 \\ 0 & \Lambda_b \end{bmatrix}, \quad (15.299)$$

причем матрицы-блоки $\Lambda_{a,b}$ имеют вид

$$\Lambda_{a,b} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & -p_4 & 3p_4' - p_3 \\ 0 & p_4 & p_3 - 2p_4' & 3p_4'' - 2p_3' + p_2 \\ -p_4 & p_4' - p_3 & p_3' - p_4' - p_2 & p_4''' - p_3'' + p_2' - p_1 \end{vmatrix}_{x=a,b} \quad (15.300)$$

Заметим, что $|P| = [p_4(a) p_4(b)]^4$ и, следовательно, матрица P невырожденная.

Для того чтобы найти сопряженные граничные условия, преобразуем правую часть формулы Грина (15.298) в каноническую билинейную форму. С этой целью введем невырожденное линейное преобразование вектора φ_b в вектор Φ согласно формуле

$$\Phi = A \varphi_b, \quad (15.301)$$

где A — квадратная матрица 8-го порядка с постоянными элементами α_{ij} . Матричные элементы α_{ij} , входящие в первые четыре строки матрицы, совпадают с коэффициентами в граничных условиях (15.289). Нижние четыре строки остаются при этом совершенно произвольными, за исключением того, что они должны быть линейно независимыми между собой и с четырьмя верхними строками. Следовательно, при заданном ненулевом векторе φ_b произволом в выборе нижних четырех строк матрицы A можно воспользоваться, чтобы получить любые наперед заданные значения компонент Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4 . Ниже мы используем этот факт при нахождении граничных условий сопряженной задачи.

Преобразование (15.301) можно обратить, что дает

$$\varphi_b = A^{-1} \Phi.$$

Тогда имеем

$$\int_a^b [uL(\varphi) - \varphi L^*(u)] dx = u_b^T P A^{-1} \Phi = U^T \Phi, \quad (15.302)$$

где

$$U^T = u_b^T P A^{-1}, \quad \text{или} \quad U = (A^{-1})^T P^T u_b. \quad (15.303)$$

Из соотношения (15.301) и граничных условий (15.289) следует, что

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^8 \alpha_{ij} \varphi_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (15.304)$$

Чтобы завершить построение сопряженной задачи, рассмотрим однородный случай (т. е. $\beta_i = 0$) и положим левую часть соотношения (15.302) равной нулю. В результате имеем

$$\sum_{i=1}^8 U_i \Phi_i = 0, \quad \Phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Следовательно,

$$U_5 \Phi_5 + U_6 \Phi_6 + U_7 \Phi_7 + U_8 \Phi_8 = 0. \quad (15.305)$$

Как указывалось выше, при заданном ненулевом в-кторе Φ_5 последние строки матрицы A можно выбрать так, чтобы придать любые требуемые значения компонентам Φ_5, Φ_6, Φ_7 и Φ_8 в соотношении (15.301). Выберем эти четыре строки, например, таким образом, чтобы выполнялись равенства $\Phi_5 = 1, \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = 0$. Тогда из (15.305) следует, что $U_5 = 0$. Точно так же можно выбрать последние четыре строки матрицы A из условия $\Phi_6 = 1, \Phi_5 = \Phi_7 = \Phi_8 = 0$, откуда следует, что $U_6 = 0$. Кроме того, с помощью аналогичных рассуждений нетрудно показать, что $U_7 = U_8 = 0$.

Таким образом, задача, сопряженная задаче

$$L(\varphi) = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0, \quad (15.306)$$

имеет вид

$$L^*(u) = 0, \quad U_5 = U_6 = U_7 = U_8 = 0. \quad (15.307)$$

Определив сопряженную краевую задачу, вернемся к неоднородной задаче, чтобы найти условие ее разрешимости. С учетом (15.307) формула Грина (15.302) принимает вид

$$\int_a^b u L(\varphi) dx = \sum_{i=1}^4 U_i \Phi_i. \quad (15.308)$$

Наконец, из соотношений (15.288) и (15.304) следует, что $L(\varphi) = f(x)$ и $\Phi_i = \beta_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$. С учетом этих равенств соотношение (15.308) переходит в искомое условие разрешимости:

$$\int_a^b u(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^4 \beta_i U_i. \quad (15.309)$$

15.12. Задача на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка

Применим развитую в двух предыдущих параграфах теорию к следующей задаче на собственные значения:

$$\varphi^{IV} + 10\varphi'' + [\lambda + \varepsilon f(x)]\varphi = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (15.310)$$

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(\pi) = 0.$$

Будем искать равномерно пригодное разложение первого порядка для решения задачи (15.310) с помощью метода растянутых параметров, т. е. полагая

$$\varphi(x, \varepsilon) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \dots, \quad (15.311)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots$$

Подставляя разложения (15.311) в уравнение и граничные условия (15.310) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем для порядка ε^0 :

$$\varphi_0^{IV} + 10\varphi_0'' + \lambda_0\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = \varphi_0(\pi) = \varphi_0'(\pi) = 0; \quad (15.312)$$

для порядка ε :

$$\varphi_1^{IV} + 10\varphi_1'' + \lambda_0\varphi_1 = -(\lambda_1 + f)\varphi_0, \quad (15.313)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \varphi_1(\pi) = \varphi_1'(\pi) = 0. \quad (15.314)$$

Нетрудно проверить, что решением задачи (15.312) является функция

$$\varphi_0 = \sin nx \text{ при } \lambda_0 = n^2(10 - n^2). \quad (15.315)$$

Заметим, что, согласно приведенной формуле, собственные числа при $n = 1$ и $n = 3$ совпадают, т. е. $\lambda_0(1) = \lambda_0(3) = 9$. Следовательно, собственные функции $\sin x$ и $\sin 3x$ отвечают одному и тому же собственному числу $\lambda_0 = 9$, а при $n = 1$ и $n = 3$ задача на собственные значения (15.312) оказывается вырожденной. При всех остальных значениях n каждому собственному числу соответствует только одна линейно независимая функция, и, значит, вырождение отсутствует. Оба эти случая, вырожденный и невырожденный, рассмотрим ниже.

Неоднородная задача имеет решение, только если выполнены условия разрешимости. Для нахождения этих условий прежде всего сформулируем соответствующую сопряженную задачу. С этой целью умножим уравнение (15.313) на функцию $u(x)$, проинтегрируем это произведение от $x = 0$ до $x = \pi$, а затем преобразуем полученный результат с помощью интегрирования по частям, «перебрасывая» дифференцирование с функции φ_1 на функцию u . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_1(u^{IV} + 10u'' + \lambda_0 u) dx + [\varphi_1''u - \varphi_1'u' + \varphi_1'u - \varphi_1u'']_0^\pi + \\ + 10[\varphi_1'u - \varphi_1u']_0^\pi = - \int_0^\pi (\lambda_1 + f)\varphi_0 u dx. \end{aligned} \quad (15.316)$$

Следовательно, сопряженное уравнение имеет вид

$$u^{IV} + 10u'' + \lambda_0 u = 0, \quad (15.317)$$

что полностью совпадает с однородным уравнением, соответствующим (15.313). Этот факт не является неожиданным, поскольку однородное уравнение, соответствующее (15.313), имеет форму (15.263). Для того чтобы найти сопряженные граничные условия, положим в соотношении (15.316) $\lambda_1 = 0$ и $f = 0$, так что (15.316) примет вид

$$[\varphi_1'' u - \varphi_1' u' + \varphi_1'(u'' + 10u) - \varphi_1(u''' + 10u')]_0^\pi = 0. \quad (15.318)$$

Учитывая в соотношении (15.318) граничные условия (15.314), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1'''(\pi) u(\pi) + \varphi_1'(\pi) [u''(\pi) + 10u(\pi)] - \\ - \varphi_1'''(0) u(0) - \varphi_1'(0) [u''(0) + 10u(0)] = 0. \end{aligned} \quad (15.319)$$

Как и ранее, выберем сопряженные граничные условия, требуя, чтобы выражение (15.319) обращалось в нуль при произвольных значениях $\varphi_1'''(\pi)$, $\varphi_1'(\pi)$, $\varphi_1'''(0)$ и $\varphi_1'(0)$, т. е.

$$u(0) = u''(0) = u(\pi) = u''(\pi) = 0. \quad (15.320)$$

Таким образом, однородная краевая задача, соответствующая (15.313), (15.314), является самосопряженной.

Вернемся теперь к неоднородной задаче и, используя уравнения и граничные условия сопряженной задачи, получим из (15.316) искомое условие разрешимости:

$$\int_0^\pi (\lambda_1 + f) \varphi_0 u \, dx = 0. \quad (15.321)$$

Рассмотрим теперь в отдельности вырожденный и невырожденный случаи, начиная со случая простого (т. е. некратного) собственного значения.

Невырожденный случай

В этом случае параметр n отличен от 1 и 3, и решение задачи нулевого порядка дается формулой (15.315). При этом решение сопряженной задачи можно взять в виде $u = \sin nx$, что после подстановки в условие (15.321) дает

$$\int_0^\pi [\lambda_1 + f(x)] \sin^2 nx \, dx = 0.$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin^2 nx \, dx,$$

и из разложения (15.311) следует, что в первом приближении

$$\varphi = \sin nx + O(\varepsilon), \quad (15.322a)$$

$$\lambda = n^2(10 - n^2) - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin^2 nx \, dx + O(\varepsilon^2). \quad (15.322b)$$

Вырожденный случай

В этом случае параметр n равен 1 или 3, и решение задачи нулевого порядка имеет вид

$$\varphi_0 = a_1 \sin x + a_3 \sin 3x, \quad \lambda_0 = 9, \quad (15.323)$$

где постоянные a_1 и a_3 на данном этапе итерационного процесса считаются независимыми, что в данном случае и служит проявлением вырождения задачи. При $\lambda_0 = 9$ решениями сопряженной задачи будут функции $u = \sin x$ и $u = \sin 3x$. Подставляя решение (15.323) в условие разрешимости (15.321), имеем

$$\int_0^\pi [\lambda_1 + f(x)] (a_1 \sin x + a_3 \sin 3x) u(x) \, dx = 0. \quad (15.324)$$

Соотношение (15.324) должно выполняться для любого решения сопряженной задачи. Полагая в соотношении (15.324) $u = \sin x$ и $u = \sin 3x$, получаем соответственно

$$\int_0^\pi [\lambda_1 + f(x)] (a_1 \sin x + a_3 \sin 3x) \sin x \, dx = 0,$$

$$\int_0^\pi [\lambda_1 + f(x)] (a_1 \sin x + a_3 \sin 3x) \sin 3x \, dx = 0,$$

$$\text{или} \quad (\lambda_1 + f_{11}) a_1 + f_{13} a_3 = 0, \quad (15.325)$$

$$f_{13} a_1 + (\lambda_1 + f_{33}) a_3 = 0,$$

$$\text{где} \quad f_{11} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin^2 x \, dx, \quad f_{33} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin^2 3x \, dx,$$

$$f_{13} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f \sin x \sin 3x \, dx.$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы уравнений (15.325), необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы обращался в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + f_{11} & f_{13} \\ f_{13} & \lambda_1 + f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем квадратное уравнение вида

$$\lambda_1^2 + (f_{11} + f_{33})\lambda_1 + f_{11}f_{33} - f_{13}^2 = 0$$

с корнями

$$\lambda_{1,2}^{(1)} = -\frac{1}{2}(f_{11} + f_{33}) \pm [(f_{11} - f_{33})^2 + 4f_{13}^2]^{1/2}. \quad (15.326)$$

Если λ_1 совпадает с одним из корней (15.326), то из системы (15.325) находим

$$a_3 = -\frac{\lambda_1 + f_{11}}{f_{13}} a_1.$$

Окончательно, подставляя найденные выражения в разложение (15.311), получаем, что в первом приближении

$$\varphi^{(1)} = \sin x - \frac{\lambda_1^{(1)} + f_{11}}{f_{13}} \sin 3x + \dots,$$

$$\lambda^{(1)} = 9 - \frac{\varepsilon}{12}(f_{11} + f_{33}) + \frac{\varepsilon}{2}[(f_{11} - f_{33})^2 + 4f_{13}^2]^{1/2} + \dots \quad (15.327)$$

$$\varphi^{(2)} = \sin x - \frac{\lambda_1^{(2)} + f_{11}}{f_{13}} \sin 3x + \dots,$$

и

$$\lambda^{(2)} = 9 - \frac{\varepsilon}{2}(f_{11} + f_{33}) - \frac{\varepsilon}{2}[(f_{11} - f_{33})^2 + 4f_{13}^2]^{1/2} + \dots \quad (15.328)$$

Таким образом, если $\lambda_1^{(1)} \neq \lambda_1^{(2)}$ (т. е. $f_{11} \neq f_{33}$ или $f_{13} \neq 0$), то в первом приближении вырождение задачи снимается.

15.13. Система дифференциальных уравнений первого порядка

В этом параграфе выведем условия разрешимости краевой задачи для одной системы дифференциальных уравнений первого порядка. В следующем параграфе рассмотрим систему уравнений первого порядка общего вида, а в § 15.15 — краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка с внутренними граничными условиями на поверхностях раздела.

При изучении распространения затухающих звуковых волн в сжимаемой жидкости, движущейся по каналу кольцевого сечения, возникает следующая неоднородная задача:

$$-i(\omega - ku_0)\varphi_4 + ik\rho_0\varphi_1 + \frac{im\rho_0}{r}\varphi_3 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\rho_0\varphi_2) = f_1, \quad (15.329)$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\varphi_1 + \rho_0\mu_0'\varphi_2 + ik\varphi_5 = f_2, \quad (15.330)$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\varphi_2 + \varphi_5 = f_3, \quad (15.331)$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\varphi_3 + \frac{im}{r}\varphi_5 = f_4. \quad (15.332)$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\varphi_6 + \rho_0 T_0' \varphi_2 + i(\gamma - 1)(\omega - ku_0)\varphi_5 = f_5, \quad (15.333)$$

$$\frac{\varphi_5}{\rho_0} = \frac{\varphi_4}{\rho_0} + \frac{\varphi_0}{T_0}, \quad (15.334)$$

$$\varphi_1(R_1) - \beta_1 \varphi_5(R_1) = \alpha_1, \quad \varphi_2(R_2) - \beta_2 \varphi_5(R_2) = \alpha_2, \quad (15.335)$$

где u_0 , ρ_0 , ρ_0 , T_0 и $f_n(r)$ представляют собой известные функции переменной r , а параметры ω , m , k , α_n , β_n и γ не зависят от r . Отметим, что четыре приведенных уравнения из шести являются алгебраическими, следовательно, система дифференциальных уравнений имеет второй порядок. Предполагается, что соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, поэтому для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнить специальное условие.

Для того чтобы улучшить требуемое условие разрешимости, умножим каждое из уравнений (15.329)–(15.334) соответственно на ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 и ψ_6 . Далее, сложим полученные произведения и проинтегрируем результат по r в пределах от R_1 до R_2 . Затем преобразуем полученное соотношение с помощью интегрирования по частям, перенося дифференцирование с функций φ_n на функции ψ_n . В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} i\rho_0\varphi_1[-\hat{\omega}\psi_2 + k\psi_1]dr + \int_{R_1}^{R_2} \rho_0\varphi_2[-i\hat{\omega}\psi_3 + u_0'\psi_2 - r\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi_1}{r}\right) + \\ & + T_0'\psi_5]dr + \int_{R_1}^{R_2} i\rho_0\varphi_3\left[-\hat{\omega}\psi_4 + \frac{m}{r}\psi_1\right]dr + \int_{R_1}^{R_2} \varphi_4[-i\hat{\omega}\psi_1 - \\ & - T_0\rho_0\psi_6]dr + \int_{R_1}^{R_2} \varphi_5\left[ik\psi_2 - \psi_3' + \frac{im}{r}\psi_4 + i(\gamma - 1)\hat{\omega}\psi_5 + \right. \\ & \left. + \rho_0 T_0'\psi_6\right]dr + \int_{R_1}^{R_2} \rho_0\varphi_6[-i\hat{\omega}\psi_5 - \rho_0\psi_6]dr + \\ & + [\rho_0\varphi_2\psi_1 + \varphi_5\psi_3]_{R_1}^{R_2} = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} \psi_n f_n dr, \end{aligned} \quad (15.336)$$

где $\hat{\omega} = \omega - ku_0$. Отметим, что члены в левой части соотношения (15.336) сгруппированы так, что в подынтегральное выражение в каждом интеграле входит только одна из функций φ_n . Прирав-

ставляя нулю коэффициенты при каждой из функций φ_n , получаем сопряженную систему уравнений вида

$$-\hat{\omega}\psi_2 + k\psi_1 = 0, \quad (15.337)$$

$$-i\hat{\omega}\psi_3 + u_0'\psi_2 - r \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_1}{r} \right) + T_0'\psi_5 = 0, \quad (15.338)$$

$$-\hat{\omega}\psi_4 + \frac{m}{r}\psi_1 = 0, \quad (15.339)$$

$$-i\hat{\omega}\psi_1 + T_0\rho_0\psi_6 = 0, \quad (15.340)$$

$$ik\psi_2 - \psi_3' + \frac{im}{r}\psi_4 + i(\gamma - 1)\hat{\omega}\psi_5 + \rho_0 T_0\psi_6 = 0, \quad (15.341)$$

$$i\hat{\omega}\psi_6 + \rho_0\psi_6 = 0. \quad (15.342)$$

Система уравнений (15.337)—(15.342) сопряжена системе уравнений (15.329)—(15.334). Для того чтобы получить граничные условия, которым подчинены функции ψ_n , положим в соотношении (15.336) $f_n = 0$ и воспользуемся уравнениями (15.337)—(15.342). В результате получим

$$[\rho_0\varphi_2\psi_1 + \varphi_5\psi_3]_{R_1}^{R_2} = 0. \quad (15.343)$$

Полагая в граничных условиях (15.335) $\alpha_n = 0$, а затем выражая граничные значения φ_2 через граничные значения φ_5 , перепишем (15.343) в виде

$$(\rho_0\beta_2\psi_1 + \psi_3)_{r=R_2}\varphi_5(R_2) - (\rho_0\beta_1\psi_1 + \psi_3)_{r=R_1}\varphi_5'(R_1) = 0. \quad (15.344)$$

Сопряженные граничные условия выбираем, как и ранее, из условия обращения левой части (15.344) в нуль при произвольных значениях $\varphi_5(R_1)$ и $\varphi_5(R_2)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \psi_3(R_2) + \rho_0\beta_2\psi_1(R_2) &= 0, \\ \psi_3(R_1) + \rho_0\beta_1\psi_1(R_1) &= 0. \end{aligned} \quad (15.345)$$

Таким образом, сопряженная краевая задача определяется системой уравнений (15.337)—(15.342) и граничными условиями (15.345).

Возвращаясь к неоднородной задаче, прежде всего упростим соотношение (15.336) с помощью уравнений (15.337)—(15.342) и условий (15.345). В результате получим

$$[\rho_0\varphi_2\psi_1 + \varphi_5\psi_3]_{R_1}^{R_2} = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} \psi_n f_n dr. \quad (15.346)$$

Выражая граничные значения ψ_3 через граничные значения ψ_1 с помощью соотношений (15.345), а граничные значения φ_5 через

граничные значения φ_6 и постоянные α_1 и α_2 , перепишем (15.346) как

$$\alpha_2 \rho_0(R_2) \psi_1(R_2) - \alpha_1 \rho_0(R_1) \psi_1(R_1) = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} f_n \psi_n dr, \quad (15.347)$$

что и служит искомым условием разрешимости.

15.14. Общая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим вывод условий разрешимости для задачи вида

$$\frac{d\varphi}{dx} - A(x)\varphi = f(x), \quad (15.348)$$

$$\varphi_i(0) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (15.349)$$

$$\varphi_i(1) = \beta_i, \quad i = m+1, m+2, \dots, n,$$

где φ и f — вектор-столбцы с n компонентами, A — квадратная матрица n -го порядка, а β_i — известные постоянные величины. Отметим, что граничные условия краевой задачи для системы уравнений первого порядка не всегда могут быть разделены, как в соотношениях (15.349). Нетрудно, однако, развить теорию и для граничных условий, содержащих n линейно независимых комбинаций $\varphi_i(0)$ и $\varphi_i(1)$. Более общие, чем (15.349), случаи рассматриваются в конце настоящего параграфа.

Предположим, что однородная задача, соответствующая (15.348)—(15.349), обладает нетривиальным решением, так что неоднородная задача имеет решение, только если удовлетворено некоторое условие разрешимости. Для того чтобы вывести условие разрешимости задачи (15.348), (15.349), умножим i -е уравнение (15.348) ($i = 1, 2, \dots, n$) на ψ_i и сложим полученные результаты. Эта операция эквивалентна умножению векторного уравнения (15.348) слева на ψ^T , где ψ^T представляет собой транспонированный сопряженный вектор-столбец ψ с n компонентами. Таким образом, имеем

$$\psi^T \frac{d\varphi}{dx} - \psi^T A \varphi = \psi^T f,$$

что после интегрирования по переменной x в пределах от 0 до 1 дает

$$\int_0^1 \psi^T \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^1 \psi^T A \varphi dx = \int_0^1 \psi^T f dx. \quad (15.350)$$

Интегрируя по частям в первом интеграле в левой части (15.350), находим

$$\psi^T \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\psi^T}{dx} \varphi dx - \int_0^1 \psi^T A \varphi dx = \int_0^1 \psi^T f dx,$$

или

$$\psi^T \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{d\psi^T}{dx} + \psi^T A \right) \varphi dx = \int_0^1 \psi^T f dx. \quad (15.351)$$

Приравнявая нулю коэффициент при φ в подынтегральном выражении в левой части (15.351), получаем сопряженное векторное уравнение

$$\frac{d\psi^T}{dx} + \psi^T A = 0.$$

Выполняя транспонирование, имеем

$$\left(\frac{d\psi^T}{dx} \right)^T + (\psi^T A^T) = 0,$$

или

$$\frac{d\psi}{dx} + A^T \psi = 0. \quad (15.352)$$

Сравнивая уравнения (15.348) и (15.352), приходим к выводу, что уравнения окажутся сопряженными, если $A = -A^T$. Для того чтобы вывести граничные условия для вектора ψ , рассмотрим однородную задачу. Полагая в соотношении (15.351) $f = 0$, получим

$$\psi^T \varphi \Big|_0^1 = 0, \quad (15.353)$$

или

$$[\psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2 + \dots + \psi_n \varphi_n]_0^1 = 0. \quad (15.354)$$

Полагая в граничных условиях (15.349) $\beta_i = 0$ и подставляя граничные значения функций φ_i в (15.354), находим

$$\begin{aligned} & \psi_1(1) \varphi_1(1) + \psi_2(1) \varphi_2(1) + \dots + \psi_m(1) \varphi_m(1) - \\ & - \psi_{m+1}(0) \varphi_{m+1}(0) - \psi_{m+2}(0) \varphi_{m+2}(0) - \dots - \psi_n(0) \varphi_n(0) = 0. \end{aligned} \quad (15.355)$$

Как и ранее, сопряженные граничные условия определяем из требования, чтобы левая часть соотношения (15.352) обращалась в нуль при произвольных значениях $\varphi_i(1)$, $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi_i(0)$, $i = m+1, m+2, \dots, n$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= 0, & i &= m+1, m+2, \dots, n, \\ \psi_i(1) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (15.356)$$

Возвращаясь к неоднородной задаче, подставим выражения (15.349), (15.356) в формулу (15.351). Это дает соотношение

$$\beta_{m+1}\psi_{m+1} + \beta_{m+2}\psi_{m+2} + \dots + \beta_n\psi_n(1) - \\ - \beta_1\psi_1(0) - \beta_2\psi_2(0) - \dots - \beta_m\psi_m(0) = \int_0^1 \psi^T f dx, \quad (15.357)$$

которое и служит искомым условием разрешимости.

Рассмотрим теперь более общий случай граничных условий, чем (15.349), а именно

$$\varphi(0) = \mathcal{A}\varphi(1) + \beta, \quad (15.358)$$

где \mathcal{A} — квадратная матрица n -го порядка с постоянными элементами, β — вектор-столбец с n компонентами. В этом случае соотношения (15.350)—(15.354), выведенные выше, сохраняют силу, причем изменяется лишь последний этап вывода сопряженных граничных условий. Так, полагая $f = 0$ и $\beta = 0$, из соотношений (15.353) и (15.358) находим, что

$$\psi^T(1)\varphi(1) - \psi^T(0)\varphi(0) = \psi^T(1)\varphi(1) - \psi^T(0)\mathcal{A}\varphi(1) = 0,$$

или

$$[\psi^T(1) - \psi^T(0)\mathcal{A}]\varphi(1) = 0. \quad (15.359)$$

Как и раньше, сопряженные граничные условия определяем с учетом требования, чтобы левая часть соотношения (15.359) обращалась в нуль при произвольных значениях компонент вектора $\varphi_i(1)$. В результате получим

$$\psi^T(1) - \psi^T(0)\mathcal{A} = 0,$$

откуда после транспонирования находим

$$\psi(1) = \mathcal{A}^T \psi(0). \quad (15.360)$$

Обращаясь вновь к неоднородной задаче и используя уравнение (15.352), приведем соотношение (15.351) к виду

$$\psi^T(1)\varphi(1) - \psi^T(0)\varphi(0) = \int_0^1 \psi^T f dx. \quad (15.361)$$

Подставляя выражение (15.358) в формулу (15.361), имеем

$$\psi^T(1)\varphi(1) - \psi^T(0)\mathcal{A}\varphi(1) - \psi^T(0)\beta = \int_0^1 \psi^T f dx. \quad (15.362)$$

Принимая во внимание условие (15.360), убеждаемся, что первые два члена в левой части (15.362) взаимно уничтожаются, так что это соотношение сводится к равенству

$$-\psi^T(0)\beta = \int_0^1 \psi^T f dx, \quad (15.363)$$

которое и является искомым условием разрешимости. Таким же образом можно рассмотреть и другие задачи с аналогичными краевыми условиями.

Наконец, обратимся к случаю граничных условий самого общего вида

$$\sum_{j=1}^{2n} \alpha_{ij} \varphi_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15.364)$$

где φ , представляя собой компоненты граничного вектор-столбца φ_b , причем первые n компонент вектора φ_b совпадают с составляющими вектора $\varphi(1)$, а последние n компонент — с составляющими вектора $\varphi(0)$. Соотношения (15.350)—(15.354) остаются в силе и в этом случае. Следующий шаг состоит в том, что мы вводим невырожденное линейное преобразование вектора φ_b по формуле, аналогичной (15.103) и (15.301)

$$\Phi = \mathcal{A} \varphi_b, \quad (15.365)$$

где \mathcal{A} — квадратная матрица $2n$ -го порядка с постоянными элементами. Элементы первых ее n строк совпадают с коэффициентами в граничных условиях (15.364), поэтому

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{ij} \varphi_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15.366)$$

Как и в других подобных случаях, последние n строк матрицы остаются произвольными, за исключением того, что они должны быть линейно независимы одна от другой и от первых n строк. При ненулевом векторе φ_b последние n строк матрицы A можно выбрать так, чтобы компоненты Φ_i , $i \geq n+1$, принимали любые наперед заданные значения.

Перепишем соотношения (15.353) в виде

$$\psi^T \varphi|_0 = \psi^T(1) I \varphi(1) - \psi^T(0) I \varphi(0) = 0,$$

или

$$[\psi^T(1) \psi^T(0)] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(0) \end{bmatrix} = 0,$$

или, наконец,

$$\psi^T \varphi|_0 = \psi_b^T P \varphi_b = 0, \quad (15.367)$$

где I — единичная матрица порядка n , а через P обозначена матрица вида

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Разрешая уравнения (15.365) относительно φ_b , имеем

$$\varphi_b = \mathcal{A}^{-1} \Phi.$$

Подстановка этого выражения в (15.367) дает

$$\Psi^T \Phi|_0 = \Psi_b^T P A^{-1} \Phi = 0,$$

или

$$\Psi^T \Phi|_0 = \Psi^T \Phi = 0, \quad (15.368)$$

где

$$\Psi^T = \Psi_b^T P \mathcal{A}^{-1}, \text{ откуда } \Psi = (\mathcal{A}^{-1})^T P^T \Psi_b. \quad (15.369)$$

Учитывая однородные граничные условия, соответствующие (15.366) (при $\beta_i = 0$), приведем соотношения (15.368) к виду

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \Psi_i \Phi_i = 0. \quad (15.370)$$

Левая часть (15.370) представляет собой линейную форму от компонент Ψ_i , $i = n+1, n+2, \dots, 2n$. Поскольку эта форма должна обращаться в нуль при произвольных ненулевых значениях коэффициентов Φ_i , то все компоненты Ψ_i также должны обращаться в нуль

$$\Psi_i = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, 2n. \quad (15.371)$$

■ Определив вид сопряженных уравнений (15.352) и граничных условий (15.371), вернемся к неоднородной задаче. С помощью уравнения (15.352) и соотношения $\Psi^T \Phi|_0 = \Psi^T \Phi$ придадим формуле (15.351) следующий вид

$$\Psi^T \Phi = \int_0^1 \Psi^T f dx. \quad (15.372)$$

Используя теперь граничные условия (15.366) и (15.371), получим искомое условие разрешимости

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_i = \int_0^1 \Psi^T f dx,$$

которое должно выполняться для произвольного вектора Ψ , являющегося решением сопряженной задачи.

15.15. Краевые задачи с внутренними граничными условиями

При исследовании распространения волн в составных телах часто приходится сталкиваться с краевыми задачами для неоднородных дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями на поверхностях раздела. В этом параграфе мы рассмотрим в качестве примера задачу о крутильных колебаниях стержня, покрытого оболочкой из другого материала при

синусоидальном возмущении поверхности раздела «ядро—оболочка». Эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} + \left(\alpha_n^2 - \frac{1}{r^2}\right) \varphi_1 = f_1(r), \quad 0 < r < a, \quad (15.373)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_2}{dr} - \left(\gamma_n^2 + \frac{1}{r^2}\right) \varphi_2 = f_2(r), \quad a < r < b, \quad (15.374)$$

$$|\varphi_1(0)| < \infty, \quad \varphi_2(b) - b\varphi_2'(b) = 0, \quad (15.375)$$

$$\varphi_1(a) - \varphi_2(a) = \beta_1, \quad \varphi_2'(a) - \mu_1\varphi_1'(a) - \mu_2\varphi_1(a) = \beta_2,$$

где α_n^2 , γ_n^2 , μ_n , β_n , a и b — заданные постоянные.

Как указывалось в § 15.9, однородные уравнения, соответствующие (15.373) и (15.374), можно привести к самосопряженному виду, умножив каждое из них на независимую переменную r . Таким образом, для того чтобы вывести условие разрешимости задачи (15.373)—(15.375), следует умножить уравнение (15.373) на $ru_1(r)$, а уравнение (15.374) — на $ru_2(r)$. Интегрируя результат первого умножения по переменной r от 0 до a , получим

$$\int_0^a \left[u_1'(r\varphi_1') + \left(\alpha_n^2 r - \frac{1}{r}\right) \varphi_1 u_1 \right] dr = \int_0^a ru_1 f_1 dr, \quad (15.376)$$

что после интегрирования по частям дает

$$[ru_1\varphi_1' - ru_1'\varphi_1]_0^a + \int_0^a \varphi_1 \left[(ru_1')' + \left(\alpha_n^2 r - \frac{1}{r}\right) u_1 \right] dr = \int_0^a ru_1 f_1 dr. \quad (15.377)$$

Аналогичным образом, интегрируя результат умножения (15.374) на $ru_2(r)$ по промежутку $[a, b]$, получим

$$\int_a^b \left[u_2(r\varphi_2') - \left(\gamma_n^2 r + \frac{1}{r}\right) \varphi_2 u_2 \right] dr = \int_a^b ru_2 f_2 dr,$$

откуда после интегрирования по частям имеем

$$\int_a^b \varphi_2 \left[(ru_2')' - \left(\gamma_n^2 r + \frac{1}{r}\right) u_2 \right] dr + [ru_2\varphi_2' - ru_2'\varphi_2]_a^b = \int_a^b ru_2 f_2 dr. \quad (15.378)$$

Складывая теперь соотношения (15.377) и (15.378), находим

$$\begin{aligned} & [ru_2\varphi_2' - ru_2'\varphi_2]_a^b + [ru_1\varphi_1' - ru_1'\varphi_1]_0^a + \\ & + \int_0^a \varphi_1 \left[(ru_1')' + \left(\alpha_n^2 r - \frac{1}{r}\right) u_1 \right] dr + \\ & + \int_a^b \varphi_2 \left[(ru_2')' - \left(\gamma_n^2 r + \frac{1}{r}\right) u_2 \right] dr = \int_0^a ru_1 f_1 dr + \int_a^b ru_2 f_2 dr. \end{aligned} \quad (15.379)$$

Далее, приравнивая нулю коэффициенты при φ_1 и φ_2 в подинтегральных выражениях в левой части соотношения (15.379), получим сопряженные уравнения

$$(ru_1') + \left(\alpha_n^2 r - \frac{1}{r}\right) u_1 = 0, \quad (15.380)$$

$$(ru_2') - \left(\gamma_n^2 r + \frac{1}{r}\right) u_2 = 0. \quad (15.381)$$

При этом соотношение (15.379) примет вид

$$bu_2(b)\varphi_2'(b) - bu_2'(b)\varphi_2(b) - \lim_{r \rightarrow 0} [ru_1\varphi_1' - ru_1'\varphi_1] + \\ + au_1(a)\varphi_1'(a) - au_1'(a)\varphi_1(a) - au_2(a)\varphi_2'(a) + au_2'(a)\varphi_2(a) = 0 \quad (15.382)$$

Уравнение (15.380) имеет регулярную особую точку $r = 0$, так что одним из граничных условий для него служит условие $|\varphi_1(0)| < \infty$. Как показано в § 15.9, сопряженным этому условию является условие ограниченности решения

$$|u_1(0)| < \infty. \quad (15.383)$$

Если условие (15.383) выполнено, то должно обращаться в нуль слагаемое в левой части (15.382), содержащее предельный переход $r \rightarrow 0$.

Из однородных граничных условий, соответствующих (15.375), следует, что

$$\varphi_2(b) = b\varphi_2'(b),$$

$$\varphi_2(a) = \varphi_1(a),$$

$$\varphi_2'(a) = \mu_1\varphi_1'(a) + \mu_2\varphi_1(a).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (15.382), приводим его к виду

$$b[u_2(b) - bu_2'(b)]\varphi_2'(b) + a[u_1(a) - \mu_1u_2(a)]\varphi_1'(a) + \\ + a[u_2'(a) - u_1'(a) - \mu_2u_2(a)]\varphi_1(a) = 0 \quad (15.384)$$

Как обычно, выбираем сопряженные граничные условия из требования, чтобы левая часть соотношения (15.384) обращалась в нуль при произвольных значениях $\varphi_2'(b)$, $\varphi_1'(a)$ и $\varphi_1(a)$, т. е.

$$u_2(b) = bu_2'(b), \quad u_1(a) = \mu_1u_2(a), \\ u_2'(a) - u_1'(a) - \mu_2u_2(a) = 0. \quad (15.385)$$

Таким образом, сопряженная краевая задача состоит в решении уравнений (15.380) и (15.381) с граничными условиями (15.383) и (15.385). Сравнивая сопряженную задачу с исходной однородной задачей, замечаем, что несмотря на то, что дифференциальные

уравнения этих задач самосопряжены, краевые задачи не являются самосопряженными, за исключением случая $\mu_1 = 1$.

Определив теперь сопряженную задачу, вернемся к неоднородной краевой задаче, чтобы завершить вывод условия разрешимости. Соотношение (15.379) с учетом сопряженных уравнений (15.380), (15.381) и условия ограниченности (15.383) преобразуем к виду

$$bu_2(b)\varphi_2'(b) - bu_2'(b)\varphi_2(b) + au_1(a)\varphi_1'(a) - au_1'(a)\varphi_1(a) - \\ - au_2(a)\varphi_2'(a) + au_2'(a)\varphi_2(a) = \int_0^a ru_1 f_1 dr + \int_0^a ru_2 f_2 dr. \quad (15.386)$$

Выражая $\varphi_2(b)$, $\varphi_2(a)$ и $\varphi_2'(a)$ с помощью граничных условий (15.375) и подставляя результат в (15.386), имеем

$$b[u_2(b) - bu_2'(b)]\varphi_2'(b) + a[u_1(a) - \mu_1 u_2(a)]\varphi_1'(a) + \\ + a[u_2'(a) - u_1'(a) - \mu_2 u_2(a)]\varphi_1(a) - a\beta_2 u_2(a) - a\beta_1 u_2'(a) = \\ = \int_0^a ru_1 f_1 dr + \int_a^b ru_2 f_2 dr.$$

Упрощая последнее соотношение с помощью условий (15.385), приводим его к виду

$$-a\beta_2 u_2(a) - a\beta_1 u_2'(a) = \int_0^a ru_1 f_1 dr + \int_a^b ru_2 f_2 dr. \quad (15.387)$$

Соотношение (15.387) и служит искомым условием разрешимости.

15.16. Интегральные уравнения

В этом параграфе выведем условие разрешимости для интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (15.388)$$

в случае, когда соответствующее однородное уравнение (т. е. при $f = 0$) имеет нетривиальное решение. Для этого умножим уравнение (15.388) на функцию $\psi(s)$ и проинтегрируем полученный результат по промежутку $[a, b]$. В результате получим

$$\int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds = \int_a^b f(s) \psi(s) ds + \lambda \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right] \psi(s) ds,$$

или

$$\int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds = \int_a^b f(s) \psi(s) ds + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \psi(s) ds dt,$$

что после смены порядка интегрирования в двойном интеграле дает

$$\int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds - \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t) \psi(s) \varphi(t) ds dt = \int_a^b f(s) \psi(s) ds. \quad (15.389)$$

Не меняя значения двойного интеграла в левой части (15.389), поменяем местами обозначения переменных интегрирования s и t . Тогда соотношение (15.389) перепишется как

$$\int_a^b \psi(s) \varphi(s) ds - \lambda \int_a^b \int_a^b K(t, s) \psi(t) \varphi(s) dt ds = \int_a^b f(s) \psi(s) ds,$$

или

$$\int_a^b \left[\psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt \right] \varphi(s) ds = \int_a^b f(s) \psi(s) ds. \quad (15.390)$$

Для того чтобы определить вид сопряженного интегрального уравнения, рассмотрим соответствующее однородное уравнение (т. е. положим в (15.390) $f = 0$). При этом соотношение (15.390) примет вид

$$\int_a^b \left[\psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt \right] \varphi(s) ds = 0. \quad (15.391)$$

По аналогии с уже рассмотренными случаями выберем сопряженное уравнение так, чтобы обратился в нуль коэффициент при $\varphi(s)$ в подынтегральном выражении в (15.381):

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt. \quad (15.392)$$

Сравнивая уравнение (15.392) с однородным интегральным уравнением, соответствующим (15.388), замечаем, что они отличаются друг от друга лишь порядком аргументов ядра $K(s, t)$. Следовательно, однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода будет самосопряженным тогда и только тогда, когда его ядро $K(s, t)$ симметрично, т. е. $K(s, t) = K(t, s)$.

Возвращаясь к тождеству (15.390) и предполагая, что входящая в него функция ψ является решением сопряженного уравнения (15.392), получаем искомое условие разрешимости

$$\int_a^b f(s) \psi(s) ds = 0, \quad (15.393)$$

которое можно сформулировать следующим образом: неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода разрешимо при условии, что его правая часть ортогональна любому нетривиальному решению сопряженного интегрального уравнения.

Мы доказали необходимость этого условия, но на самом деле оно является и достаточным. Если однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то условие (15.393) удовлетворяется автоматически, поскольку в этом случае $\varphi(s) = 0$.

Эти предложения составляют содержание так называемой альтернативы Фредгольма: либо интегральное уравнение (15.388) разрешимо при произвольном неоднородном члене $f(s)$ и соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение, либо однородное уравнение имеет нетривиальные решения, и неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всякому решению сопряженного однородного уравнения.

В качестве приложения развитой выше теории рассмотрим случай интегрального уравнения с вырожденным ядром. Ядро $K(s, t)$ называют вырожденным, если оно может быть представлено конечной суммой слагаемых, каждое из которых является произведением функции переменной s на функцию переменной t , т. е.

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(s) \beta_i(t). \quad (15.394)$$

В случае вырожденного ядра уравнение (15.388) можно записать в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(s) \int_a^b \beta_i(t) \varphi(t) dt. \quad (15.395)$$

Для того чтобы решить уравнение (15.395), положим

$$\int_a^b \beta_i(t) \varphi(t) dt = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15.396)$$

Тогда уравнение (15.395) примет вид

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i(s). \quad (15.397)$$

Умножив уравнение (15.397) на $\beta_j(s)$ и проинтегрировав полученный результат по промежутку $[a, b]$, получим

$$\int_a^b \beta_j(s) \varphi(s) ds = \int_a^b \beta_j(s) f(s) ds + \lambda \sum_{i=1}^N x_i \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds. \quad (15.398)$$

Интеграл в левой части уравнения (15.398) равен x_j (см. 15.396)), поэтому данное уравнение можно переписать как

$$x_j = f_j + \lambda \sum_{i=1}^N a_{ji} x_i, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (15.399)$$

где

$$f_j = \int_a^b \beta_j(s) f(s) ds,$$

$$a_{ji} = \int_a^b \beta_j(s) \alpha_i(s) ds. \quad (15.400)$$

Отметим, что решение интегрального уравнения (15.388) свелось к решению системы линейных алгебраических уравнений (15.399). Эту систему уравнений можно записать в векторной форме как

$$[I - \lambda A] x = f, \quad (15.401)$$

где I — единичная матрица порядка N , A — квадратная матрица порядка N , элементами которой являются коэффициенты a_{ji} , а x и f — вектор-столбцы с компонентами x_i и f_i .

Как указывалось в § 15.1, если однородное векторное уравнение, соответствующее (15.401), имеет только тривиальное решение, неоднородное уравнение имеет единственное решение при произвольном f . С другой стороны, если однородное уравнение имеет нетривиальное решение (т. е. $|I - \lambda A| = 0$), то уравнение (15.401) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(u, f) = 0, \quad (15.402)$$

где вектор u представляет собой любое решение сопряженного уравнения

$$[I - \lambda A]^* u = 0. \quad (15.403)$$

Поскольку матрица A вещественна, уравнение (15.403) можно переписать как

$$[I - \lambda A^T] u = 0,$$

или, в тензорных обозначениях,

$$u_j - \lambda \sum_{i=1}^N a_{ji} u_i = 0. \quad (15.404)$$

Таким образом, исходное интегральное уравнение является самосопряженным тогда и только тогда, когда матрица A симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, что имеет место, например, при условии

$$\alpha_i(s) = \beta_i(s).$$

15.17. Дифференциальные уравнения с частными производными

В предыдущих параграфах данной главы мы изучали различные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом параграфе мы рассмотрим вывод условий разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных. Алгоритм, с помощью которого выводятся условия разрешимости в этом случае, аналогичен алгоритму, который мы приме-

няли в задачах для обыкновенных уравнений, за исключением того, что интегрирование производится не по отрезку числовой оси, а по многомерной области. Продемонстрируем процедуру вывода условий разрешимости на двух примерах.

Пример 1

При исследовании распространения звуковых волн по акустическому волноводу с переменным по длине прямоугольным сечением возникает следующая неоднородная задача:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda \varphi = f(y, z), \quad 0 < y < a, \quad 0 < z < b, \quad (15.405)$$

$$\varphi(0, z) = 0, \quad \varphi(y, 0) = 0, \quad (15.406)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \alpha_1 \varphi = \beta_1(z) \text{ при } y = a, \quad (15.407)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha_2 \varphi = \beta_2(y) \text{ при } z = b.$$

Для того чтобы найти условие разрешимости задачи (15.405)—(15.407), умножим уравнение (15.405) на функцию $u(y, z)$ и проинтегрируем полученный результат по интересующей нас области, т. е. по прямоугольнику $0 < y < a$, $0 < z < b$. В результате получим

$$\int_0^b \int_0^a \left[u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda u \varphi \right] dy dz = \int_0^b \int_0^a u f dy dz. \quad (15.408)$$

Преобразуем теперь соотношение (15.408) с помощью интегрирования по частям, чтобы «перебросить» дифференцирование с функции φ на функцию u :

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy dz &= \int_0^b \left[\int_0^a u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy \right] dz = \\ &= \int_0^b \left[\left(u \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \varphi \right) \Big|_0^a + \int_0^a \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] dz, \end{aligned} \quad (15.409)$$

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dy dz &= \int_0^a \left[\int_0^b u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right] dy = \\ &= \int_0^a \left[\left(u \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \varphi \right) \Big|_0^b + \int_0^b \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \right] dy. \end{aligned} \quad (15.410)$$

Подставляя (15.409) и (15.410) в соотношение (15.408), имеем

$$\int_0^b \int_0^a \left\{ u \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda \varphi \right] - \varphi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u \right] \right\} dy dz = \\ = \int_0^b \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \varphi \right) \Big|_0^a dz + \int_0^a \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \varphi \right) \Big|_0^b dy. \quad (15.411)$$

Соотношение (15.411) можно получить и другим способом, непосредственно используя формулу Грина для произвольной области

$$\iint_S (u \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 u) dS = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (15.412)$$

где Γ представляет собой границу области S .

Сопряженное уравнение определим, как и ранее, из условия равенства нулю коэффициента при φ в подынтегральном выражении в левой части соотношения (15.411), т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0. \quad (15.413)$$

Для того чтобы найти вид сопряженных граничных условий, обратимся к однородной задаче (т. е. положим $f = 0$, $\beta_n = 0$). В случае если $f = 0$, соотношение (15.411) принимает вид

$$\int_0^b \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \varphi \right) \Big|_0^a dz + \int_0^a \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \varphi \right) dy = 0. \quad (15.414)$$

Перепишем теперь однородные граничные условия, соответствующие (15.407), разрешая их относительно производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=a} = \alpha_1 \varphi \Big|_{y=a}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=b} = \alpha_2 \varphi \Big|_{z=b}. \quad (15.415)$$

Подставляя в формулу (15.414) вместо левых частей граничных условий (15.406) и (15.415) соответствующие правые части, имеем

$$\int_0^b \left[\left(\alpha_1 u - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \varphi \Big|_a - u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_0 \right] dz + \\ + \int_0^a \left[\left(\alpha_2 u - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \varphi \Big|_b - u \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_0 \right] dy = 0. \quad (15.416)$$

Поскольку соотношение (15.416) должно выполняться для любой функции $\varphi(y, z)$, удовлетворяющей однородному уравнению, соответствующему (15.405), и однородным граничным условиям, соответствующим (15.406) и (15.407), то коэффициенты при каждом из следующих членов:

$$\varphi(a, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, z), \quad \varphi(y, b), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, 0)$$

должны обращаться в нуль, т. е.

$$u(0, z) = 0, \quad u(y, 0) = 0, \quad (15.417)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a, z) - \alpha_1 u(a, z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(y, b) - \alpha_2 u(y, b) = 0. \quad (15.418)$$

Определив таким образом сопряженную задачу, обратимся вновь к исходной неоднородной задаче. Учитывая (15.405) и (15.413), вместо соотношения (15.411) имеем

$$\int_0^b \int_0^a u f \, dy \, dz = \int_0^b \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \varphi \right) \Big|_0^a \, dz + \int_0^a \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \varphi \right) \Big|_0^b \, dy,$$

что с помощью граничных условий (15.406), (15.407), (15.417) и (15.418) легко приводится к виду

$$\int_0^b \int_0^a u f \, dy \, dz = \int_0^b \beta_1(z) u(a, z) \, dz + \int_0^a \beta_2(y) u(y, b) \, dy. \quad (15.419)$$

Таким образом, неоднородная задача (15.405)—(15.407) имеет решение лишь при условии, что соотношение (15.419) удовлетворяется для любого решения $u(y, z)$ сопряженной задачи, включающей уравнение (15.413) и граничные условия (15.417) и (15.418). Сравнивая сопряженную задачу с исходной однородной задачей, замечаем, что они полностью совпадают друг с другом, и, следовательно, эти задачи являются самосопряженными.

Пример 2

В качестве второго примера рассмотрим задачу, состоящую в решении уравнения (15.223) с граничными условиями (15.224) и (15.225). В § 15.9 мы раскладывали функции φ_1 и f в ряды Фурье и сводили задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Вместо этого в данном параграфе будем оперировать непосредственно с исходным уравнением в частных производных. Для этого запишем уравнение (15.223) как

$$\nabla^2 \varphi_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = -2\omega_0 \omega_1 \varphi_0. \quad (15.420)$$

В качестве следующего шага можно либо умножить уравнение (15.420) на решение сопряженной задачи $u(r, \theta)$, проинтегрировать полученный результат по интересующей нас области и преобразовать его с помощью интегрирования по частям, либо применить непосредственно формулу Грина (15.412). Первым способом мы только что воспользовались при рассмотрении предыдущего примера, поэтому здесь пойдем по второму пути. Чтобы избежать трудностей, связанных с наличием уравнения (15.420) решений, неограниченных в начале координат, в качестве области интегрирования в формуле Грина возьмем кольцо $r_0 < r < 1$, где r_0 — малая величина. Перепишем формулу (15.412) в поляр-

ных координатах, учитывая, что $dS = r dr d\theta$ и $ds = r d\theta$. Производные по нормали, входящие в левую часть (15.412), выразятся как $\partial\varphi/\partial n = \partial\varphi/\partial r$ при $r = 1$ и $\partial\varphi/\partial n = -\partial\varphi/\partial r$ при $r = r_0$, так как предполагается, что нормаль n внешняя. При этом формула Грина (15.412) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (u \nabla^2 \varphi_1 - \varphi_1 \nabla^2 u) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} - \\ - \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} r_0 d\theta. \quad (15.421)$$

Подставляя в (15.421) вместо лапласиана $\nabla^2 \varphi_1$ его явное выражение из формулы (15.420), имеем

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\omega_0 \omega_1 r \varphi_0 u dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^1 \varphi_1 [\nabla^2 u + \omega_0^2 u] r dr d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} d\theta - \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} r_0 d\theta. \quad (15.422)$$

По виду соотношения (15.422) определяем, что сопряженное уравнение совпадает с однородным уравнением, соответствующим (15.420), т. е.

$$\nabla^2 u + \omega_0^2 u = 0. \quad (15.423)$$

Следовательно, оба эти уравнения являются самосопряженными.

Обращаясь к однородной задаче (т. е. полагая в (15.422) $\omega_1 = 0$ и $f = 0$) и используя (15.423), из соотношения (15.422) получаем, что

$$\int_0^{2\pi} u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta - \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} r_0 d\theta = 0. \quad (15.424)$$

Граничным условием, сопряженным условию в начале координат, т. е. $|\varphi_1(0, \theta)| < \infty$, является условие ограниченности решения сопряженной задачи $|u(0, \theta)| < \infty$. При этом второй член в левой части соотношения (15.424) обращается в нуль. Далее обычное рассуждение приводит к требованию обращения в нуль коэффициента при $\partial\varphi_1/\partial r$ в подынтегральном выражении в первом члене левой части (15.424). Таким образом, сопряженные граничные условия имеют вид

$$|u(0, \theta)| < \infty, \quad u(1, \theta) = 0. \quad (15.425)$$

Сравнивая краевую задачу (15.423), (15.425) с однородной краевой задачей, соответствующей (15.223)—(15.225), убеждаемся в том, что обе эти задачи являются самосопряженными.

Для того чтобы вывести соответствующее условие разрешимости, вернемся к исходной неоднородной задаче. Используя уравнение (15.423) и граничные условия (15.425) и переходя к пределу при $r_0 \rightarrow 0$, из соотношения (15.422) получаем

$$2\omega_0\omega_1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi_0 u r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} d\theta,$$

откуда с учетом граничных условий (15.225) находим

$$2\omega_0\omega_1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi_0 u r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} f(\theta) d\theta. \quad (15.426)$$

Соотношение (15.426) является искомым условием разрешимости задачи (15.223)—(15.225).

Подставляя теперь в (15.426) выражение (15.231) для функции φ_0 и вспоминая, что $\omega_0 = \Omega_{nm}$, имеем

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r J_n(\Omega_{nm} r) (A_{nm} e^{in\theta} + \bar{A}_{nm} e^{-in\theta}) u dr d\theta = \\ = -J'_n(\Omega_{nm}) \int_0^{2\pi} (A_{nm} e^{in\theta} + \bar{A}_{nm} e^{-in\theta}) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (15.427)$$

Поскольку рассматриваемая задача является самосопряженной, в качестве функции u можно взять решение соответствующей однородной задачи

$$u = J_n(\Omega_{nm} r) e^{in\theta} \quad \text{или} \quad J_n(\Omega_{nm} r) e^{-in\theta},$$

причем соотношение (15.427) должно удовлетворяться для любого из этих решений.

Используя второе решение, из (15.427) получим

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r J_n^2(\Omega_{nm} r) (A_{nm} + \bar{A}_{nm} e^{-2in\theta}) dr d\theta = \\ = -\Omega_{nm} J_n'^2(\Omega_{nm}) \int_0^{2\pi} [A_{nm} f(\theta) + \bar{A}_{nm} e^{-2in\theta} f(\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (15.428)$$

Вычисляя интеграл от функции $r J_n^2(\Omega_{nm} r)$ с помощью формулы (15.427) и вспоминая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = 0,$$

если m — произвольное целое число, из (15.428) получаем соотношение

$$\omega_1 A_{nm} = -\Omega_{nm} f_{2n} \bar{A}_{nm},$$

которое полностью совпадает с (15.249), выведенным другим способом.

Упражнения

15.1. Найти условия разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \dot{u}_2 + 2u_1 = \sum_{n=1}^4 P_n e^{int}, \\ \ddot{u}_2 - \dot{u}_1 + 2u_2 = \sum_{n=1}^4 Q_n e^{int}, \end{cases}$$

где P_n и Q_n — заданные постоянные величины.

15.2. Найти условия разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} + x = P_1 \exp(2it) + P_2 \exp(it/\sqrt{2}), \\ \ddot{y} - 1,5\dot{x} + 2y = Q_1 \exp(2it) + Q_2 \exp(it/\sqrt{2}), \end{cases}$$

где P_n и Q_n — заданные постоянные величины.

15.3. Найти условия разрешимости следующих краевых задач:

а) $u'' + 0,25u = f(x), \quad u'(0) = a, \quad u(\pi) = b;$

б) $u'' + x^{-1}u' + k^2u = f(x), \quad u(a) = c_1, \quad u(b) = c_2.$

В задаче б) предполагается, что $b > a > 0$ и, кроме того, что соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение.

15.4. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$u'' + x^{-1}u' + (\lambda^2 - n^2x^{-2})u = f(x), \\ |u(0)| < \infty, \quad u'(a) = g,$$

где a и g — заданные постоянные величины, а λ — корень уравнения $J'_n(\lambda a) = 0$.

15.5. Найти условия разрешимости следующих задач:

а) $\varphi'' + n^2\pi^2 d^{-2}\varphi = f(x), \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(d) = \beta;$

б) $\varphi'' + \gamma_n^2 \varphi = f(x),$

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(l) - \alpha \varphi(l) = \beta,$$

где $\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = -\alpha$.

15.6. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{n^2 \pi^2}{d^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \varphi = f(y, z),$$

$$\varphi_y(0, z) = 0, \quad \varphi_z(y, 0) = 0,$$

$$\varphi_y(d, z) = \beta_1, \quad \varphi_z(y, b) = \beta_2.$$

15.7. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left(\gamma_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \varphi = f(r),$$

$$|\varphi(0)| < \infty, \quad \varphi'(l) - \beta \varphi(l) = \alpha,$$

где γ_{nm} — корень уравнения $\gamma J'_n(\gamma) - \beta J_n(\gamma) = 0$.

15.8. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \gamma_{nm}^2 \varphi = f(r) e^{in\theta},$$

$$|\varphi(0, \theta)| < \infty, \quad \varphi_r(l, \theta) = \alpha \exp(in\theta),$$

где γ_{nm} — корень уравнения $J'_n(\gamma) = 0$.

15.9. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \lambda u = F(r),$$

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b$$

при условии, что параметр λ равен одному из собственных значений соответствующей однородной задачи.

15.10. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\nabla^4 w + \lambda w = F(r),$$

$$|w(0)| < \infty, \quad w(1) = \beta_1,$$

$$|w'(1)| = \beta_2,$$

где λ — одно из собственных чисел соответствующей однородной задачи

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

15.11. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\varphi_1'' + r^{-1} \varphi_1' + (\alpha_n^2 - r^{-2}) \varphi_1 = f_1(r),$$

$$\varphi_2'' + r^{-1} \varphi_2' - (\gamma_n^2 + r^{-2}) \varphi_2 = f_2(r),$$

$$\varphi_1'(1) = \mu_1 \varphi_1(1) + \mu_2 \varphi_2(1), \quad \varphi_2'(1) = \mu_3 \varphi_1(1) + \mu_1 \varphi_2(1),$$

$$|\varphi_1(0)| < \infty, \quad a \varphi_2'(a) - \varphi_2(a) = 0, \quad a > 1$$

при условии, что соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение.

15.12. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{T_0'}{T_0} + \frac{2k u_0'}{\omega - k u_0} \right] \frac{d\varphi}{dr} + \left[\frac{(\omega - k u_0)^2}{T_0} - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \varphi = f(r),$$

$$|\varphi(0)| < \infty, \quad \varphi'(1) - \beta \varphi(1) = \alpha,$$

где T_0 , u_0 и f — известные функции переменной r ; ω , k , β и α — заданные постоянные величины и m — целое число. Предполагается, что соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение.

15.13. При исследовании распространения волны в плоском канале возникает задача

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 5\pi^2 \varphi = f(y) \sin 2\pi x,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=1} = \alpha \sin 2\pi x.$$

Показать, что условие разрешимости данной задачи имеет вид

$$\int_0^1 \cos \pi y f(y) dy = -\alpha.$$

15.14. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[q(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \lambda r(x, y) \varphi = f(x, y),$$

$$\varphi_x(0, y) = 0, \quad \varphi_y(x, 0) = 0,$$

$$\varphi_x(a, y) - \alpha_1(y) \varphi(a, y) = \beta_1(y), \quad \varphi_y(x, b) - \alpha_2(x) \varphi(x, b) = \beta_2(x).$$

15.15. Рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} + 2x + 3\epsilon x^2 + 2\epsilon y^2 = 0, \\ \ddot{y} + \dot{x} + 2\delta y + 4\epsilon xy = 0, \end{cases}$$

где $\delta = 1 + \epsilon\sigma$, $\epsilon \ll 1$. С помощью метода многих масштабов показать, что

$$x = A_1(T_1) \exp(iT_0) + A_2(T_1) \exp(2iT_0) + (\text{к. с.}) + \dots,$$

причем функции $A_1(T_1)$ и $A_2(T_1)$ удовлетворяют системе уравнений

$$A_2' = \frac{1}{3} i\sigma A_2 - \frac{1}{2} iA_1^2,$$

$$A_1' = \frac{1}{3} i\sigma A_1 - i\bar{A}_1 A_2.$$

15.16. Нелинейные колебания динамической системы с двумя степенями свободы описываются системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + 0,5\dot{u}_2 + \delta u_1 = \epsilon u_1 u_2, \\ \ddot{u}_2 - 0,5\dot{u}_1 + 0,5u_2 = \epsilon u_1^2, \end{cases}$$

где $\epsilon \ll 1$, $\delta = 0,5 + \epsilon\sigma$. Показать, что система уравнений относительно комплексных амплитуд имеет вид

$$3A_2' = i\sigma A_2 + 2A_1^2,$$

$$3A_1' = i\sigma A_1 - 4\bar{A}_1 A_2.$$

15.17. С помощью метода многих масштабов получить уравнения, описывающие изменения амплитуд и фаз колебаний следующей системы:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_2 u_3, \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \alpha_2 u_1 u_3, \\ \ddot{u}_3 + \omega_3^2 u_3 = \alpha_3 u_1 u_2 \end{cases}$$

при условии, что $\omega_3 \approx \omega_1 + \omega_2$.

15.18. Рассмотреть параметрически возбуждаемую колебательную систему из § 15.3. Получить уравнения относительно комплексных амплитуд в случае, если а) $\Omega \approx 1$, б) $\Omega \approx 2$ и в) $\Omega \approx 4$.

15.19. Определить разложение первого порядка для собственных чисел задачи

$$u'' + \lambda u = \epsilon f(x) u,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

при условии, что $\epsilon \ll 1$.

15.20. Рассмотреть задачу о собственных значениях

$$u'' + [\lambda + \epsilon f(x)] u = 0,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Показать, что

$$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - 2\epsilon \int_0^1 f(x) \sin^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x dx + \dots$$

15.21. Рассмотреть краевую задачу

$$u^{IV} + 5u'' + [\lambda + \epsilon f(x)] u = 0, \quad \epsilon \ll 1,$$

$$u(0) = u''(0) = u(\pi) = u''(\pi) = 0.$$

Показать, что при $\lambda \approx 4$

$$\lambda = 4 + \epsilon \lambda_1,$$

где λ_1 — один из корней уравнения

$$\lambda_1^2 + (f_{11} + f_{22}) \lambda_1 + f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0,$$

$$f_{11} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin^2 x \, dx, \quad f_{22} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin^2 2x \, dx,$$

$$f_{12} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x \sin 2x \, dx.$$

15.22. Найти условие разрешимости для уравнения

$$p_2(x) y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x)$$

при краевых условиях

а) $y(0) = \beta_1, \quad y(1) = \beta_2;$

б) $y'(0) = \alpha_1 y(0) + \beta_1, \quad y'(1) = \alpha_2 y(1) + \beta_2;$

с) $y(0) = \alpha_{11} y'(0) + \alpha_{12} y'(1), \quad y(1) = \alpha_{21} y'(0) + \alpha_{22} y'(1).$

15.23. Найти условия, при которых уравнение

$$p_2 y''' + p_3 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$$

является самосопряженным. Ответ: $p_2 = 1,5p_3, \quad p_0 = 0,5(p_3''' - p_2'' + p_1')$.

15.24. Найти условия разрешимости для уравнения

$$p_2(x) y''' + p_3(x) y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x)$$

при краевых условиях

а) $y(0) = \beta_1, \quad y'(0) = \beta_2, \quad y(1) = \beta_3;$

б) $y''(0) = \alpha_{11} y(0) + \alpha_{12} y'(0) + \alpha_{13} y(1) + \alpha_{14} y'(1),$

$y''(1) = \alpha_{21} y(0) + \alpha_{22} y'(0) + \alpha_{23} y(1) + \alpha_{24} y'(1),$

$0 = \alpha_{31} y(0) + \alpha_{32} y'(0) + \alpha_{33} y(1) + \alpha_{34} y'(1).$

15.25. Доказать, что произвольное однородное самосопряженное уравнение шестого порядка можно представить в виде

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(A_3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(A_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(A_1 \frac{dy}{dx} \right) + A_0 y = 0.$$

15.26. Доказать, что произвольное однородное самосопряженное уравнение порядка $2m$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} \left(A_m \frac{d^m y}{dx^m} \right) + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{d}{dx} \left(A_1 \frac{dy}{dx} \right) + A_0 y = 0. \end{aligned}$$

15.27. Найти условия разрешимости краевой задачи

$$p_5(x) y^V + p_4(x) y^{IV} + p_3(x) y''' + p_2(x) y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = f(x),$$

$$y(0) = \beta_1, \quad y'(0) = \beta_2, \quad y''(0) = \beta_3, \quad y(1) = \beta_4, \quad y'(1) = \beta_5.$$

15.28. Рассмотреть задачу о собственных значениях

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^{\pi} [\cos(s+t) + \varepsilon K_1(s, t)] \varphi(t) dt, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Показать, что

$$\varphi^{(1)} = \cos s + \dots, \varphi^{(2)} = \sin s + \dots, \\ \lambda^{(1)} = 2\pi^{-1} + \varepsilon\lambda_1 + \dots, \lambda^{(2)} = -2\pi^{-1} + \varepsilon\lambda_2 + \dots.$$

Найти коэффициенты λ_n .

15.29. Найти равномерно пригодное разложение первого порядка для решения интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-1}^1 [st + s^2t^2 + \varepsilon K_1(s, t)] \varphi(t) dt, \quad \varepsilon \ll 1.$$

15.30. Найти равномерно пригодное разложение первого порядка для решения интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 [s - t + \varepsilon K_1(s, t)] \varphi(t) dt, \quad \varepsilon \ll 1.$$

15.31. Показать, что дифференциальный оператор

$$L(y) = \frac{1}{v_3} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1}$$

будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $v_3 = \pm v_1$.

15.32. Показать, что дифференциальный оператор

$$L(y) = \frac{1}{v_4} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_3} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1}$$

является самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$v_4 = \pm v_1, \quad v_3 = \pm v_2.$$

15.33. Показать, что дифференциальный оператор

$$L(y) = \frac{1}{v_{n+1}} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_n} \frac{d}{dx} \dots \frac{1}{v_3} \frac{d}{dx} \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} \frac{y}{v_1}$$

является самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$v_{n+1} = \pm v_1, \quad v_n = \pm v_2, \quad v_{n-1} = \pm v_3, \dots$$

15.34. Рассмотреть задачу на собственные значения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \alpha \varphi \right) \Big|_{r=a+\varepsilon f(\theta)} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=b+\varepsilon g(\theta)} = 0.$$

Найти разложения первого порядка для собственного числа ω .

15.35. Течение несжимаемой жидкости вблизи волнистой стенки описывается краевой задачей вида

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin kx \right) \Big|_{y=\varepsilon \cos kx} = 0,$$

$$\varphi \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow Ux.$$

Показать, что

$$\varphi = U(x + \varepsilon \sin kx e^{-ky} + 0,5\varepsilon^2 k \sin 2kx e^{-2ky} + \dots).$$

Обсудить вопрос о равномерности этого разложения.

15.36. Обтекание тела, близкого по форме к телу вращения, несжимаемым невязким потоком жидкости описывается следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$\psi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow Ur \sin \theta, \quad \psi|_{r=a} (1 - \varepsilon \sin^2 \theta) = 0.$$

Показать, что

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\varepsilon}{2} U \left(\frac{3a^2}{r} \sin \theta - \frac{a^4}{r^3} \sin 3\theta \right) + \dots$$

Рассмотреть вопрос о равномерности этого разложения.

15.37. Найти условия разрешимости краевой задачи

$$\nabla^4 \varphi - \lambda \varphi = f(r, \theta),$$

$$\varphi(a, \theta) = 0, \quad \varphi(b, \theta) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(a, \theta) = f(\theta), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}(b, \theta) = g(\theta).$$

15.38. При исследовании устойчивости двумерного течения несжимаемой жидкости вблизи волнистой стенки возникает краевая задача

$$i\alpha u + v' = f_1(y),$$

$$-i(\omega - \alpha U)u + U'v + i\alpha p - \frac{1}{R}(u'' - \alpha^2 u) = f_2(y),$$

$$-i(\omega - \alpha U)v + p' - \frac{1}{R}(\sigma'' - \alpha^2 v) = f_3(y),$$

$$u(0) = c_1, \quad v(0) = c_2,$$

$$u|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где U и f_n — известные функции переменной y , ω , α , R , k и c_n — некоторые постоянные величины, а штрихом обозначается производная по y . Показать, что условие разрешимости данной задачи имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_n f_n dy = \frac{1}{R} c_1 \varphi_2'(0) + \frac{1}{R} c_2 \varphi_3'(0),$$

где φ_n удовлетворяет уравнению и граничным условиям соответствующей сопряженной задачи

$$i\alpha \varphi_2 - \varphi_2' = 0,$$

$$i\alpha \varphi_1 - i(\omega - \alpha U)\varphi_2 - R^{-1}(\varphi_2'' - \alpha^2 \varphi_2) = 0,$$

$$-\varphi_1' + U'\varphi_2 - i(\omega - \alpha U)\varphi_3 - R^{-1}(\varphi_3'' - \alpha^2 \varphi_3) = 0,$$

$$\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0,$$

$$\varphi_n \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Указание: Умножить исходные уравнения на φ_1 , φ_2 и φ_3 соответственно. Далее, проинтегрировать полученный результат от $y=0$ до $y=\infty$, преобразовать полученные соотношения с помощью интегрирования по частям, с тем чтобы «перенести» дифференцирование с функций u , v и p на функции φ_n . Затем сложить полученные уравнения и собрать коэффициенты при u , v и p , после чего провести остальные этапы вывода, следуя § 15.13.

15.39. При исследовании устойчивости трехмерного пограничного слоя, существующего при течении несжимаемой жидкости вблизи плоской поверхности, возникает следующая задача:

$$\begin{aligned} i\alpha u + i\beta w + v' &= f_1(y), \\ -i\omega u + U'v + i\alpha p - R^{-1}(u'' - k^2 u) &= f_2(y), \\ -\omega v + p' - R^{-1}(v'' - k^2 v) &= f_3(y), \\ -i\omega w + i\beta p + W'v - R^{-1}(w'' - k^2 w) &= f_4(y), \\ u = v = w = 0, \quad y = 0, \\ u, v, w \rightarrow 0 \quad y \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\omega = \omega - \alpha U - \beta W$ и $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Здесь U, W и f_n — известные функции переменной y , а α, β, R и ω — заданные постоянные величины. При условии что однородная задача имеет нетривиальное решение, показать, что условие разрешимости имеет вид

$$\sum_{n=1}^4 \int_0^{\infty} f_n \varphi_n dy = 0,$$

где функции φ_n ($n = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} i\alpha\varphi_2 + i\beta\varphi_4 - \varphi_3' &= 0, \\ i\alpha\varphi_1 - i\omega\varphi_2 - R^{-1}(\varphi_2'' - k^2\varphi_2) &= 0, \\ -\varphi_1' + U'\varphi_2 - i\omega\varphi_3 - R^{-1}(\varphi_3'' - k^2\varphi_3) + W'\varphi_4 &= 0, \\ i\beta\varphi_1 - i\omega\varphi_4 - R^{-1}(\varphi_4'' - k^2\varphi_4) &= 0, \\ \varphi_3(0) = \varphi_2(0) = \varphi_4(0) &= 0, \\ \varphi_n|_{y \rightarrow \infty} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

15.40. Рассмотреть задачу о собственных значениях

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \lambda\varphi &= e x^2 \varphi, \\ \varphi(x, 0) = \varphi(x, \pi) = \varphi(0, y) = \varphi(\pi, y) &= 0. \end{aligned}$$

Найти разложения первого порядка для случая, когда значение параметра λ близко к значениям 2 и 5.

15.41. Рассмотреть краевую задачу для уравнения

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = e f(x, y, z) \varphi$$

с условиями обращения функции φ в нуль на поверхности куба с ребром, равным π . Найти разложения первого порядка при $\lambda \approx 3$ и $\lambda \approx 6$, если а) $f = x^2$ и б) $f = x^2 y$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

А.1. Основные формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (\text{A.3})$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \quad (\text{A.4})$$

Складывая формулы (A.3), имеем

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]; \quad (\text{A.5})$$

вычитая формулы (A.3), получаем

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)]. \quad (\text{A.6})$$

Аналогичным образом, складывая и вычитая формулы (A.4), находим

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)], \quad (\text{A.7})$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

Из соотношений (A.2)—(A.4) следует, что

$$\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos (\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cos \beta$, получим

$$\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{A.8})$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Положим теперь

$$\alpha + \beta = x \text{ и } \alpha - \beta = y,$$

тогда
$$\alpha = \frac{1}{2} (x + y) \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{2} (x - y).$$

При этом равенства (A.5)—(A.7) переписываются в виде

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos y - \cos x &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Подстановка в формулу (A.5) $\beta = \alpha$ дает

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (\text{A.12})$$

подстановка $\beta = \alpha$ в формулы (A.7) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha,\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

складывая которые, получаем

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (\text{A.14})$$

Для того чтобы выразить $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$, положим в (A.3) $\beta = 2\alpha$:

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha.$$

Используя формулы (A.12) и (A.13), имеем

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \alpha.$$

Поскольку $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, то

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha),$$

$$\text{или} \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \quad (\text{A.15})$$

Выражая отсюда $\sin^3 \alpha$, приходим к часто используемой формуле

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha - \sin 3\alpha). \quad (\text{A.16})$$

Аналогичным образом, можно выразить $\cos 3\alpha$ через $\cos \alpha$. Действительно, полагая в (A.4) $\beta = 2\alpha$, имеем

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha,$$

откуда, используя (A.12) и (A.13), получаем

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \quad (\text{A.17})$$

или

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha). \quad (\text{A.18})$$

А.2. Комплексные величины

Полагая в (1.49) $x = i\theta$, где $i = \sqrt{-1}$, находим

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

Поскольку $i^2 = -1$, имеем разложение

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots,$$

которое можно переписать в виде

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right). \quad (\text{A.19})$$

Сравнивая ряды в круглых скобках с разложениями (1.47) и (1.48), заключаем, что

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (\text{A.20})$$

Переходя в (A.20) к комплексно сопряженным величинам, получаем

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta. \quad (\text{A.21})$$

Сложение формул (A.20) и (A.21) дает

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \quad (\text{A.22})$$

Вычитая (A.21) из (A.20), находим

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (\text{A.23})$$

Покажем теперь, как с помощью формул (A.20)–(A.23) можно представить $\cos^n \theta$ и $\sin^n \theta$ в виде рядов Фурье. Из (A.22) в соответствии с биномиальной формулой следует, что

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left[\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right]^3 = \frac{1}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}). \end{aligned}$$

Перегруппировывая соответствующие члены и учитывая (A.22), имеем

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \frac{1}{2} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot 2 \cos 3\theta + \frac{3}{8} \cdot 2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta),$$

что полностью совпадает с (А.18). Аналогичным образом, из (А.22) с помощью формулы (А.16) получаем, что

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta &= \left[\frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right]^3 = \frac{1}{8i^3} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 = \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \\ &= \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta\end{aligned}$$

в полном соответствии с формулой (А.16).

Для того чтобы разложить $\cos^n \theta$ при произвольном натуральном n , заметим, что

$$\cos^n \theta = \left[\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right]^n = \frac{1}{2^n} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n.$$

Полагая теперь в формуле (1.396) $a = \exp(i\theta)$ и $b = \exp(-i\theta)$, находим

$$\begin{aligned}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n &= \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} e^{i(n-m)\theta} e^{-im\theta} = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} e^{i(n-2m)\theta} = e^{in\theta} + ne^{i(n-2)\theta} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!} e^{i(n-4)\theta} + \dots + \frac{n(n-1)}{2!} e^{-i(n-4)\theta} + ne^{-i(n-2)\theta} + \\ &+ e^{-in\theta} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} + n[e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}] + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!} [e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}] + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} [e^{i(n-6)\theta} + e^{-i(n-6)\theta}] + \dots\end{aligned}$$

Поэтому для нечетных n

$$\begin{aligned}\cos^n \theta &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\theta + n \cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos(n-6)\theta + \dots \right], \quad (\text{А.24})\end{aligned}$$

а для четных n

$$\begin{aligned}\cos^n \theta &= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos n\theta + n \cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)\theta + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{n!}{2\left(\frac{1}{2}n\right)!\left(\frac{1}{2}n\right)!} \right]. \quad (\text{А.25})\end{aligned}$$

Аналогичным образом, для того чтобы разложить в ряд $\sin^n \theta$, заметим, что

$$\sin^n \theta = \left[\frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right]^n = \frac{1}{2^n i^n} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n.$$

Полагая в формуле (1.396) $a = \exp(i\theta)$ и $b = -\exp(-i\theta)$, имеем

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{m! (n-m)!} e^{i(n-m)\theta} e^{-im\theta} = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{m! (n-m)!} e^{i(n-2m)\theta}. \end{aligned}$$

Тогда в случае четных n

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n &= e^{in\theta} - ne^{i(n-2)\theta} + \frac{n(n-1)}{2!} e^{i(n-4)\theta} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!} e^{-i(n-4)\theta} - ne^{-i(n-2)\theta} + e^{-in\theta} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} - \\ &- n[e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta}] + \frac{n(n-1)}{2!} [e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta}] + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, для четных n

$$\begin{aligned} \sin^n \theta &= \frac{2}{2^n i^n} \left[\cos n\theta - n \cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)\theta - \right. \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos(n-6)\theta + \dots + (-1)^{n/2} \frac{n!}{2 \left(\frac{1}{2}n\right)! \left(\frac{1}{2}n\right)!} \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

В случае нечетных n имеем

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n &= e^{in\theta} - ne^{i(n-2)\theta} + \frac{n(n-1)}{2!} e^{i(n-4)\theta} - \\ &- \frac{n(n-1)}{2!} e^{-i(n-4)\theta} + ne^{-i(n-2)\theta} - e^{-in\theta} = e^{in\theta} - e^{-in\theta} - \\ &- n[e^{i(n-2)\theta} - e^{-i(n-2)\theta}] + \frac{n(n-1)}{2!} [e^{i(n-4)\theta} - e^{-i(n-4)\theta}] + \dots \end{aligned}$$

Поэтому для нечетных n

$$\begin{aligned} \sin^n \theta &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left[\sin n\theta - n \sin(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2!} \sin(n-4)\theta - \right. \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sin(n-6)\theta + \dots \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Полагая в (A.25) $n = 4$, имеем

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3).$$

Полагая в (А.24) $n = 5$, находим

$$\cos^5 \theta = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta).$$

Полагая в (А.26) $n = 4$, имеем

$$\sin^4 \theta = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3).$$

Полагая в (А.27) $n = 5$, находим

$$\sin^5 \theta = \frac{1}{16} (\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta).$$

Для того чтобы разложить в ряд Фурье произведение $\cos^n \theta \times \sin^m \theta$, мы можем либо непосредственно использовать формулы (А.22) и (А.23), либо предварительно разложить каждый из сомножителей по степеням $\cos \theta$ и $\sin \theta$ и затем воспользоваться формулами (А.22) и (А.23).

А.3. Интегралы

$$\begin{aligned} \int \cos \alpha x \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int \cos (\alpha + \beta) x dx + \frac{1}{2} \int \cos (\alpha - \beta) x dx = \\ &= \begin{cases} \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{2 (\alpha + \beta)} + \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{2 (\alpha - \beta)}, & \beta \neq \alpha, \\ \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha} + \frac{1}{2} x, & \beta = \alpha; \end{cases} \quad (\text{А.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha x \sin \beta x dx &= \frac{1}{2} \int \cos (\alpha - \beta) x dx - \frac{1}{2} \int \cos (\alpha + \beta) x dx = \\ &= \begin{cases} \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{2 (\alpha - \beta)} - \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{2 (\alpha + \beta)}, & \beta \neq \alpha, \\ \frac{1}{2} x - \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha}, & \beta = \alpha; \end{cases} \quad (\text{А.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \frac{1}{2} \int \sin (\alpha + \beta) x dx + \frac{1}{2} \int \sin (\alpha - \beta) x dx = \\ &= \begin{cases} -\frac{\cos (\alpha + \beta) x}{2 (\alpha + \beta)} - \frac{\cos (\alpha - \beta) x}{2 (\alpha - \beta)}, & \beta \neq \alpha, \\ -\frac{\cos 2\alpha x}{4\alpha}, & \beta = \alpha; \end{cases} \quad (\text{А.30}) \end{aligned}$$

$$\int \cos^n \theta \sin \theta d\theta = -\frac{\cos^{n+1} \theta}{n+1}, \quad (\text{А.31})$$

$$\int \sin^n \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sin^{n+1} \theta}{n+1}. \quad (\text{А.32})$$

Интегрируя левые и правые части формул (А.24)—(А.27), получаем

для нечетных n

$$\int \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1}{n} \sin n\theta + \frac{n}{n-2} \sin(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2!(n-4)} \sin(n-4)\theta + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-6)} \sin(n-6)\theta + \dots \right], \quad (\text{A.33})$$

для четных n

$$\int \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1}{n} \sin n\theta + \frac{n}{n-2} \sin(n-2)\theta - \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)}{2!(n-4)} \sin(n-4)\theta + \dots + \frac{n! \theta}{2 \left(\frac{1}{2}n\right)! \left(\frac{1}{2}n\right)!} \right], \quad (\text{A.34})$$

для четных n

$$\int \sin^n \theta d\theta = \frac{2}{2^{n-1}n} \left[\frac{1}{n} \sin n\theta - \frac{n}{n-2} \sin(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{2!(n-4)} \sin(n-4)\theta + \dots + \frac{(-1)^{n/2} n! \theta}{2 \left(\frac{1}{2}n\right)! \left(\frac{1}{2}n\right)!} \right], \quad (\text{A.35})$$

для нечетных n

$$\int \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left[-\frac{1}{n} \cos n\theta + \frac{n}{n-2} \cos(n-2)\theta - \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)}{2!(n-4)} \cos(n-4)\theta + \dots \right]. \quad (\text{A.36})$$

Окончательно из соотношений (A.33)–(A.36) находим

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{n! \pi}{2^{n-1} \left(\frac{1}{2}n\right)! \left(\frac{1}{2}n\right)!}, & \text{если } n \text{ четное;} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ \frac{(-1)^{n/2} n! \pi}{2^{n-1} i^n \left(\frac{1}{2}n\right)! \left(\frac{1}{2}n\right)!}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

Приложение Б

ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое связывает неизвестную функцию (называемую часто зависимой переменной), производные этой функции, а также некоторые известные величины. Если зависимая переменная представляет собой функцию одной переменной (называемой обычно независимой переменной или аргументом), то такое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же зависимая переменная является функцией двух или более независимых переменных, тогда данное дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Итак, обыкновенное дифференциальное уравнение общего вида записывается в форме

$$F\left(\frac{d^n u}{dx^n}, \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{du}{dx}, u, x\right) = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где порядок старшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Например, уравнение (Б.1) представляет собой дифференциальное уравнение порядка n .

Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка называется линейным, если оно линейно относительно функции u и ее производных u' , u'' , \dots , $u^{(n-1)}$, $u^{(n)}$. Таким образом, самое общее линейное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$p_n(x) \frac{d^n u}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x) u = f(x), \quad (\text{Б.2})$$

где p_m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) и f — известные функции от x . Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (Б.2) называется однородным; в противном случае оно будет неоднородным.

Положим, что функции $p_m(x)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) непрерывны на промежутке $I = \{x \in [a, b]\}$, включающем в себя некоторую точку x_0 , причем $p_n(x)$ не обращаются в нуль ни в одной точке этого промежутка. Тогда для любых вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ существует единственное решение $u(x)$, удовлетворяющее уравнению (Б.2) на всем промежутке I , а также начальным условиям

$$u(x_0) = \alpha_0, \quad u'(x_0) = \alpha_1, \dots, \quad u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Приведенное утверждение представляет собой основную теорему существования для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Часто бывает удобным выразить уравнение (Б.2) в операторной форме. С этой целью обозначим через D дифференциальный оператор d/dx . Тогда

$$Du = \frac{du}{dx} = u',$$

$$D^2u = D(Du) = D(u') = u'',$$

$$D^n u = D(D^{n-1}u) = D[u^{(n-1)}] = u^{(n)}.$$

Кроме того, будем считать, что $D^0 u = u$. При этом уравнение (Б.2) можно переписать как

$$p_n D^n u + p_{n-1} D^{n-1} u + \dots + p_1 D u + p_0 D^0 u = f(x), \quad (\text{Б.3})$$

или, в более удобной, сокращенной форме

$$L(u) = f(x), \quad (\text{Б.4})$$

где оператор L определяется с помощью соотношения

$$L = p_n D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \dots + p_1 D + p_0 D^0. \quad (\text{Б.5})$$

Оператор L называется линейным оператором и обладает следующими свойствами. Так, если c — постоянная и $u(x)$ — произвольная функция, имеющая по крайней мере n производных, то

$$L(cu) = cL(u), \quad (\text{Б.6})$$

поскольку

$$\begin{aligned} L(cu) &= p_n (cu)^{(n)} + p_{n-1} (cu)^{(n-1)} + \dots + p_1 (cu)' + p_0 (cu) = \\ &= p_n c u^{(n)} + p_{n-1} c u^{(n-1)} + \dots + p_1 c u' + p_0 c u = \\ &= c [p_n u^{(n)} + p_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + p_1 u' + p_0 u] = cL(u). \end{aligned}$$

Если u_1 и u_2 — две произвольные n раз дифференцируемые функции, то

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2), \quad (\text{Б.7})$$

поскольку

$$\begin{aligned} L(u_1 + u_2) &= p_n (u_1 + u_2)^{(n)} + p_{n-1} (u_1 + u_2)^{(n-1)} + \dots \\ &\dots + p_1 (u_1 + u_2)' + p_0 (u_1 + u_2) = p_n [u_1^{(n)} + u_2^{(n)}] + \\ &+ p_{n-1} [u_1^{(n-1)} + u_2^{(n-1)}] + \dots + p_1 (u_1' + u_2') + p_0 (u_1 + u_2) = \\ &= [p_n u_1^{(n)} + p_{n-1} u_1^{(n-1)} + \dots + p_1 u_1' + p_0 u_1] + \\ &+ [p_n u_2^{(n)} + p_{n-1} u_2^{(n-1)} + \dots + p_1 u_2' + p_0 u_2] = L(u_1) + L(u_2). \end{aligned}$$

Из соотношений (Б.6) и (Б.7) следует, что

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2), \quad (\text{Б.8})$$

или, в более общем случае,

$$L(c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2) + \dots + c_mL(u_m), \quad (\text{Б.9})$$

где c_i — некоторые произвольные постоянные.

Б.1. Однородные уравнения

Полагая в уравнении (Б.4) $f(x) \equiv 0$, получаем однородное дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$L(u) = 0. \quad (\text{Б.10})$$

Если функция u_1 есть решение уравнения (Б.10) и c — произвольная постоянная, то произведение cu_1 также является решением уравнения (Б.10), поскольку

$$L(cu_1) = cL(u_1) = 0.$$

Принцип суперпозиции

Если функции u_1 и u_2 являются решениями уравнения (Б.10), а c_1 и c_2 — две произвольные постоянные, тогда выражение $c_1u_1 + c_2u_2$ также будет решением уравнения (Б.10), поскольку

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

В более общем случае, если функции u_1, u_2, \dots, u_m являются решениями уравнения (Б.10), а c_1, c_2, \dots, c_m — произвольные постоянные, то сумма

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m$$

также будет решением этого уравнения, поскольку

$$\begin{aligned} L(c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m) &= c_1L(u_1) + c_2L(u_2) + \dots + c_mL(u_m) = \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_m \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Данное свойство называется обычно принципом суперпозиции, а выражение $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m$ — линейной комбинацией функций u_1, u_2, \dots, u_m .

Линейная независимость

Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ представляют собой множество функций, определенных на промежутке $I = [a, b]$. Говорят, что функции u_1, u_2, \dots, u_m линейно зависимы между собой, если найдутся такие постоянные c_1, c_2, \dots, c_m , не равные нулю одновременно, что условие

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_mu_m(x) = 0 \quad (\text{Б.11})$$

выполняется для всех x из промежутка $[a, b]$; в противном случае данные функции называются линейно независимыми. Ограничение, что не все c_i должны равняться нулю одновременно, яв-

ляется существенным, поскольку соотношение (Б.11) в случае, если все c_i равны нулю, выполняется для любых функций $u_m(x)$. Например, функции $2x - 1$ и $6x - 3$ будут линейно зависимыми, потому что $-3 \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (6x - 3) \equiv 0$.

В то же время функции $2x - 1$ и $5x - 3$ являются линейно независимыми, поскольку невозможно подобрать такие постоянные c_1 и c_2 , не равные нулю одновременно, чтобы

$$c_1(2x - 1) + c_2(5x - 3) = 0.$$

Другим важным методом проверки функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$ на линейную независимость служит исследование их определителя Вронского, т. е. определителя вида

$$W = W(u_1, u_2, \dots, u_m) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.12})$$

Так, если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_m(x)$ — линейно зависимы на промежутке I , тогда существуют постоянные c_1, c_2, \dots, c_m , не равные нулю одновременно, такие, что

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m = 0. \quad (\text{Б.13})$$

Дифференцируя соотношение (Б.13) $(m - 1)$ раз, имеем

$$c_1 u_1' + c_2 u_2' + \dots + c_m u_m' = 0, \quad (\text{Б.14})$$

$$c_1 u_1'' + c_2 u_2'' + \dots + c_m u_m'' = 0, \quad (\text{Б.15})$$

$$c_1 u_1^{(m-1)} + c_2 u_2^{(m-1)} + \dots + c_m u_m^{(m-1)} = 0. \quad (\text{Б.16})$$

При произвольном фиксированном x из промежутка I соотношения (Б.13)—(Б.16) образуют неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_1, c_2, \dots, c_m . Так как постоянные c_i одновременно не равны нулю, определитель матрицы коэффициентов этой системы должен равняться нулю. Но поскольку указанный определитель является определителем Вронского для функций u_1, u_2, \dots, u_m , то, следовательно, $W(x) = 0$ в каждой точке промежутка I . Если же определитель Вронского не равен нулю во всех точках $x \in I$, тогда система (Б.13)—(Б.16) имеет только тривиальное решение $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$, так что функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ оказываются линейно независимыми. Таким образом, функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots, m$) являются линейно зависимыми на промежутке I тогда и только тогда, когда их определитель Вронского равен нулю во всех точках промежутка I . Например,

определитель Вронского для функций $2x - 1$ и $6x - 3$ имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} 2x - 1 & 6x - 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

и, следовательно, эти функции линейно зависимы. В то же время для функций $2x - 1$ и $5x - 3$ определитель Вронского не равен нулю, поскольку

$$W = \begin{vmatrix} 2x - 1 & 5x - 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, указанные функции являются линейно независимыми.

Общее решение

Уравнение (Б.10) имеет не более чем n линейно независимых решений. В самом деле, допустим, что функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_N(x)$, где $N > n$, являются решениями уравнения (Б.10). Тогда определитель

$$W(u_1, u_2, \dots, u_N) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n & \dots & u_N \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' & \dots & u_N' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & \dots & u_N^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(N-1)} & u_2^{(N-1)} & \dots & u_n^{(N-1)} & \dots & u_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \quad (\text{Б.17})$$

равен нулю, поскольку с помощью уравнения (Б.10) мы всегда можем представить $(n+1)$ -ю строку в виде линейной комбинации первых n строк. Следовательно, решения $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_N(x)$ при $N > n$ оказываются линейно зависимыми.

Покажем теперь, что уравнение (Б.10) на промежутке I имеет ровно n линейно независимых решений. С этой целью заметим, что согласно основной теореме существования уравнение (Б.10) имеет n единственно возможных решений $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$u_1(x_0) = 1, \quad u_1'(x_0) = u_1''(x_0) = \dots = u_1^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$u_2(x_0) = 0, \quad u_2'(x_0) = 1, \quad u_2''(x_0) = \dots = u_2^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$u_3(x_0) = u_3'(x_0) = 0, \quad u_3''(x_0) = 1, \quad u_3'''(x_0) = \dots = u_3^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_m(x_0) = \dots = u_m^{(m-2)}(x_0) = 0, \quad u_m^{(m-1)}(x_0) = 1,$$

$$u_m^{(m)}(x_0) = \dots = u_m^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n(x_0) = u_n'(x_0) = \dots = u_n^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad u_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Легко показать, что определитель Вронского для этих n решений в точке x_0 равен единице. Следовательно, этот определитель не равен нулю в каждой точке промежутка I ¹⁾, и потому функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ линейно независимы.

Произвольная совокупность n линейно независимых решений уравнения (Б.10) называется фундаментальной системой, причем произвольная линейная комбинация этих решений также будет решением уравнения (Б.10). Таким образом, если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ представляют собой фундаментальную систему решений уравнения (Б.10), то комбинация

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) \quad (\text{Б.18})$$

при любых значениях постоянных c_1, c_2, \dots, c_n в соответствии с принципом суперпозиции будет решением уравнения (Б.10). При этом, поскольку любое решение уравнения (Б.10) может быть получено из выражения (Б.18) путем надлежащего выбора постоянных c_m , выражение (Б.18) называется общим решением уравнения (Б.10).

В заключение этого параграфа выведем соотношение, связывающее значение определителя Вронского для фундаментальной системы решений в произвольной точке промежутка I с его значением в некоторой заданной точке x_0 . С этой целью запишем определитель Вронского в виде

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.19})$$

Дифференцируя выражение (Б.19) по x и используя известные свойства определителей, имеем

$$W' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1'' & u_2'' & \dots & u_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.20})$$

¹⁾ См. также формулу (Б.24). — Прим. перев.

Все определители в (Б.20), за исключением последнего, равны нулю вследствие наличия в каждом из них одинаковых строк. Поэтому

$$W' = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.21})$$

Воспользовавшись уравнением (Б.10) для того, чтобы выразить член $u_m^{(n)}$ через $u_m, u_m', \dots, u_m^{(n-1)}$, и используя известные свойства определителей, перепишем определитель (Б.21) в виде

$$W' = -\frac{p_{n-1}}{p_n} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \\ - \frac{p_{n-2}}{p_n} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix} - \dots - \frac{p_0}{p_n} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{vmatrix}. \quad (\text{Б.22})$$

Все определители в соотношении (Б.22), за исключением первого, также равны нулю ввиду наличия в каждом из них одинаковых строк. Кроме того, легко видеть, что первый из определителей в (Б.22) есть определитель Вронского (Б.19). Таким образом, мы получаем дифференциальное уравнение

$$W' = -\frac{p_{n-1}}{p_n} W, \quad (\text{Б.23})$$

решение которого можно представить в виде

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x \frac{p_{n-1}(\tau)}{p_n(\tau)} d\tau \right]. \quad (\text{Б.24})$$

Найденная формула позволяет выразить значения $W(x)$ через $W(x_0)$.

Б.2. Неоднородные уравнения

Уравнение (Б.10) называется однородным по отношению к уравнению (Б.4). При этом оказывается, что мы можем решить неоднородное уравнение (Б.4), если нам известны общее решение соответствующего однородного уравнения и какое-либо частное решение уравнения (Б.4). Так, если функции $u_1(x), u_2(x), \dots$,

$u_n(x)$ представляют собой n линейно независимых решений однородного уравнения (Б.10), а функция $u_p(x)$ есть некоторое частное решение уравнения (Б.4), то общее решение уравнения (Б.4) будет иметь вид

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n + u_p, \quad (\text{Б.25})$$

где c_n — произвольные постоянные. При этом комбинация

$$u_c = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \quad (\text{Б.26})$$

часто называется *дополнительной функцией*. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (Б.4) есть сумма некоторого частного решения и дополнительной функции. Покажем прежде всего, что всякое решение вида (Б.25) является решением уравнения (Б.4). Поскольку $L(u_m) = 0$ при $m = 1, 2, \dots, n$ и $L(u_p) = f$, то

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n + u_p) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2) + \dots + c_n L(u_n) + L(u_p) = f.$$

Тем самым мы получаем, что выражение (Б.25) является решением уравнения (Б.4). Покажем далее, что всякое решение уравнения (Б.4) имеет вид (Б.25). Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения (Б.4). Тогда

$$L(u) = f,$$

и поскольку

$$L(u_p) = f,$$

то

$$L(u - u_p) = L(u) - L(u_p) = f - f = 0.$$

Таким образом, разность $u - u_p$ является решением соответствующего однородного уравнения $L(v) = 0$. Следовательно,

$$v = u - u_p = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

откуда мы сразу получаем формулу (Б.25).

Кроме того, если

$$L(u) = f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots + f^{(k)}(x) \quad (\text{Б.27})$$

и

$$L[u_p^{(i)}] = f^{(i)}(x), \quad (\text{Б.28})$$

то

$$u_p = u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \dots + u_p^{(k)}, \quad (\text{Б.29})$$

поскольку

$$L(u_p) = L[u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \dots + u_p^{(k)}] = L[u_p^{(1)}] + L[u_p^{(2)}] + \dots + L[u_p^{(k)}] = f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots + f^{(k)}(x).$$

Б.3. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим построение общих решений однородных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. уравнений вида

$$L(u) = 0, \quad (\text{Б.30})$$

$$\text{где } L = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + p_{n-2}D^{n-2} + \dots + p_2D^2 + p_1D + p_0, \quad (\text{Б.31})$$

а коэффициенты p_n являются постоянными величинами. Каждому оператору L поставим в соответствие некоторый многочлен вида

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \dots + p_2s^2 + p_1s + p_0, \quad (\text{Б.32})$$

$$\text{так что } P(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + p_{n-2}D^{n-2} + \dots + p_2D^2 + p_1D + p_0. \quad (\text{Б.33})$$

Назовем $P(D)$ операторным многочленом и перепишем уравнение (Б.30) как

$$P(D)u = 0. \quad (\text{Б.34})$$

Поскольку

$$De^{sx} = se^{sx}, \quad D^2e^{sx} = s^2e^{sx}, \dots, \quad D^ne^{sx} = s^ne^{sx},$$

$$\text{то} \quad P(D)e^{sx} = P(s)e^{sx}. \quad (\text{Б.35})$$

При этом $P(s)$ обычно называется *характеристическим многочленом*, соответствующим операторному многочлену $P(D)$. Из соотношения (Б.35) следует, что если s_m является корнем многочлена $P(s)$, то функция $\exp(s_mx)$ будет решением уравнения (Б.34). Поэтому если многочлен $P(s)$ имеет n различных действительных корней s_1, s_2, \dots, s_n , то каждая из функций

$$e^{s_1x}, e^{s_2x}, \dots, e^{s_nx}$$

является решением уравнения (Б.34). Поскольку эти функции линейно независимы, общее решение уравнения (Б.34) будет записываться в виде

$$u = c_1e^{s_1x} + c_2e^{s_2x} + \dots + c_ne^{s_nx}, \quad (\text{Б.36})$$

где c_n — произвольные постоянные.

Обратимся, например, к уравнению

$$u'' - 3u' + 2u = 0, \quad (\text{Б.37})$$

которое можно переписать как

$$(D^2 - 3D + 2)u = 0. \quad (\text{Б.38})$$

Соответствующий характеристический многочлен имеет вид

$$s^2 - 3s + 2 = (s - 2)(s - 1);$$

корнями его будут значения $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$. Поэтому каждая из функций $\exp(x)$ и $\exp(2x)$ является решением уравнения

(Б.37). Поскольку эти функции линейно независимы, общее решение уравнения (Б.37) можно представить как

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$u''' + 2u'' - u' - 2 = 0, \quad (\text{Б.38})$$

для которого соответствующий характеристический многочлен имеет вид

$$s^3 + 2s^2 - s - 2 = (s - 1)(s + 1)(s + 2);$$

корнями его будут значения $s_1 = 1$, $s_2 = -1$ и $s_3 = -2$. Поэтому каждая из функций

$$e^x, e^{-x}, e^{-2x}$$

является решением уравнения (Б.38). Так как эти функции линейно независимы между собой, общее решение (Б.38) можно записать в виде

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}.$$

Следует отметить, что в общем случае корни характеристического многочлена могут оказаться равными друг другу или комплексными. Рассмотрим эти возможности более подробно, начав со случая комплексных корней.

Случай комплексных корней

Рассмотрим уравнение второго порядка, у которого соответствующий характеристический многочлен имеет два комплексно сопряженных корня $\mu + i\omega$ и $\mu - i\omega$, где μ и ω — вещественные величины. Отметим также, что если один из корней характеристического многочлена оказывается комплексным, то второй корень обязательно должен быть комплексно сопряженным с первым, поскольку сам этот многочлен (т. е. его коэффициенты. — *Прим. перев.*) является вещественным. Таким образом, каждая из функций

$$e^{(\mu+i\omega)x} \quad \text{и} \quad e^{(\mu-i\omega)x}$$

будет решением исходного уравнения. Поскольку эти решения линейно независимы между собой, общее решение этого уравнения дается формулой

$$u = c_1 e^{(\mu+i\omega)x} + c_2 e^{(\mu-i\omega)x}. \quad (\text{Б.39})$$

Используя равенства

$$e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x,$$

$$e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \sin \omega x,$$

перепишем выражение (Б.39) в следующей вещественной форме:

$$\begin{aligned} u &= c_1 e^{\mu x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) + c_2 e^{\mu x} (\cos \omega x - i \sin \omega x) = \\ &= e^{\mu x} [(c_1 + c_2) \cos \omega x + i(c_1 - c_2) \sin \omega x], \end{aligned}$$

или

$$u = e^{\mu x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x), \quad (\text{Б.40})$$

где $A = c_1 + c_2$ и $B = i(c_1 - c_2)$ — произвольные постоянные, которые можно считать вещественными. Формула (Б.40) показывает, что каждая из вещественных и мнимых частей обеих функций $\exp[(\mu + i\omega)x]$ и $\exp[(\mu - i\omega)x]$ является решением исходного уравнения.

Отметим также, что решение (Б.40) можно переписать в следующей более удобной для использования форме:

$$u = ae^{\mu x} \cos(\omega x - \beta), \quad (\text{Б.41})$$

$$\text{или} \quad u = ae^{\mu x} \sin(\omega x + \theta), \quad (\text{Б.42})$$

$$\text{где} \quad a = (A^2 + B^2)^{1/2}, \quad \beta = \arctg \frac{B}{A}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$u'' + \omega_0^2 u = 0, \quad (\text{Б.43})$$

соответствующий характеристический многочлен для которого записывается в виде

$$s^2 + \omega_0^2.$$

Он имеет корни $s_{1,2} = \pm i\omega_0$. Поэтому каждая из функций $\exp(i\omega_0 x)$ и $\exp(-i\omega_0 x)$ является решением уравнения (Б.43); точно так же решениями уравнения (Б.43) являются функции $\cos \omega_0 x$ и $\sin \omega_0 x$, т. е. вещественная и мнимая части $\exp(i\omega_0 x)$. Таким образом, общее решение уравнения (Б.43) можно представить в одной из следующих форм:

$$u = A \cos \omega_0 x + B \sin \omega_0 x,$$

$$\text{или} \quad u = a \cos(\omega_0 x - \beta),$$

$$\text{или, наконец,} \quad u = a \sin(\omega_0 x + \theta).$$

В качестве второго примера исследуем уравнение

$$u'' + 2u' + 5u = 0. \quad (\text{Б.44})$$

Соответствующий характеристический многочлен имеет вид

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2i)(s + 1 - 2i).$$

Корнями его будут значения $s_1 = -1 - 2i$ и $s_2 = -1 + 2i$, так что каждая из функций $\exp(-x - 2ix)$ и $\exp(-x + 2ix)$ является решением уравнения (Б.44). Аналогичным образом можно утверждать, что функции $\exp(-x) \cos 2x$ и $-\exp(-x) \sin 2x$, т. е. вещественная и мнимая части $\exp(-x - 2ix)$, также являются решениями уравнения (Б.44). Следовательно, общее решение уравнения (Б.44) может быть представлено в виде

$$u = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение

$$u^{IV} - \omega_0^2 u = 0, \quad (\text{Б.45})$$

соответствующий характеристический многочлен для которого есть

$$s^4 - \omega_0^2.$$

Корнями этого многочлена будут $s_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0}$ и $s_{3,4} = \pm i \sqrt{\omega_0}$. Это означает, что каждая из функций

$$e^{\sqrt{\omega_0}x}, e^{-\sqrt{\omega_0}x}, e^{i\sqrt{\omega_0}x}, e^{-i\sqrt{\omega_0}x},$$

или

$$e^{\sqrt{\omega_0}x}, e^{-\sqrt{\omega_0}x}, \cos \sqrt{\omega_0}x, \sin \sqrt{\omega_0}x,$$

является решением уравнения (Б.45). Таким образом, общее решение уравнения (Б.45) записывается в виде

$$u = A \cos \sqrt{\omega_0}x + B \sin \sqrt{\omega_0}x + Ce^{\sqrt{\omega_0}x} + De^{-\sqrt{\omega_0}x}.$$

В качестве последнего примера исследуем уравнение

$$u^{IV} + 2u''' + 6u'' + 2u' + 5u = 0. \quad (\text{Б.46})$$

Характеристический многочлен для него имеет вид

$$s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 2s + 5 = (s^2 + 1)(s^2 + 2s + 5);$$

корнями его будут $s_{1,2} = \pm i$, $s_3 = -1 - 2i$, $s_4 = -1 + 2i$. Поэтому каждая из функций

$$e^{ix}, e^{-ix}, e^{-x-2ix}, e^{-x+2ix},$$

или

$$\cos x, \sin x, e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x,$$

будет являться решением уравнения (Б.46). Следовательно, общее решение уравнения (Б.46) может быть записано в виде

$$u = A \cos x + B \sin x + e^{-x} (C \cos 2x + D \sin 2x).$$

Случай равных корней

Рассмотрим уравнение

$$u'' - 2\alpha u' + \alpha^2 u = 0, \quad (\text{Б.47})$$

или

$$(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2) u = (D - \alpha)^2 u = 0. \quad (\text{Б.48})$$

Соответствующий характеристический многочлен

$$(s - \alpha)^2$$

имеет двукратный корень $s = \alpha$. Следовательно, мы имеем только одно решение экспоненциального вида, а именно функцию $\exp(\alpha x)$. Так как уравнение (Б.47) представляет собой уравнение второго порядка, нам необходимо построить второе решение, которое было бы линейно независимым с функцией $\exp(\alpha x)$. С этой целью положим

$$u = e^{\alpha x} v(x). \quad (\text{Б.49})$$

Поскольку

$$\begin{aligned} D(e^{\alpha x} v) &= v D e^{\alpha x} + e^{\alpha x} D v = \alpha v e^{\alpha x} + e^{\alpha x} D v = \\ &= e^{\alpha x} (D v + \alpha v) = e^{\alpha x} (D + \alpha) v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad D^2(e^{\alpha x}v) &= D[D(e^{\alpha x}v)] = D[e^{\alpha x}(D + \alpha)v] = e^{\alpha x}(D + \alpha)^2v, \\ \text{то} \quad P(D)(e^{\alpha x}v) &= e^{\alpha x}P(D + \alpha)v. \end{aligned} \quad (\text{Б.50})$$

При этом подстановка выражения (Б.49) в (Б.48) приводит к уравнению

$$e^{\alpha x}D^2v = 0, \quad \text{или} \quad D^2v = 0,$$

решением которого является функция $v = c_1 + c_2x$. Таким образом, общее решение уравнения (Б.47) есть

$$u = (c_1 + c_2x)e^{\alpha x}. \quad (\text{Б.51})$$

Другими словами, функции $\exp(\alpha x)$ и $x \exp(\alpha x)$ представляют собой два линейно независимых решения уравнения (Б.47).

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$(D - \alpha)^3u = 0, \quad (\text{Б.52})$$

у которого соответствующий характеристический многочлен

$$(s - \alpha)^3$$

имеет корень $s = \alpha$ третьей кратности. Это означает, что существует лишь одно линейно независимое решение уравнения (Б.52), которое можно представить в виде экспоненты, а именно функция $\exp(\alpha x)$. Для того чтобы найти два других линейно независимых решения, подставим выражение (Б.49) в уравнение (Б.52), откуда, воспользовавшись формулой (Б.50), получим

$$(D - \alpha)^3u = (D - \alpha)^3e^{\alpha x}v(x) = e^{\alpha x}D^3v = 0.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$D^3v = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$v = c_1 + c_2x + c_3x^2.$$

Следовательно, общее решение уравнения (Б.52) можно записать как

$$u = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{\alpha x}. \quad (\text{Б.53})$$

При этом из формулы (Б.53) следует, что функции

$$e^{\alpha x}, \quad xe^{\alpha x}, \quad x^2e^{\alpha x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (Б.52).

В качестве третьего примера исследуем уравнение

$$(D - \alpha)^m u = 0. \quad (\text{Б.54})$$

Как и ранее, используя формулы (Б.49) и (Б.50), для функции получаем уравнение

$$D^m v = 0,$$

решение которого есть

$$v = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_mx^{m-1}.$$

Окончательно имеем

$$u = e^{\alpha x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_m x^{m-1}).$$

В качестве четвертого примера рассмотрим следующее уравнение общего вида, характеристический многочлен которого имеет два кратных корня:

$$(D - \alpha_1)^m (D - \alpha_2)^n u = 0. \quad (\text{Б.55})$$

Уравнение (Б.55) можно переписать как

$$(D - \alpha_1)^m [(D - \alpha_2)^n u] = 0.$$

Отсюда следует, что ему удовлетворяет любое решение более простой задачи

$$(D - \alpha_2)^n u = 0. \quad (\text{Б.56})$$

Поскольку операторы $(D - \alpha_1)^m$ и $(D - \alpha_2)^n$ обладают свойством коммутативности, уравнение (Б.55) можно переписать в виде

$$(D - \alpha_2)^n [(D - \alpha_1)^m u] = 0.$$

Таким образом, уравнение (Б.55) удовлетворяется также с помощью любого решения более простого уравнения вида

$$(D - \alpha_1)^m u = 0. \quad (\text{Б.57})$$

Общее решение уравнения (Б.55) представляет собой сумму общих решений (Б.56) и (Б.57), содержащих $(m + n)$ произвольных постоянных, т. е.

$$u = e^{\alpha_1 x} (c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}) + e^{\alpha_2 x} (b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1}). \quad (\text{Б.58})$$

В качестве примера использования формулы (Б.58) рассмотрим уравнение

$$(D^4 - 8D^2 + 16) u = 0, \quad \text{или} \quad (D^2 - 4)^2 u = 0. \quad (\text{Б.59})$$

Соответствующий характеристический многочлен $(s^2 - 4)^2$ имеет корни

$s_1 = 2$ (двукратный корень) и $s_2 = -2$ (двукратный корень).

Тогда в соответствии с формулой (Б.48) общее решение уравнения (Б.59) можно представить в виде

$$u = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (b_1 + b_2 x) e^{-2x}.$$

В качестве второго приложения формулы (Б.58) рассмотрим следующее уравнение с комплексными корнями:

$$(D^2 + \alpha_1^2)^2 (D^2 + \alpha_2^2)^2 u = 0. \quad (\text{Б.60})$$

Соответствующий характеристический многочлен

$$(s^2 + \alpha_1^2)^2 (s^2 + \alpha_2^2)^2$$

имеет корни

$s_1 = i\alpha_1$ (двукратный корень), $s_2 = -i\alpha_1$ (двукратный корень), $s_3 = i\alpha_2$ (трехкратный корень) и $s_4 = -i\alpha_2$ (трехкратный корень). Поэтому общее решение уравнения (Б.60) записывается как

$$u = (a_1 + a_2x)e^{i\alpha_1x} + (b_1 + b_2x)e^{-i\alpha_1x} + (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{i\alpha_2x} + (d_1 + d_2x + d_3x^2)e^{-i\alpha_2x},$$

или, в действительной форме,

$$u = (A_1 + A_2x) \cos \alpha_1x + (B_1 + B_2x) \sin \alpha_1x + (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cos \alpha_2x + (D_1 + D_2x + D_3x^2) \sin \alpha_2x.$$

Б.4. Частные решения неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

Перейдем теперь к построению частных решений для уравнений вида

$$P(D)u = f(x), \quad (\text{Б.61})$$

где правая часть $f(x)$ может включать в себя экспоненты, тригонометрические функции, положительные степени x и их произведения. Частные решения такого уравнения, соответствующие функциям $f(x)$ общего вида, могут быть найдены другими методами, отличными от используемого здесь символического метода, например, с помощью метода вариации произвольных постоянных, широко применявшегося в гл. 4—11. Ниже для обозначения частного решения уравнения (Б.61) мы будем пользоваться следующей символикой:

$$u = \frac{1}{P(D)} f(x). \quad (\text{Б.62})$$

Случай $f(x) = \exp(\alpha x)$

Поскольку $P(D)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}P(\alpha)$,

то при условии, что $P(\alpha) \neq 0$, частное решение (Б.62) может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{P(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}. \quad (\text{Б.63})$$

Легко видеть, что выражение (Б.63) является частным решением уравнения (Б.61), поскольку

$$P(D)u = P(D) \left[\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)} \right] = \frac{e^{\alpha x} P(\alpha)}{P(\alpha)} = e^{\alpha x}.$$

В случае если $P(\alpha) = 0$, в выражение для $P(D)$ должен входить множитель $(D - \alpha)$. Мы предположим, что α есть корень кратности m для многочлена $P(\alpha)$; следовательно, в $P(D)$ будет входить множитель $(D - \alpha)^m$. Поэтому $P(D) = (D - \alpha)^m Q(D)$, где $Q(\alpha) \neq 0$. Тогда, используя формулу (Б.62), частное решение уравнения (Б.61) можно записать в виде

$$u = \frac{1}{(D - \alpha)^m Q(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{(D - \alpha)^m} \left[\frac{1}{Q(D)} e^{\alpha x} \right].$$

Поскольку $Q(\alpha) \neq 0$, то

$$\frac{1}{Q(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{1}{(D - \alpha)^m} \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)} = \frac{1}{Q(\alpha)} \cdot \frac{1}{(D - \alpha)^m} e^{\alpha x}. \quad (\text{Б.64})$$

Воспользовавшись формулой (Б.50) для случая $v = 1$, из (Б.64) имеем

$$u = \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)} \cdot \frac{1}{D^m} \cdot (1), \quad (\text{Б.65})$$

где выражение $1/D$ обозначает величину, обратную D , т. е. оператор однократного интегрирования по переменной x , тогда как выражение $1/D^m$ представляет собой оператор m -кратного интегрирования по x . Таким образом,

$$\frac{1}{D^m} \cdot (1) = \frac{1}{D^{m-1}} \cdot (x) = \frac{x^m}{m!},$$

и, следовательно, частное решение уравнения (Б.61) в случае когда $P(D) = (D - \alpha)^m Q(D)$, где $Q(\alpha) \neq 0$, будет иметь вид

$$u = \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)} \cdot \frac{x^m}{m!},$$

поскольку

$$\begin{aligned} (D - \alpha)^m Q(D) u &= (D - \alpha)^m Q(D) \left[\frac{e^{\alpha x} x^m}{Q(\alpha) m!} \right] = \\ &= Q(D) \left\{ (D - \alpha)^m \left[\frac{e^{\alpha x} x^m}{Q(\alpha) m!} \right] \right\} = Q(D) \left\{ \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)} D^m \left[\frac{x^m}{m!} \right] \right\} = \\ &= Q(D) \left\{ \frac{e^{\alpha x}}{Q(\alpha)} \right\} = e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Случай $f(x) = \cos \alpha x$

Поскольку

$$D^2 (\cos \alpha x) = -\alpha^2 \cos \alpha x \quad \text{и} \quad D^4 (\cos \alpha x) = (-\alpha^2)^2 \cos \alpha x,$$

то

$$Q(D^2) \cos \alpha x = Q(-\alpha^2) \cos \alpha x.$$

Это дает возможность предположить, что мы можем найти нужное нам частное решение, заменив во всех случаях, где это необходимо, величину D^2 на величину $-\alpha^2$. Таким образом, частное решение уравнения

$$Q(D^2) u = \cos \alpha x \quad (\text{Б.66})$$

дается выражением

$$u = \frac{1}{Q(D^2)} \cos \alpha x = \frac{\cos \alpha x}{Q(-\alpha^2)} \quad (\text{Б.67})$$

при условии, что $Q(-\alpha^2) \neq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} Q(D^2) u &= Q(D^2) \left\{ \frac{\cos \alpha x}{Q(-\alpha^2)} \right\} = \frac{1}{Q(-\alpha^2)} Q(D^2) \{\cos \alpha x\} = \\ &= \frac{Q(-\alpha^2) \cos \alpha x}{Q(-\alpha^2)} = \cos \alpha x. \end{aligned}$$

Важным частным случаем уравнения (Б.66) и решения (Б.67) является уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \quad (\text{Б.68})$$

решение которого имеет вид

$$u = \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega \neq \omega_0. \quad (\text{Б.69})$$

В случае если $Q(-\alpha^2) = 0$, описанную процедуру надлежит несколько видоизменить. С этой целью заметим, что

$$\cos \alpha x = \operatorname{Re} (e^{i\alpha x}),$$

так что уравнение (Б.66) может быть переписано в виде

$$Q(D^2) (\operatorname{Re} u) = \operatorname{Re} (e^{i\alpha x}).$$

Поэтому частное решение уравнения (Б.66) можно будет построить, если мы сумеем найти частное решение уравнения

$$Q(D^2) u = e^{i\alpha x} \quad (\text{Б.70})$$

и затем отделить его действительную часть. Частное решение уравнения (Б.70) можно представить как

$$u = \frac{1}{Q(D^2)} e^{i\alpha x}. \quad (\text{Б.71})$$

Поскольку теперь $Q(-\alpha^2) = 0$, то

$$Q(D) = (D + i\alpha)^m (D - i\alpha)^m F(D^2),$$

где $F(-\alpha^2) \neq 0$. Таким образом, решение (Б.71) переписывается в виде

$$u = \frac{1}{(D + i\alpha)^m (D - i\alpha)^m F(D^2)} e^{i\alpha x} = \frac{1}{(D - i\alpha)^m} \left\{ \frac{1}{(D + i\alpha)^m F(D^2)} e^{i\alpha x} \right\}, \quad (\text{Б.72})$$

если выделить часть оператора, для которой знаменатель обращается в нуль. Выполняя в формуле (Б.72) действия в фигурных скобках, имеем

$$u = \frac{1}{(D - i\alpha)^m} \left\{ \frac{e^{i\alpha x}}{(2i\alpha)^m F(-\alpha^2)} \right\} = \frac{1}{(2i\alpha)^m F(-\alpha^2)} \cdot \frac{1}{(D - i\alpha)^m} \{e^{i\alpha x}\},$$

откуда, используя формулу (Б.50) для случая $v = 1$, находим

$$u = \frac{e^{i\alpha x}}{(2i\alpha)^m F(-\alpha^2)} \frac{1}{D^m} (1) = \frac{x^m e^{i(\alpha x - \frac{1}{2} m\pi)}}{(2\alpha)^m F(-\alpha^2) m!}. \quad (\text{Б.73})$$

Отделяя в выражении (Б.73) действительную часть, получаем следующее частное решение уравнения (Б.66):

$$u = \frac{x^m}{(2\alpha)^m F(-\alpha^2) m!} \cos\left(\alpha x - \frac{1}{2} m\pi\right). \quad (\text{Б.74})$$

Важным частным случаем формул (Б.66) и (Б.74) является уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = (D^2 + \omega_0^2) u = \cos \omega_0 t, \quad (\text{Б.75})$$

частное решение которого имеет вид

$$u = \frac{t}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{1}{2} \pi\right) = \frac{1}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (\text{Б.76})$$

Случай $f(x) = \sin \alpha x$ исследуется аналогичным образом. Так, частное решение уравнения

$$Q(D^2) u = \sin \alpha x. \quad (\text{Б.77})$$

дается формулой

$$u = \frac{\sin \alpha x}{Q(-\alpha^2)}, \quad Q(-\alpha^2) \neq 0. \quad (\text{Б.78})$$

Если теперь $Q(-\alpha^2) = 0$, мы можем искать частное решение таким же способом, как и в случае $f(x) = \cos \alpha x$, за исключением того, что теперь мы будем выделять не действительную, а мнимую часть решения (Б.73). Так, например, частное решение уравнения

$$(D^2 + \alpha^2)^m F(D^2) u = \sin \alpha x \quad (\text{Б.79})$$

имеет вид

$$u = \frac{x^m}{(2\alpha)^m F(-\alpha^2) m!} \sin\left(\alpha x - \frac{1}{2} m\pi\right). \quad (\text{Б.80})$$

Важным частным случаем формул (Б.79) и (Б.80) является уравнение

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = (D^2 + \omega_0^2) u = \sin \omega_0 t, \quad (\text{Б.81})$$

частное решение которого записывается как

$$u = \frac{1}{2\omega_0} \sin\left(\omega_0 t - \frac{1}{2} \pi\right) = -\frac{1}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t. \quad (\text{Б.82})$$

Если полином $P(D)$ явно зависит от D и D^2 , описанную процедуру также необходимо видоизменить. При этом вместо исследования общего случая рассмотрим конкретное уравнение

$$(D^2 + 2D + 3) u = \cos \alpha x, \quad (\text{Б.83})$$

частное решение которого может быть записано как

$$u = \frac{1}{D^2 + 2D + 3} \cos \alpha x. \quad (\text{Б.84})$$

Заменяя в (Б.84) величину D^2 на $-\alpha^2$, находим

$$u = \frac{1}{2D + 3 + \alpha^2} \cos \alpha x. \quad (\text{Б.85})$$

Преобразуем теперь правую часть формулы (Б.85) таким образом, чтобы получить в знаменателе разность квадратов двух величин, одна из которых оказалась при этом равной D^2 . Для этого умножим числитель и знаменатель в (Б.85) на оператор $2D - (3 - \alpha^2)$, в результате чего получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{2D - (3 - \alpha^2)}{(2D + 3 - \alpha^2)(2D - 3 + \alpha^2)} \cos \alpha x = \frac{2D - 3 + \alpha^2}{4D^2 - (3 - \alpha^2)^2} \cos \alpha x = \\ &= (2D - 3 + \alpha^2) \frac{1}{4D^2 - (3 - \alpha^2)^2} \cos \alpha x = \\ &= (2D - 3 + \alpha^2) \frac{\cos \alpha x}{-4\alpha^2 - (3 - \alpha^2)^2} = \\ &= \frac{2\alpha \sin \alpha x - (3 - \alpha^2) \cos \alpha x}{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 9}. \end{aligned}$$

Случай $f(x) = x^m$, где m — положительное число

Рассмотрим уравнение

$$P(D) u = x^m, \quad (\text{Б.86})$$

частное решение которого может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{P(D)} x^m. \quad (\text{Б.87})$$

Разлагая функцию $1/P(D)$ в ряд Лорана по степеням D , находим

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{P(D)} x^m = \frac{1}{D^k} (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{m+k} D^{m+k} + \dots) x^m = \\ &= \left(\frac{a_0}{D^k} + \frac{a_1}{D^{k-1}} + \dots + a_{m+k} D^m + \dots \right) x^m = \\ &= \frac{a_0 x^{m+k}}{(m+k)(m+k-1)\dots(m+1)} + \\ &+ \frac{a_1 x^{m+k-1}}{(m+k-1)(m+k-2)\dots(m+1)} + \dots + m! a_{m+k}. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$D(D^2 + 3D + 2) u = x^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{D(D^2 + 3D + 2)} x^2 = \frac{1}{2D \left(1 + \frac{3}{2} D + \frac{1}{2} D^2 \right)} x^2 = \\ &= \frac{1}{2D} \left[1 - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} D^2 \right) + \left(\frac{3}{2} D^2 + \frac{1}{2} D^3 \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3}{2} D + \frac{1}{2} D^2 \right)^3 + \dots \right] x^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2D} \left(1 - \frac{3}{2} D + \frac{7}{4} D^2 - \frac{15}{8} D^3 + \dots \right) x^2 = \\
&= \left(\frac{1}{2D} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8} D - \frac{15}{16} D^2 + \dots \right) x^2 = \\
&= \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{4} x - \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

Отметим, что все члены ряда порядка выше чем D^2 дают нам нули, поскольку они воздействуют на функцию x^2 . Кроме того, постоянный член $-\frac{15}{8}$ в этом выражении может быть опущен, поскольку его можно включить в решение однородного уравнения.

Общий случай

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$(D^2 + 4\alpha^2) u = x^2 \cos 2\alpha x.$$

Поскольку $P(-\alpha^2) = 0$, то мы можем найти его частное решение как действительную часть частного решения уравнения

$$(D^2 + 4\alpha^2) u = x^2 e^{2i\alpha x}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{D^2 + 4\alpha^2} x^2 e^{2i\alpha x} = \frac{1}{(D - 2i\alpha)(D + 2i\alpha)} x^2 e^{2i\alpha x} = \\
&= e^{2i\alpha x} \frac{1}{D(D + 4i\alpha)} x^2 = \frac{e^{2i\alpha x}}{4i\alpha} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{4i\alpha} - \frac{D}{16\alpha^3} + \frac{D^3}{64i\alpha^5} + \right. \\
&\quad \left. + \dots \right) x^2 = \frac{e^{2i\alpha x}}{4i\alpha} \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{x^2}{4i\alpha} - \frac{x^2}{8\alpha^3} + \frac{1}{32i\alpha^5} \right),
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{4\alpha} \operatorname{Re} \left[e^{2i\alpha x} \left(-\frac{1}{3} ix^3 + \frac{x^2}{4\alpha} + \frac{ix}{8\alpha^3} - \frac{1}{32\alpha^5} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{16\alpha^3} \left(x^2 - \frac{1}{8\alpha^3} \right) \cos 2\alpha x + \frac{1}{12\alpha} \left(x^3 - \frac{3x}{8\alpha^3} \right) \sin 2\alpha x.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- (Абрамовиц М., Стиган И). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.
- Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. — Харьков: Гос. научно-технич. изд-во Украины, 1939.
- Алфорс (Ahlfors L. V.). Complex Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1953.
- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
- Арскотт (Arscott F.). Periodic Differential Equations. — New York: Pergamon, 1964.
- (Бабич В. М.). Математические вопросы теории дифракции и распространения волн. Под ред. В. М. Бабича. Записки научных семинаров ЛОМИ им. В. А. Стеклова. Вып. 1—12. — Л.: Наука, 1968—1981.
- Баумен (Bowman F.). Introduction to Bessel Functions. — New York: Dover, 1958.
- Бейер (Beyer R. T.). Nonlinear Acoustics. — Washington, D. C.: Naval Ship Systems Command, 1974.
- Бейтмен (Bateman H.). Partial Differential Equations of Mathematical Physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
- Беллман (Bellman R.). Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. — New York: Holt, 1964.
- Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1954.
- Бендер, Орсар (Bender C. M., Orszag S. A.). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. — New York: McGraw-Hill, 1978.
- Биркгоф, Рота (Birkhoff G., Rota G. C.). Ordinary Differential Equations. — Boston: Ginn and Company, 1962.
- Блакьер О. Анализ нелинейных систем. Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.
- Блейстейн, Ханделсман (Bleistein N., Handelsman R. A.). Asymptotic Expansions of Integrals. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- Блум, Казаринов (Bloom C. O., Kazarinoff N. D.). Short Wave Radiation Problems in Inhomogeneous Media: Asymptotic Solutions. — New York: Springer-Verlag, 1976.
- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
- Бойс, Ди Прима (Boyce W. E., Di Prima R. C.). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. — New York: Wiley, 1977.
- Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961.
- Брауер, Ногел (Brauer F., Nohel J. A.). The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. — New York: Benjamin, 1969.
- Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1959.
- Брокетт (Brockett R. W.). Finite Dimensional Linear Systems. — New York: Wiley, 1970.

- Бутенин Н. В. и др. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.
- Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.
- Бургерс (Burgers T. M.). The Nonlinear Diffusion Equation: Asymptotic Solutions and Statistical Problems. — Amsterdam: North-Holland—Holland, 1974.
- Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
- Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостн. Пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
- Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I—II. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1949.
- Ган (Hahn W.). Stability of Motion. — New York: Springer-Verlag, 1967.
- Гарабедян (Garabedian P. R.). Partial Differential Equations. — New York: Wiley, 1964.
- Грабмюллер (Grabmüller H.). Singular Perturbation Techniques Applied to Integro-Differential Equations. — San Francisco: Pitman, 1978.
- Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
- Гринберг (Greenberg M. D.). Foundations of Applied Mathematics. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.
- Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- Дейвис (Davis H.) Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. — New York: Dover, 1962.
- Ден Хартог (Den Hartog J. P.). Mechanical Vibrations. — New York: McGraw-Hill, 1947.
- Деттман (Dettman J. W.). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations. — New York: McGraw-Hill, 1974.
- Джакалья Г. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.
- Джеффрис (Jeffreys H.). Asymptotic Approximations. — Oxford: Oxford University Press, 1962.
- Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Вып. 1—3. Пер. с англ. — М.: Мир, 1969—1970.
- Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. — М.: Изд. АН СССР, 1959.
- Дингл (Dingle R. B.). Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation. — New York: Academic, 1973.
- Дьюар М. Дж. С., Догерти Р. Теория возмущений молекулярных орбиталей в органической химии. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
- Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963.
- Ивен-Ивановский (Evan-Iwanowski R. M.). Oscillations in Mechanical Systems. — New York: Elsevier, 1969.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. — М.: Наука, 1971.
- Каннинггэм (Cunningham W. J.). Introduction to Nonlinear Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1958.
- Каплун (Kaplun S.). Fluid Mechanics and Singular Perturbations. Lagerstrom P. A., Howard L. N., Liu C. S., Eds. — New York: Academic, 1967.
- Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.
- Карриер, Крук, Пирсон (Carrier G. F., Krook M., Pearson C. E.). Functions of a Complex Variable. — New York: McGraw-Hill, 1966.

- Карриер, Пирсон (Carrier G. F., Pearson C. E.). Ordinary Differential Equations. — Waltham, Mass.: Blaisdell, 1968.
- Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Пер. с японск. — М.: Мир, 1972.
- Каудерер Г. Нелинейная механика. Пер. с нем. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1958.
- Конonenko В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. — М.: Наука, 1964.
- Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
- Копсон (Copson E. T.). An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable. — Oxford: Oxford University Press, 1935.
- Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.
- Коул Р. Г. (Cole R. H.). Theory of Ordinary Differential Equations. — New York: Appleton-Century-Crofts, 1968.
- Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
- Кумар К. Теория возмущений и проблема многих тел для атомного ядра. Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
- Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Пер. с нем. — Т. 1—2. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.
- Лайтхилл (Lighthill M. J.). Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1974.
- (Лейбович, Сибасс). Нелинейные волны. Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
- Лейпхольц (Leipholz H. E.). Stability Theory. — New York: Academic, 1970.
- Лешпец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- Лю (Lu Y. -C.). Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory. — New York: Springer-Verlag, 1976.
- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
- Магнус, Оберхеттингер (Magnus W. and Oberhettinger F.). Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics. — New York: Chelsea, 1947.
- Магнус, Уинклер (Magnus W. and Winkler S.). Hill's Equation. — New York: Wiley, 1966.
- Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матвея. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1953.
- Мак-Лаклан (McLachlan N. W.). Ordinary Nonlinear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences. — Oxford: Clarendon Press, 1950.
- Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956.
- Мейрович (Meirovitch L.). Methods of Analytical Dynamics. — New York: McGraw-Hill, 1970.
- Мерцбахер (Merzbacher E.). Quantum Mechanics. — New York: Wiley, 1970.
- Миллер (Miller K. S.). Linear Differential Equations in the Real Domain. — New York: W. W. Morton, 1963.
- Минорский (Minorsky N.). Non-Linear Mechanics. — Ann Arbor, MI: J. W. Edwards, 1947.
- Минорский (Minorsky N.). Nonlinear Oscillations. — Princeton: Van Nostrand, 1962.
- Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964.

- Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1—2. Пер. с нем. — М.: Изд. иностр. лит., 1958—1960.
- Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1972.
- Мюррей (Murray J. D.). *Asymptotic Analysis*. — Oxford: Clarendon, 1974.
- Найфе А. Методы возмущений. Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.
- Найфе, Мук (Nayfeh A. and Mook D. T.). *Nonlinear Oscillations*. — New York: Wiley, 1979.
- Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — Пер. с англ. — М.: Наука, 1978.
- О'Малли (O'Malley R. E.). *Introduction to Singular Perturbations*. — New York: Academic, 1974.
- Пиаджио (Piaggio H. T. H.). *An Elementary Treatise on Differential Equations and their Applications*. — London: G. Bell and Sons, 1954.
- Пуанкаре А. Избранные труды. В 3-х т. Т. I. Новые методы небесной механики. Пер. с франц. — М.: Наука, 1971.
- Рабенштейн (Rabenstein A. L.). *Introduction to Ordinary Differential Equations*. — New York: Academic, 1972.
- Реллих (Rellich F.). *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems*. — New York: Gordon and Breach, 1969.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1—4. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977—1982.
- Рокленд (Rockland C.). *Hypoellipticity and Eigenvalue Asymptotics*. — New York: Springer-Verlag, 1975.
- Росо (Roseau M.). *Asymptotic Wave Theory*. — Amsterdam: North-Holland, 1976.
- Саргеев, Галеев (Sagdeev R. Z. and Galeev A. A.). *Nonlinear Plasma Theory*. — New York: Benjamin, 1969.
- Сибуйа (Sibuya Y.). *Global Theory of a Second Order Linear Ordinary Differential Equation*. — Amsterdam: North-Holland, 1975.
- Силлак (Siljak D. D.). *Nonlinear Systems*. — New York: Wiley, 1969.
- Сирович (Sirovich L.). *Techniques of Asymptotic Analysis*. — New York: Springer-Verlag, 1971.
- Скотт (Scott E. J.). *Transform Calculus*. — New York: Harper and Brothers, 1955.
- Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1—5. — М.: Наука, 1957—1959.
- Стейнманн (Steinmann O.). *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*. — New York: Springer-Verlag, 1971.
- Страбл (Struble R. A.). *Nonlinear Differential Equations*. — New York: McGraw-Hill, 1962.
- Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
- Тондл А. Динамика роторов турбоагрегатов. Пер. с англ. — Л.: Энергия, 1971.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
- Уили (Wylie C. R.). *Advanced Engineering Mathematics*. — New York: McGraw-Hill, 1965.
- Уилкокс (Wilcox C. H.). *Asymptotic Solutions of Differential Equations and their Applications*. — New York: Wiley, 1964.
- Уилкокс (Wilcox C. H.). *Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics*. — New York: Wiley, 1966.
- Уиттекер (Whittaker E. T.). *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
- Уиттекер (Whittaker E. T.). *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Ч. 1—II. Пер. с англ. — М.: Наука, 1963.
- Фенс (Fens W. G.). *Self-Adjoint Operators*. — New York: Springer-Verlag, 1975.
- Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966.

- Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение. Пер. с англ. — М.: Мир, 1967.
- Фридрихс (Friedrichs K. O.). Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
- Харедорн (Hagedorn P.). Nichtlineare Schwingungen. — Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1978.
- Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Пер. с англ. — М.: Изд. иностр. лит., 1957.
- Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
- Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. (Метод ВКБ.) Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
- Хейл Дж. К. Колебания в нелинейных системах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
- Хейл (Hale J. K.). Ordinary Differential Equations. — New York: Wiley, 1969.
- Хилдебранд (Hildebrand F. B.). Methods of Applied Mathematics. — New York: Prentice-Hall, 1952.
- Хоффман (Hoffman K.). Linear Algebra. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1961.
- Хохштадт (Hochstadt H.). Differential Equations. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
- Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.
- Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. — М.: Мир, 1978.
- Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. (Асимптотические методы и критерии устойчивости и неустойчивости решений.) — Киев: Изд-во АН УССР, 1960.
- Экхаус (Eckhaus W.). Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations. — Amsterdam: North-Holland, 1973.
- Экхаус (Eckhaus W.). Studies in Nonlinear Stability Theory. — New York: Springer-Verlag, 1965.
- Эрдейи А. Асимптотические разложения. Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1962.
- Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми (Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G.). Higher Transcendental Functions. 3 Vols. — New York: McGraw-Hill, 1953.
- Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.

Литература, добавленная редактором перевода

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, 1982.
2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений: Материалы к семинару «Дифференциальные уравнения и их применение». — Вильнюс: Инст. математики и кибернетики АН СССР, 1981.
3. Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. — Киев: Инст. Мат. АН УССР, 1971.
4. Асимптотические методы в динамике систем. — Новосибирск: Наука, 1980.
5. Асимптотические методы в механике. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1979, 1981.
6. Асимптотические методы в механике жидкости и газа. — Иркутск: ИГУ, 1979.
7. Асимптотические методы в нелинейной механике. — Киев: Инст. Мат. АН УССР, 1974.
8. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Киев: Наукова думка, 1979.
9. Асимптотические методы в теории нестационарных процессов. — М.: Наука, 1971.
10. Асимптотические методы в теории систем. — Иркутск: ИГУ и СЭИ СО АН СССР; в. 1, 1970; в. 2, 1972; В. 3, 4, 5, 1973; в. 6, 7, 1974; в. 8, 1975; в. 9, 1976; в. 10, 1977; в. 11, 1978; в. 12, 1980; в. 13, 1982.

11. Асимптотические методы нелинейной механики. — Киев: Инст. Матем. АН УССР, 1979.
12. Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений: Материалы к семинару «Дифференциальные уравнения и их применение». — Вильнюс: Инст. Матем. и киберн. АН Лит. ССР, 1980.
13. Асимптотические методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложение. — Фрунзе: Кирг. Гос. ун-т, 1981.
14. Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений. — Киев: Инст. Матем. АН УССР, 1978.
15. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
16. Бабич В. М., Булдырев В. С. Искусство асимптотики. Вестн. Ленингр. ун-та, № 13, 1973.
17. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
18. Баранцев Р. Г. Об асимптотологии. Вестн. Ленингр. ун-та, № 1, 1976.
19. Баранцев Р. Г. Дефиниция асимптотики и системные триады. В кн.: Асимптотические методы в теории систем. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1980.
20. Баренблат Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.
21. Бартман А. Б., Перельман Т. Л. Новый асимптотический метод в аналитической теории переноса. — Минск: Наука и Техника, 1975.
22. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
23. Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
24. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Итоги науки. Математический анализ. — М.: ВИНТИ, 1969.
25. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
26. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
27. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
28. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971.
29. Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям. Тезисы докладов. — Фрунзе: Илим, 1975.
30. Всесоюзная конференция по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. Тезисы докладов. — Алма-Ата: Наука, 1979.
31. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. Пер. с англ. — М.: Мир, 1981.
32. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
33. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979.
34. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. — М.: Наука, 1978.
35. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979.
36. Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980.
7. Зино И. Е., Тропп Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
38. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.

39. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
40. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. — Тбилиси: ИПМ ТГУ, 1981.
41. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
42. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
43. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
44. Методы возмущений в механике. — Новосибирск: Наука, 1982.
45. Методы малого параметра и их применение. — Минск: ИПМ АН СССР, 1982.
46. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.
47. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. — Киев: Высшая школа, 1976.
48. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
49. Мойсеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.
50. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. — Минск: Изд-во БГУ, 1977.
51. Панченков А. Н. Основы теории предельной корректности. — М.: Наука, 1976.
52. Панченков А. Н. Асимптотические методы в экстремальных задачах механики. — Новосибирск: Наука, 1982.
53. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
54. Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.
55. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наукова думка, 1977.
56. Проскураков А. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1977.
57. Риекотыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. — Рига: Зинатне, Т. 1, 1974; Т. 2, 1977; Т. 3, 1981.
58. Рождественский К. В. Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. — Л.: Судостроение, 1979.
59. Смирнов Б. М. Асимптотические методы в теории атомных столкновений. — М.: Атомиздат, 1973.
60. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
61. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
62. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966.
63. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Киев: Наукова думка, 1981.
64. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. — Ташкент: Фан, 1971.
65. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.
66. Цирулис Т. Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. — Рига: Зинатне, 1973.
67. Eckhaus W. Asymptotic analysis of singular perturbations. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автономная система 215, 220, 226

Акустические волны

в каналах, заполненных сжимаемой жидкостью 466

в каналах с переменным поперечным сечением 480—482

в каналах с синусоидальными стенками 438—445

Алгебраические уравнения 35—56

высших порядков 49—51

квадратичные 35—45

кубические 45—49

условия разрешимости 408—414

Альтернатива *Фредгольма*,

для задачи *Штурма—Лиувилля* 426

для интегрального уравнения 477

Амплитудно-частотная характеристика 217

в случае первичного резонанса 227—228

в случае субгармонического резонанса 216—218

в случае супергармонического резонанса 221—222

Анализ размерностей 9—17

для линейного осциллятора 146

для осциллятора с самовозбуждением 161

для систем с квадратичными нелинейностями 174—175

для уравнения *Дюффинга* 116—117

для уравнения *Матве* 253

Аналитическая функция 67, 89, 97, 108,

116, 346, 349, 362

определение 96

Апериодические решения 260

Асимметрия 435, 448

Асимптотическая последовательность 29

логарифмические члены 29

по дробным степеням параметра 38—42,

48—49, 50

по обратным степеням параметра 44, 45

Асимптотический ряд 25—29

его точность 30—31

определение 27—28

погрешность 28

сравнение со сходящимся рядом 30—31,

374.

См. также Асимптотическое разложение

Асимптотического соответствия знак 28,

74, 366, 369

Асимптотическое разложение 29—30

для уравнений с большим параметром 380

единственность 30

интегралов 57—115

определение 29

по параметру 35

равномерное 32

расходящееся 27, 31

функций Весселя 31, 102—104, 114,

369—374, 378

функций Эйри 104—108

элементарные операции над ними 31, 41.

См. также Асимптотический ряд

Биномиальная формула 17—18, 25, 36,

38, 41, 52, 59, 71, 118, 149, 162, 181,

183, 494

Быстрые колебания 87

Вариация произвольных постоянных 148,

345—346, 513

в случае многочастотного возбуждения

246—249

в случае слабой нелинейности общего

вида 201—202

для линейного осциллятора 159—160

для линейных неоднородных дифферен-

циальных уравнений 345—346

для систем с квадратичными нелинейно-

стями 185—186

для уравнения *Дюффинга* 139—141

для уравнения *Дюффинга* в случае вы-

нужденных колебаний 228—233

для уравнения *Матве* 272—274

для уравнения *Релея* 170—172

Векторное решение 345

Ветвь внешнего разложения 334

Взаимодействие,

вязко-невязкое 327

приближений 186

Взаимодействующие моды 443, 445

ВКВ-приближение 380—383, 389

несостоятельность 397—398

применение к решению задачи на соб-

ственные значения 385—389

Внешнее разложение 285—286, 289, 298

для задачи с двумя пограничными слоями

317—318

для нелинейной задачи 329—330, 334

для простой краевой задачи 300

для трехзонной задачи 325—326

для уравнений с переменными коэффи-

циентами 305—306, 308, 311, 314

Внешняя переменная 289

как критерий при выборе внутреннего

разложения 331

Внутренне-внутреннее разложение 283,

286, 287

Внутреннее произведение 412

Внутреннее разложение 285—286, 289, 297—

299

для задачи с двумя пограничными слоями

318—323

для задачи с точкой поворота 390—391

для нелинейной задачи 331—333, 335—

338

для простой краевой задачи 282—283,

301

для уравнения с переменными коэф-

фициентами 306—307, 311—313, 315

Внутренняя переменная 289

выбор 292—298, 306, 309, 311

Возбуждение,

внешнее 208, 209, 216, 221

параметрическое 253

- порядок 224.
См. также Многочастотное возбуждение
 Возмущение,
 по параметру 11, 12, 13, 15, 17, 34
 сингулярное 43
 Возмущенное уравнение 34
 Волновод 438
 Волновое число 440, 442
 Восстанавливающая (возвращающая) сила
 11, 116, 123, 146, 174
 Вронскиан 256, 257, 502—505
 Вторичный резонанс 211—224, 228—232
 определение 211.
См. также Комбинационный резонанс,
 Субгармонический резонанс, Супер-
 гармонический резонанс
 Вынужденные колебания,
 многочастотные 236—252
 с одной частотой 208—235
 Вырождение 435, 448, 465
 в задаче о колебаниях мембраны, близ-
 кой по форме к кругу 448—452,
 482—484
 снятие 437, 452, 466
 Вырожденная задача на собственные зна-
 чения,
 для уравнения второго порядка 434—437
 для уравнения четвертого порядка 408,
 463, 465—466
 Вырожденное уравнение 35, 37, 40, 117,
 291
 Вырожденное ядро 478
 Гамма-функция 81, 82, 93, 95
 асимптотическое представление 114
 неполная 62
 определение 77—80
 Геометрическая прогрессия 26
 Гипербола 106
 Гирскопические системы 414—420
 нелинейные 414—417
 с параметрическим возбуждением 417—
 420
 Главный резонанс,
 См. Первичный резонанс
 Градиент 98
 Граничные условия,
 на поверхности раздела 408, 473—476
 общие 420, 426—432, 472—473
 перенос 439, 446
 потери 278, 292
 смешанные (неразделенные) 421
 сопряженные 429—430
 Дельта-функция Дирака 173
 Демпфирование 146—209
 отрицательное 161
 Деформация контура интегрирования 89,
 101, 102, 106, 109
 Дифференцируемая функция комплексного
 переменного 96
 Дифференциальное уравнение,
 общее решение в линейном случае 503
 определение 499
 Дробные степени параметра 38
 Естественные координаты 29
 Жорданова каноническая форма 257
 Задача на собственные значения,
 вырожденная, для уравнения второго
 порядка 434—437
 для уравнения четвертого порядка 462—
 466
 решение с помощью метода ВКБ 385—389
 с регулярной особой точкой 446—452
 с точкой поворота 400—406
 Задача Орра—Зоммерфельда 455
 Задача с двумя точками поворота 402—404
 Задача сингулярных возмущений 43, 282
 Задача с точкой поворота 380
 на собственные значения 404—406
 n-го порядка 398
 определение 383, 389
 решение методом сравнимых асимпто-
 тических разложений 310—317, 389—
 395
 Задача Штурма—Лнувилля 425
 Замкнутая траектория 124—127
 Затухание 466
 Изменение масштаба зависимой перемен-
 ной 335
 Интеграл,
 асимптотическое разложение 57—115,
 373, 378
 движения 124
 Интеграл Лапласа 89, 91, 95, 96, 97, 103,
 373
 обобщенный 69, 86, 106
 интегрирование по частям 67—68
 Интеграл ошенок 61
 Интеграл Фурье 96, 97
 главный член 86—87, 88
 обобщенный 86
 преобразование в интеграл Лапласа 89,
 91
 Интегральное представление,
 решений дифференциальных уравнений
 57—58, 373, 377, 378
 функций Эйри 392—393
 Интегральное уравнение Фредгольма 476—
 479
 Интегрирование по частям 62—71
 в приложении к функциям Эйри 115, 393
 несостоятельность 69, 71, 75, 86, 102, 104
 Интегрирующий множитель 57, 331
 Исключение первой производной 379—380
 Калибровочные функции 20—24, 36
 Каноническое представление 429, 461
 Колебания пластин 14, 15, 456—459
 Комбинационный резонанс 251, 252
 для акустических волн в каналах 442
 для гирскопических систем с парамет-
 рическим возбуждением 419
 при многочастотном возбуждении 239
 расчет методом многих масштабов 239—
 246
 расчет методом усреднения, 246—250
 Консервативные системы 116, 146
 Корни характеристического уравнения,
 комплексно сопряженные 510
 кратные 510—513
 Коррекция частоты 129, 215, 220, 226
 Красная задача,
 нелинейная 329—341
 решение с помощью метода ВКБ 406
 с двумя пограничными слоями 317—325
 см. также Задача на собственные зна-
 чения. Условия разрешимости
 Кривая,
 интегральная 124—125
 наискорейшего спуска 100, 101
 см. также Линия наискорейшего спуска
 Лемма Ватсона 74—75, 85, 103, 106, 109
 Формулировка 74
 Линейная комбинация 501
 Линейная независимость 501—503
 Линейные дифференциальные уравнения
 499—518
 с большим параметром 379—406
 с переменными коэффициентами 345—
 378

- Линейный оператор 500
 Линейный осциллятор с затуханием 146—160, 203
 использование метода многих масштабов 156—158
 использование метода усреднения 159—160
 использование методики *Линдштедта* — *Паункаре* 153—155
 прямое разложение 147—148
 точное решение 148—152
 Линия наискорейшего спуска 99—101, 108
 Линия постоянной фазы 102, 106
 Линия уровня 99
- Малые знаменатели 211, 407
 в задаче для гироскопических систем с параметрическим возбуждением 419
 в задаче об акустических волнах 442
 в задаче о вынужденных колебаниях для уравнения *Дюффинга* 211
 в задаче о многочастотном возбуждении 236, 238
 для уравнения *Матве* 255
 преобразование к секулярным членам 213—214, 444
 приводящие к комбинационному резонансу 236, 239, 419, 442
 приводящие к первичному резонансу 224, 230—231
 приводящие к субгармоническому резонансу 213
 приводящие к супергармоническому резонансу 219
- Масштабы 134, 135, 191
 влияние на вид разложения 282—285
 их комбинация 282, 289
- Матрица, невырожденная 428, 461
 Матрица-блок 430
- Мембрана 407, 426, 482
 колебания 446—452
- Мероморфная функция 96
- Метод *Ван-дер-Поля* 142
- Метод ВКБ 277, 305, 406
- Метод Лапласа 25, 71—86
 в приложении к функциям *Эйри* 115, 393
 сравнение с методом стационарной фазы 97
- Метод многих масштабов 117, 144, 147, 160, 162, 172—173, 175, 186, 190, 191, 193, 194, 202, 209, 231, 232, 233—235, 407, 455
 для задачи об акустических волнах 442—445
 для задачи о линейном осцилляторе 156—158
 для краевых задач 276, 289—291
 для нахождения вторичных резонансов 211—224
 для нахождения первичных резонансов 224—228
 для нелинейной гироскопической системы 414—417
 для нелинейных уравнений в частных производных 300
 для систем с квадратичными нелинейностями 182—184
 для систем с нелинейностями общего вида 199—200
 для систем с параметрическим возбуждением 417—420
 для уравнения *Дюффинга* 133—139
 для уравнения *Матве* 268—272;
 для уравнения *Рэлея* 167—170
 сравнение с методом сращиваемых асимптотических разложений 299—300
 упражнения 274—275
- Метод наискорейшего спуска (метод пере-
- вала) 96—109, 392
- Метод неопределенных коэффициентов 148, 244
- Метод перенормировки 117, 133, 137, 143, 144, 162, 172, 175, 182, 184, 190
 для произвольных нелинейных систем 197—199
 для системы с квадратичными нелинейностями 178—180
 для уравнения *Дюффинга* 132—133
 для уравнения *Рэлея* 165—167
 недостатки 155, 167, 170
- Метод растянутых параметров 253, 261, 456
 в вырожденной задаче на собственные значения 434—437
 в задаче на собственные значения для уравнения четвертого порядка 462—466
 в задаче о колебаниях мембраны 446—452
 в простой задаче на собственные значения для уравнения второго порядка 432—434
 для уравнения *Матве* 262—266
- Метод сращиваемых асимптотических разложений 276, 299, 300
 для простой краевой задачи 291—300
 для уравнений с переменными коэффициентами 305—317
 основная идея 285, 291
 сравнение с методом многих масштабов 299, 300
- Метод стационарной фазы 86—95
 в приложении к функциям Весселя 373
 для интеграла *Эйри* 115, 393
 сравнение с методом Лапласа 97
- Метод *Уиттекера* 262, 266—268, 272
 ограничения 268—269
 упражнения 274
- Метод усреднения 117, 143, 144, 147, 162, 170—173, 175, 209, 228—235
 для линейного осциллятора 159—160
 для общего нелинейного уравнения 201—202, 206
 для систем с квадратичными нелинейностями 185—186
 для случая многочастотного возбуждения 246—250
 для уравнения *Дюффинга* 141—143, 228—233
 для уравнения *Матве* 272—274
 для уравнения *Рэлея* 170—172
 методика *Крылова—Боголюбова—Митропольского* 191—193
 недостатки 185—186
 обобщенный 160, 186—190, 193, 194
 сравнение с методом растянутых параметров 262
 упражнения 274—275
- Методика *Крылова—Боголюбова—Митропольского* 175, 186, 191—193
- Методика *Линдштедта—Паункаре* 117, 133, 137, 143, 144, 147, 162, 175, 178, 184, 190, 194
 в задаче о линейном осцилляторе 153—155
 для систем с квадратичными нелинейностями 180—182
 для уравнения *Дюффинга* 129—132
 недостатки 154, 167, 170
- Методика *Ньютона—Рафсона* 387, 401, 403
- Многочастотное возбуждение 236—252
 использование метода многих масштабов 239—246
 использование метода усреднения 246—250
 прямое разложение 236—239

- Мода,
акустическая 440, 442
при колебаниях мембраны 448
Модуляция амплитуды и фазы 215, 417, 420
- Наименее вырожденная форма 279, 391
Неавтономная система 215
Неаналитические функции 195, 204—207
Невырожденное преобразование 428
Нелинейные колебания 290
Неограниченные решения 246, 268, 271
для уравнения *Матве* 258, 260
Неоднородные уравнения 407—491
определенные 499
с постоянными коэффициентами, их решения 513—518
свойства 505—506
связь с соответствующим однородным уравнением 505, 506
Неравномерная сходимость прямого разложения 282
Неравномерное разложение 40, 117, 122
Неравномерность 40, 130, 147
в разложении 32
для линейного осциллятора 147—152
для простой краевой задачи 278—282
для уравнения *Дюффинга* 122, 129
для уравнения *Релея* 163
область 34, 40
Несовместные уравнения 416
Неустойчивые движения 222, 228, 258, 261
Неэлементарные функции 397
Нормальная форма *Флока* 258, 262, 266
Нормальное решение 363, 367
- Область,
бесконечная 329
внешняя 297—300
внутренняя 297—300
конечная 289
применимости 285, 288, 298.
См. также Перекрывающиеся области
Обтекание бесконечной пластины 15—17
Обыкновенная точка дифференциального уравнения 346, 348, 349
решения вблизи нее 349—351
Ограниченные решения уравнения *Матве* 260
Однородное дифференциальное уравнение, определенное 499
с постоянными коэффициентами, решения 507—513
свойства 501—505
Оператор 500
коммутативный 512
сопряженный 460
четвертого порядка 459
Операторный метод 148
Операция, не обоснованная 41, 280
Определяющее уравнение 352
Особая точка,
изолированная 347
иррегулярная 349
решения вблизи нее 363—375
классификация 348—349
на бесконечности 361—363
регулярная 349, 426, 450
решения вблизи нее 351—363
устраиваемая
Осциллятор с самовозбуждением 161—173
использование метода многих масштабов 167—170
использование метода перенормировки 165—167
использование метода усреднения 170—172
прямое разложение 162—165
- Парабола 144
- Параметр 20,
безразмерный 11, 12, 13—14, 16, 17
в уравнении *Дюффинга* 117
малый, при старшей производной 276—344
Параметр расстройки 42, 213, 219, 225, 240, 241, 270, 419, 442
в случае первичного резонанса 225
в случае субгармонического резонанса 213
в случае супергармонического резонанса 219
для акустических волн в канале 442
для гироскопических систем с параметрическим возбуждением 419
для уравнения *Матве* 270
при комбинационном резонансе 240, 241
Параметрическое возбуждение 253
гироскопической системы 417—420
системы с двумя степенями свободы 275.
См. также Уравнение *Матве*
Первичный резонанс 238
исследование методом многих масштабов 224—228
исследование методом усреднения 232—233
определение 211
Переключение с одного разложения на другое 298
Перекрывающиеся области 285—289, 297, 298
Перенос граничных условий 438—439, 446
Переходная характеристика 154, 158, 160, 162, 173
Переходные кривые 262—274
периодические 261, 262
Периодическое решение 124—126, 154, 164
в случае первичного резонанса 227
в случае субгармонического резонанса 216
в случае супергармонического резонанса 221
произвольной нелинейной системы 198
уравнения *Дюффинга* 127—129, 131, 132
уравнения *Матве* 258—259
см. также Предельный цикл
Пограничный слой 281
внутренний 313—317, 334, 339—341
высшие приближения 300—305
определяющие уравнения 17—
Подобные матрицы 257
Подынтегральное выражение, 128
разложение в ряд 58—62
Полиномы *Лежандра* 115
Полная энергия 123—124
Положение равновесия 116, 174, 194
Порядок,
величины 9
дифференциального уравнения 499
члена 36, 224
Правило *Крамера* 244, 411
Правило *Лопитала* 22—23, 64
Преобразование,
интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений 478—479
невырожденное 397, 428, 461, 472
обратное 429
регулярность 399
Преобразование *Лангера* 276, 380, 390, 396—400
Преобразование *Лапласа* 57, 67
модифицированное 392
Преобразование *Лиувилля—Грина* 380, 383—385, 397, 398
Преобразование растяжения 276, 282, 292, 295, 311, 314, 318, 321, 326, 335, 390
См. также Внутренняя переменная

- Преобразование сжатия 329, 330
 Преобразование *Фурье* 57, 68
 Преобразование *Эйлера* 29, 145
 Приведенная масса 13
 Признак *Даламбера* 18, 26, 27, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 151, 152, 347, 351, 354, 360, 369, 372
 Принцип асимптотического срачивания. См. Сращивание
 Принцип сращивания Ван-Дайка 303—304
 Принцип суперпозиции 119, 120, 183, 196, 421, 501, 504
 Производная по направлению 98
 Промежуточная переменная 289
 Промежуточное разложение 284, 287, 289
 для простой краевой задачи 302—303
 Пружина 10, 11, 146, 174, 175
 Прямое разложение 117, 147, 162, 175, 195, 209, 236, 253, 277
 в задаче для уравнения *Дюффинга* в случае вынужденных колебаний 209—211
 в задаче об акустических волнах в канале 438—442
 в задаче о многочастотном возбуждении 236—239
 для линейного осциллятора 147—148
 для произвольных нелинейных систем 195—197
 для простой краевой задачи 277
 для систем с квадратичными нелинейностями 175—178
 для тригонометрической функции 149—150
 для уравнения *Дюффинга* 117—123
 для уравнения *Матве* 253—255, 262
 для уравнения *Рэлея* 162—165
 для экспоненты 149
 причины несостоятельности 127, 151, 152, 163—164
 Радиальная нагрузка 14, 15
 Разделение переменных 123, 126, 168, 188, 205, 306, 308, 327, 336, 379, 384, 398
 в задаче о колебаниях мембраны 447
 в задаче об акустических волнах в канале 439—441, 443
 Разложение 17—20
 неравномерное 32, 122
 перекрывающееся 285
 подынтегральных функций 58—62.
 См. также Асимптотическое разложение, Внутреннее разложение, Внешнее разложение
 Растянутая переменная 276, 282, 292
 См. также Внутренняя переменная
 Расширенная матрица 410
 Резонанс 134, 235
 одновременный 241, 251, 252
 см. также Комбинированный резонанс, Первичный резонанс, Субгармонический резонанс, Супергармонический резонанс
 Резонансные частоты 209, 211
 Рекуррентные соотношения 350, 354, 360, 365, 367, 369, 371
 Решение в форме *Фробениуса* 353—355, 361, 366
 Ряд.
 См. Асимптотический ряд, Геометрическая прогрессия, Ряд *Тейлора*
 Ряд *Лорана* 347, 517
 Ряд *Тейлора* 18—19, 58, 60, 61, 81, 82, 83, 85, 88, 92, 93, 107, 116, 132, 166, 179, 346—347, 349, 351
 для косинуса 149—152
 для экспоненты 149, 150
 разложение с целью переноса граничных условий 438—439, 446
 Ряд *Фурье* 119, 198, 200, 201, 448, 482
 для тригонометрических функций 494—497
 Самосопряженный 433, 436, 444, 484
 алгебраическая система 479
 дифференциальное уравнение четвертого порядка 454—455, 464
 задача для уравнения в частных производных 482, 483
 задача с внутренними граничными условиями 475—476
 интегральное уравнение 477
 матрица 412
 оператор 427, 460
 система дифференциальных уравнений второго порядка 424, 430
 система уравнений первого порядка 470
 уравнение с регулярной особой точкой 449—450
 Седловая точка 98—101, 105—107, 108, 124
 Секулярные члены 123
 более сложный вид при увеличении порядка 148
 их исключение 130, 138, 153, 155, 157, 158, 180—182, 193, 200, 407
 в решении для произвольной нелинейной системы 198
 в решении для систем с квадратичными нелинейностями 180, 181, 183
 в решении уравнения *Дюффинга* 123, 130—133, 135
 в решении уравнения *Матве* 263—266
 в решении уравнения *Рэлея* 164, 166, 168
 в случае вынужденных колебаний для уравнения *Дюффинга* 211
 не приводящие к неравномерности 289
 Сепаратрисы 124
 Сила инерции 11
 Симболический метод 513—518
 Символы порядка 24—25
 Симметричная матрица 412, 479
 Симметричное ядро 477
 Симметрия 435, 448
 Системы с квадратичными нелинейностями 174—194, 236, 250
 прямое разложение 175—178
 решение методом многих масштабов 182—184
 решение методом перенормировки 178—180
 решение методом усреднения 185—186
 решение обобщенным методом усреднения 186—190
 решение с помощью методики *Крылова* — *Боголюбова* — *Митропольского* 191—193
 решение с помощью методики *Линдштеда* — *Пуанкаре* 180—182
 случай ненулевого внешнего воздействия 233—235
 См. также Многочастотное возбуждение
 Системы со слабой нелинейностью общего вида 195—207
 прямое разложение 195—197
 решение методом многих масштабов 199—200
 решение методом перенормировки 197—199
 решение методом усреднения 201—202
 Скачок характеристики 221, 222, 227, 228
 Собственное значение матрицы 257, 258
 Собственный вектор матрицы 257
 Составное разложение 298—300

- для задач с двумя пограничными слоями 324—325
 для задачи с точкой поворота 313, 316, 317
 для многозонной задачи 328
 для нелинейной задачи 333
 для уравнения с переменными коэффициентами 307, 310
 для уравнения с постоянными коэффициентами 304—305
 Составное тело 473
 Срачивание
 в многозонной задаче 327—328
 основная идея 285—289
 принцип 286
 промежуточное 289, 302—303
 сравнение промежуточного и прямого 303
 см. также Принцип срачивания *Ван-Дайка*
 Срачивание внешнего и внутреннего разложений
 в задачах с точками поворота 392—395
 в многозонной задаче 327—328
 в простой краевой задаче 302—304
 для задачи с двумя пограничными слоями 319—324
 для нелинейной задачи 332—333, 337—340
 для уравнений с переменными коэффициентами 307, 309—310, 312—313, 315—316
 Стационарная точка 70, 85, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 98, 124, 373
 вклад в главный член 94
 Стационарное решение 154, 216, 221, 241
 Стержень, покрытый оболочкой 473
 Стоксовы линии и поверхности 276
 Субгармонический резонанс 213—219, 238, 239
 определение 216
 Субнормальное решение 363, 367—369
 Супергармонический резонанс 219—222, 231—232, 238
 определение 216
 Существенно особая точка 20, 349
 на бесконечности 363, 364, 370
 решения вблизи нее 363—375
 Сходимость 27
 асимптотического ряда 31
 неравномерная 282
 радиус 347, 349
 см. также Признак Даламбера
 Тензорная запись 479
 Теорема Коши 89, 97, 103
 Теорема существования 500, 503
 Теория Флока 263, 265—262, 267
 Теплообмен в канале 402, 406
 Течение
 вблизи волнистой стенки 489
 ламинарное 402
 сжимаемой жидкости 466
 турбулентное 406
 см. также Акустические волны
 Течение Стокса—Озена 17
 Точка ветвления 103
 Точка перегиба 81
 Точки перехода 276, 383, 389
 Точное решение
 алгебраических уравнений 38, 41
 в случае линейного осциллятора 148—152
 для простой задачи на собственные значения 279
 уравнения Дюффинга 123—129
 Точность асимптотического ряда 28—29
 Точность решения, построенного по методу возмущений 387, 388, 401, 403
 Траектория 124—126
 Транспонирование 411, 468, 471
 Трансцендентные уравнения 51—54
 Тригонометрические формулы 492—498
 Ударный слой 276, 334, 341
 Упругие волны 438
 Уравнение Бесселя
 в нормальной форме 380
 модифицированное 377
 n -го порядка 378, 447
 нулевого порядка 360
 Уравнение Ван-дер-Поля 162, 172
 см. также Осциллятор с самовозбуждением
 Уравнение Дюффинга 116—143, 175, 198, 202
 вариация произвольных постоянных 139—141
 прямое разложение 117—123
 решение методом многих масштабов 133—139
 решение методом перенормировки 132—133
 решение методом усреднения 141—143
 решение с помощью методики Линдштеда—Пуанкаре 129—132
 случай вынужденных колебаний 208—235
 точное решение 123—129
 фазовая плоскость 124—125
 явление скачка 221—222, 227—228
 Уравнение Лиувилля 380
 Уравнение Матвея 253—275
 прямое разложение 253—255
 решение методом многих масштабов 268—272
 решение методом растянутых параметров 262—266
 решение методом Уиттекера 266—268
 решение методом усреднения 272—274
 Уравнение Рэлея 161, 165, 199, 203
 случай вынужденных колебаний 234
 см. также Осциллятор с самовозбуждением
 Уравнение Эйлера 351—353, 355, 358, 359
 Уравнение Эйри 391, 396, 399, 404
 Уравнения Коши—Римана 97—99
 Уравнения Навье—Стокса 16, 16, 300
 Уравнения с большим параметром 379—406
 ВКВ-приближение 380—383
 задачи на собственные значения 385—389
 задачи на собственные значения с точками поворота 400—404
 преобразование Лангеса 396—400
 преобразование Лиувилля—Грина 383—385
 случай медленно меняющихся коэффициентов 389
 Уравнения с медленно меняющимися коэффициентами 389
 Уравнения с постоянными коэффициентами неоднородные 513—518
 однородные 507—513
 Уравнения, совместные 408, 409
 Условия разрешимости 290, 407—491
 в случае общей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка 469—473
 для алгебраических уравнений 408—414
 для граничных условий общего вида 426—432
 для дифференциального уравнения четвертого порядка с граничными условиями общего вида 459—462
 для интегральных уравнений 476—479
 для систем дифференциальных уравнений с внутренними граничными условиями 473—476

- для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 466—469
 для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка 420—432
 для системы уравнений четвертого порядка 452—459
 для уравнений в частных производных 479—484
 достаточность 478
 простой модельный пример 421—422
 Успокоитель колебаний 146
 Устойчивость
 пограничного слоя 407—408, 490, 491
 пространственного течения 455
 См. также Переходные кривые
 Устраняемая особая точка 376
 Фазовая плоскость
 для уравнения Дюффинга 124—126
 для уравнения Рэлея 164, 165
 Формула Грина 427, 431, 436, 460, 462, 481, 483
 Формула Лагранжа 427
 Фундаментальная система решений 504
 Функции Бесселя
 асимптотические разложения 113—114, 374, 378, 403
 интегральное представление 102, 373, 377, 378
 модифицированные 377
 n -го порядка 448
 нулевого порядка 30, 102—104, 360—361, 369—374
 нули 51—56, 448
 первого порядка 357—360, 378
 порядка $1/2$ 404
 порядка $1/3$ 402, 404
 Функция, дополнительная 506
 Функция тока 455
 Функции Эйри 391, 395, 402
 второго рода 115
 интегральное представление 104, 392
 первого рода 104—108, 113
 связь с функциями Бесселя 402, 404
 Характеристический показатель 259, 261, 262, 268
 Характеристический полином 507—513
 Характерный предел 297, 306, 309, 311, 315, 318, 321, 330, 335, 341, 343, 393
 случай нескольких характерных пределов 325—328
 Целые степени параметра 38
 Центр, притягивающий 12
 Частота
 нелинейной системы 178, 198
 собственная 10, 175
 Численное интегрирование 335, 367, 401, 403
 Число Рейнольдса 17
 Экспоненциальная форма разложения 381
 Электромагнитные волны 438
 Электрон 9
 Элементарная функция 397
 Эллиптический интеграл
 второго рода 110
 первого рода 59, 127
 Эрмитава матрица 412
 Ядро, вырожденное 478

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	8
Глава 1. Введение	9
1.1. Анализ размерностей	9
1.2. Разложения	17
1.3. Калибровочные функции	20
1.4. Символы порядка	24
1.5. Асимптотические ряды	25
1.6. Асимптотические разложения и последовательности	29
1.7. Сравнение сходящихся и асимптотических рядов	30
1.8. Простейшие действия над асимптотическими разложениями	31
Упражнения	32
Глава 2. Алгебраические уравнения	35
2.1. Квадратные уравнения	35
2.2. Кубические уравнения	45
2.3. Уравнения высших порядков	49
2.4. Трансцендентные уравнения	51
Упражнения	54
Глава 3. Интегралы	57
3.1. Разложение подынтегральной функции	58
3.2. Интегрирование по частям	62
3.3. Метод Лапласа	71
3.4. Метод стационарной фазы	86
3.5. Метод наискорейшего спуска	96
Упражнения	110
Глава 4. Уравнение Дюффинга	116
4.1. Прямое разложение	117
4.2. Точное решение	123
4.3. Методика Линшtedта—Пуанкаре	129
4.4. Метод перенормировки	132
4.5. Метод многих масштабов	133
4.6. Вариация произвольных постоянных	139
4.7. Метод усреднения	141
Упражнения	143
Глава 5. Линейный осциллятор с затуханием	146
5.1. Прямое разложение	147
5.2. Точное решение	148
5.3. Методика Линшtedта—Пуанкаре	153
5.4. Метод многих масштабов	156
5.5. Метод усреднения	159
Упражнения	160

Глава 6. Колебательные системы с самовозбуждением	161
6.1. Прямое разложение	162
6.2. Метод перенормировки	165
6.3. Метод многих масштабов	167
6.4. Метод усреднения	170
Упражнения	172
Глава 7. Системы с квадратичными и кубическими нелинейностями	174
7.1. Прямое разложение	175
7.2. Метод перенормировки	178
7.3. Методика Линштедта—Пуанкаре	180
7.4. Метод многих масштабов	182
7.5. Метод усреднения	185
7.6. Обобщенный метод усреднения	186
7.7. Метод Крылова—Боголюбова—Митропольского	191
Упражнения	194
Глава 8. Колебательные системы со слабой нелинейностью общего вида	195
8.1. Прямое разложение	195
8.2. Метод перенормировки	197
8.3. Метод многих масштабов	199
8.4. Метод усреднения	201
8.5. Приложения	202
Упражнения	206
Глава 9. Уравнение Дюффинга. Случай вынужденных колебаний	208
9.1. Прямое разложение	209
9.2. Метод многих масштабов	211
9.3. Метод усреднения	223
Упражнения	233
Глава 10. Многочастотное возбуждение	236
10.1. Прямое разложение	236
10.2. Метод многих масштабов	239
10.3. Метод усреднения	246
Упражнения	250
Глава 11. Уравнение Матвея	253
11.1. Прямое разложение	253
11.2. Теория Флоке	255
11.3. Метод растянутых параметров	262
11.4. Метод Уиттекера	266
11.5. Метод многих масштабов	268
11.6. Метод усреднения	272
Упражнения	274
Глава 12. Задачи с пограничным слоем	276
12.1. Простой пример	277
12.2. Метод многих масштабов	289
12.3. Метод сращиваемых асимптотических разложений	291
12.4. Высшие приближения	300
12.5. Упражнения с переменными коэффициентами	305
12.6. Задачи с двумя пограничными слоями	317
12.7. Многозонная задача	325
12.8. Нелинейные задачи	329
Упражнения	341

Глава 13. Линейные уравнения с переменными коэффициентами	345
13.1. Скалярные уравнения первого порядка	346
13.2. Уравнения второго порядка	349
13.3. Решение в окрестности регулярной особой точки	351
13.4. Сингулярность в бесконечно удаленной точке	361
13.5. Решение в окрестности иррегулярной особой точки	363
Упражнения	375
Глава 14. Дифференциальные уравнения с большим параметром	379
14.1. ВКБ-приближение	380
14.2. Преобразование Лиувилля—Грина	383
14.3. Задачи на собственные значения	385
14.4. Уравнения с медленно меняющимися коэффициентами	389
14.5. Уравнения с точкой поворота	389
14.6. Преобразование Лангера	396
14.7. Задачи на собственные значения для уравнений с точкой поворота	400
Упражнения	404
Глава 15. Условия разрешимости	407
15.1. Алгебраические уравнения	408
15.2. Нелинейные колебания гироскопических систем с двумя степенями свободы	414
15.3. Гироскопические системы с параметрическим возбуждением	417
15.4. Краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка	420
15.5. Граничные условия общего вида	426
15.6. Простая задача на собственные значения	432
15.7. Вырожденная задача на собственные значения	434
15.8. Звуковые волны в канале с волнистыми стенками	438
15.9. Колебания мембраны, близкой по форме к кругу	446
15.10. Краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка	452
15.11. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с граничными условиями общего вида	459
15.12. Задача на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка	462
15.13. Система дифференциальных уравнений первого порядка	466
15.14. Общая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	469
15.15. Краевые задачи с внутренними граничными условиями	473
15.16. Интегральные уравнения	476
15.17. Дифференциальные уравнения с частными производными	479
Упражнения	485
Приложение А. Тригонометрические формулы	492
Приложение Б. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения	499
Литература	519
Литература, добавленная редактором перевода	523
Предметный указатель	526

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Али Найфэ

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

Старший научный редактор А. А. Бряндинская
Художник А. Я. Мусин
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор В. П. Сизова
Корректор Т. П. Пашковская

ИБ № 3611

Сдано в набор 12.01.84. Подписано к печати 29.06.84.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем бум. л. 16,75
Усл. печ. л. 33,50. Усл. кр.-отт. 33,50. Уч.-изд. л. 27,92. Изд. № 1/2701.
Тираж 10500 экз. Зак. № 35. Цена 2 р. 30 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного
Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга»
им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли.
193144, г. Ленинград, ул. Момсенко, 10.